机密★启用前(全国卷文科数学)

华中师范大学第一附属中学2021届高考押题卷

文科数学

本试题卷共4页,22题。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知M,N为$\mathbf{R}$的两个不相等的非空子集,若$(\complement_{\mathbf{R}}N)\subseteq(\complement_{\mathbf{R}}M)$,则下列结论中正确的是

A. $\forall x\in N,x\in M$　　B. $\exists x\in M,x\notin N$　　C. $\exists x\notin N,x\in M$　　D. $\forall x\in M,x\notin \complement_{\mathbf{R}}N$

2. 已知抛物线$y=mx^2(m>0)$上的点$(x_0,2)$到该抛物线焦点F的距离为$\frac{17}{8}$,则$m=$

A. 1　　B. 2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

3. 下列结论中,错误的是

A. "$x=1$"是"$x^2-x=0$"的充分不必要条件

B. 已知命题p:$\forall x\in\mathbf{R},x^2+1>0$,则$\neg p$:$\exists x\in\mathbf{R},x^2+1\leqslant 0$

C. 若复合命题$p\wedge q$是假命题,则p,q都是假命题

D. 命题"若$x^2-x=0$,则$x=1$"的逆否命题"若$x\neq1$,则$x^2-x\neq0$"

4. 已知S_n是等比数列$\{a_n\}$的前n项和,若存在$m\in\mathbf{N}^*$,满足$\frac{S_{2m}}{S_m}=9,\frac{a_{2m}}{a_m}=\frac{5m+1}{m-1}$,则数列$\{a_n\}$的公比为

A. -2　　B. 2　　C. -3　　D. 3

5. 已知大气压强$p=\frac{压力}{受力面积}$,它的单位是"帕斯卡"(Pa,1 Pa=1 N/m^2),大气压强p(Pa)随海拔高度h(m)的变化规律是$p=p_0e^{-kh}(k=0.000126)$,p_0是海平面大气压强.已知在某高山A_1,A_2两处测得的大气压强分别为p_1,p_2,且$\frac{p_1}{p_2}=\frac{1}{2}$,那么$A_1,A_2$两处的海拔高度的差约为(参考数据:$\ln2\approx0.693$)

A. 550m　　B. 1818m　　C. 5500m　　D. 8732m

6. 在平行四边形$ABCD$中,$\angle BAD=60°,AB=4,AD=3$,且$\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$,则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=$

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 10

7. 已知函数$f(x)=\log_3(9^x+1)-x$,设$a=f(\frac{1}{10}),b=f(-e^{-\frac{9}{10}}),c=f(\ln\frac{11}{10})$,则$a,b,c$的大小关系为

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $c<a<b$　　D. $b<a<c$

8. 斜率为$\frac{1}{3}$的直线l经过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左焦点$F_1$,交双曲线两条渐近线于$A,B$两点,$F_2$

为双曲线的右焦点且$|AF_2|=|BF_2|$，则双曲线的渐近线方程为

A. $y=\pm x$　　B. $y=\pm\sqrt{2}x$　　C. $y=\pm 2x$　　D. $y=\pm\frac{1}{2}x$

9.已知复数$z=\cos140°+i\sin140°$，i为虚数单位，则下列说法错误的是

A. z的虚部为$i\sin140°$　　B. z在复平面上对应的点位于第二象限

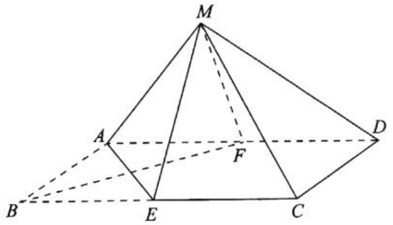
C. $z=\frac{1}{\bar{z}}$　　D. $z^3=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

10.为庆祝中国共产党成立100周年，A、B、C、D四个兴趣小组举行党史知识竞赛，每个小组各派10名同学参赛，记录每名同学失分(均为整数)情况，若该组每名同学失分都不超过7分，则该组为“优秀小组”，已知A、B、C、D四个小组成员失分数据信息如下，则一定为“优秀小组”的是

A. A组中位数为2，极差为8　　B. B组平均数为2，众数为2

C. C组平均数为1，方差大于0　　D. D组平均数为2，方差为3

11.如图，矩形$ABCD$中，已知$AB=2$，$BC=4$，E为BC的中点．将$\triangle ABE$沿着AE向上翻折至$\triangle MAE$得到四棱锥$M-AECD$，平面AEM与平面$AECD$所成锐二面角为α，直线ME与平面$AECD$所成角为β，则下列说法错误的是



A. 若F为AD中点，则$\triangle ABE$无论翻折到哪个位置都有平面$AEM\perp$平面MBF

B. 若Q为MD中点，则$\triangle ABE$无论翻折到哪个位置都有CQ //平面AEM

C. $\sqrt{2}\sin\alpha=\sin\beta$

D. 存在某一翻折位置，使$\sqrt{2}\cos\alpha=\cos\beta$

12.已知函数$f(x)=|\sin x|+|\cos x|-\sin2x-1$，则下列说法错误的是

A. $f(x)$是以π为周期的函数

B. $x=\frac{\pi}{2}$是曲线$y=f(x)$的对称轴

C. 函数$f(x)$的最大值为$\sqrt{2}$，最小值为$\sqrt{2}-2$

D. 若函数$f(x)$在$(0,M\pi)$上恰有2021个零点，则$\frac{2021}{2}<M\leqslant1011$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13.直线$y=kx+\sqrt{3}$被圆$(x-1)^2+y^2=5$截得的弦长最小值是________.

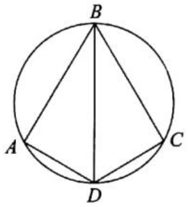
14.写出一个定义在$\mathbf{R}$上且使得命题“若$f'(1)=0$，则1为函数$f(x)$的极值点”为假命题的函数$f(x)$=________.

15.已知四棱锥$P-ABCD$的五个顶点都在球O的表面上，若底面$ABCD$是梯形，且$CD//AB$，$AD=BC=CD=\frac{1}{2}AB=\sqrt{5}$，则当球$O$的表面积最小时，四棱锥$P-ABCD$的高的最大值为________.

16.设$a_n=\frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{3}+\cdots+\frac{n^2}{2n-1}$，$b_n=\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{5}+\cdots+\frac{n^2}{2n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，记最接近$a_n-b_n$的整数为$c_n$，则$c_{505}=$________；$c_n=$________.(用$n$表示)

三、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（12分）

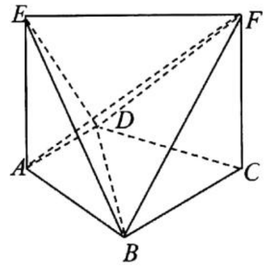


已知平面四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，$AB=BC=3$，$\angle ABC=60^\circ$.

(1)若 $CD=\sqrt{3}$，求 $\angle ABD$ 所对的圆弧 $\overset{\frown}{AD}$ 的长；

(2)求四边形 $ABCD$ 面积的最大值.

18.（12分）



七面体玩具是一种常见的儿童玩具.在几何学中，七面体是指由七个面组成的多面体，常见的七面体有六角锥、五角柱、正三角锥柱、Szilassi多面体等.在拓扑学中，共有34种拓扑结构明显差异的凸七面体，它们可以看作是由一个长方体经过简单切割而得到的.在如图所示的七面体 $EABCFD$ 中，$EA\perp$ 平面 $ABCD$，$EA//FC$，$AD//BC$，$AD\perp AB$，$AD=AB=2$，$BC=FC=EA=4$.

(1)在该七面体中，探究以下两个结论是否正确.若正确，给出证明；若不正确，请说明理由：①$EF//$平面 $ABCD$；②$AF\perp$平面 EBD；

(2)求该七面体的体积.

19.（12分）

有一种击球比赛，把从裁判发球哨响开始到之后裁判第一哨响止，叫做一回合.每一回合中，发球队赢球后得分1分并在下一回合发球，另一队得零分，发球队输球后，比赛双方均得零分，下一回合由另一队发球.甲乙两球队正在进行这种击球比赛，从以往统计结果看，每一回合，甲乙两队输赢球的概率都相等.

(1)在连续三个回合中，第一回合由甲队发球.求甲队得1分的概率；

(2)比赛进入决胜局，两队得分均为25分.在接下来的比赛中，甲队第一回合发球，若甲乙两队某一队得分比对方得分多2分，则比赛结束，得分多的队获比赛胜利.求甲队在第四回合获得比赛胜利的概率.

20.（12分）

已知函数 $f(x)=e^x+a(x^2-2x)(a>0)$.

(1)若 $a=\frac{1}{2}$，求 $f(x)$ 的极值；

(2)若 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)<\frac{1}{x}+\ln x$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

21.（12分）

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$F_1$、$F_2$ 分别是椭圆的左、右焦点，P 是椭圆上的动点，直线 PF_1 交椭圆于另一点 M，直线 PF_2 交椭圆于另一点 N，当 P 为椭圆的上顶点时，有 $|PM|=|MF_2|$.

(1)求椭圆 E 的离心率；

(2)求$\frac{S_{\triangle PF_1F_2}}{S_{\triangle PMN}}$的最大值.

(二)选考题:共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22.[选修 4-4:坐标系与参数方程](10 分)

已知圆 O_1 的圆心为(2,1),半径为$\sqrt{5}$,在以原点 O 为极点,x 轴正半轴为极轴的极坐标系中,圆 O_2 的方程为 $\rho=2R\sin\theta$.

(1)求圆 O_1 的极坐标方程;

(2)若圆 O_1 与圆 O_2 的公共弦长为 $3\sqrt{2}$,求圆 O_2 的极坐标方程.

23.[选修 4-5:不等式选讲](10 分)

已知 $f(x)=|2-ax|-|x+1|$.

(1)若 $a=1$,解关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant1$;

(2)若 $x\geqslant1$ 时,$f(x)\leqslant x^2$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

机密★启用前(全国卷文科数学)

华中师范大学第一附属中学2021届高考押题卷

文科数学参考答案和评分标准

一、选择题:

1.【答案】D

【解析】由已知$(\complement_{\mathbf{R}}N)\subseteq(\complement_{\mathbf{R}}M)$得:$M\subseteq N$,得答案为$D$.

2.【答案】B

【解析】点$(x_0,2)$到焦点F的距离等于到准线$y=-\frac{1}{4m}$的距离,则$2+\frac{1}{4m}=\frac{17}{8}$,解得$m=2$.

3.【答案】C

【解析】当$x=1$时,$x^2-x=0$,∴A正确;结论B,D都是可以直接判断为正确的.复合命题$p\wedge q$假,只需p,q之一假就可以了,所以C错误.

4.【答案】B

【解析】设数列$\{a_n\}$的公比为q,若$q=1$,则$\frac{S_{2m}}{S_m}=2$,与题中条件矛盾,故$q\neq1$.

$\because\frac{S_{2m}}{S_m}=\frac{\frac{a_1(1-q^{2m})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^m)}{1-q}}=q^m+1=9$,$\therefore q^m=8$.$\because\frac{a_{2m}}{a_m}=\frac{a_1q^{2m-1}}{a_1q^{m-1}}=q^m=8=\frac{5m+1}{m-1}$,$\therefore m=3$,$\therefore q^3=8$,$\therefore q=2$.故选B.

5.【答案】C

【解析】设A_1,A_2两处的海拔高度分别为h_1,h_2,则$\frac{p_1}{p_2}=\frac{1}{2}=\frac{p_0e^{-kh_1}}{p_0e^{-kh_2}}=e^{k(h_2-h_1)}$,

$\therefore h_2-h_1=\frac{-\ln2}{0.000126}\approx\frac{-0.693}{0.000126}=-5500\text{m}$.

6.【答案】D

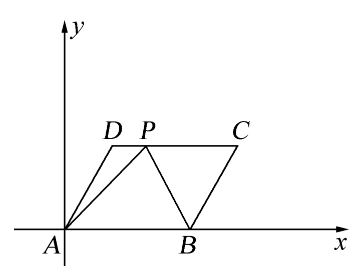
【解析】方法一:由题知$\overrightarrow{DP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$,则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DP}=$

$|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos60^\circ+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2=4\times3\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times16=10$.故选D.

方法二:如图,以A为原点,AB所在直线为x轴,过点A且垂直于AB的直线为y轴,建立直角坐标系,则$A(0,0)$,$B(4,0)$,$D\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\because\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$,$\therefore|\overrightarrow{DP}|=1$,$\therefore P\left(\frac{5}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,$\therefore\overrightarrow{AP}=\left(\frac{5}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{AB}=(4,0)$,

$\therefore\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{5}{2}\times4+\frac{3\sqrt{3}}{2}\times0=10$.故选D.



7.【答案】C

【解析】$\because f(x)=\log_3(9^x+1)-x=\log_3(3^x+3^{-x})$,$\therefore f(x)$为偶函数且在$(0,+\infty)$上为增函数,

则$b=f(-e^{-\frac{9}{10}})=f(e^{-\frac{9}{10}})$,$\because e^x-x-1\geqslant0$(当且仅当$x=0$时取等号),$\therefore e^x>x+1(x\neq0)$,

故$e^{-\frac{9}{10}}>-\frac{9}{10}+1=\frac{1}{10}$,即$b>a$;$\because\ln x-x+1\leqslant0$(当且仅当$x=1$时取等号),

$\therefore \ln x < x-1(x\neq 1)$，$\therefore \ln\frac{11}{10} < \frac{11}{10}-1=\frac{1}{10}$，$\therefore a>c$. 综上 $b>a>c$. 故选 C.

8.【答案】D

【解析】设 AB 的中点为 M，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$，则$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=0\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=0\end{cases}$，$\therefore \frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}-\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$，则 $k_{AB}\cdot k_{OM}=\frac{b^2}{a^2}$，$\therefore k_{OM}=\frac{3b^2}{a^2}$，设直线 AB 的倾斜角为 θ，$\because |AF_2|=|BF_2|$，

$\therefore AB\perp MF_2$，$\therefore |OM|=|OF_1|=|OF_2|$，则 OM 的斜率为 $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-(\frac{1}{3})^2}=\frac{3}{4}$，$\therefore \frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，

$\therefore$ 双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$，故选 D.

9.【答案】A

【解析】由虚部概念知 A 错误；由 $\cos 140°<0$，$\sin 140°>0$，B 正确；由 $z\cdot\bar{z}=|z|^2=1$，C 正确；

$\because z^2=\cos^2 140°-\sin^2 140°+2\mathrm{i}\sin 140°\cos 140°=\cos 280°+\mathrm{i}\sin 280°$，

$\therefore z^3=z^2\cdot z=\cos 420°+\mathrm{i}\sin 420°=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，D 正确.

10.【答案】D

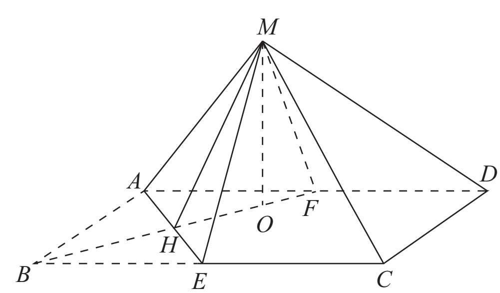
【解析】对 A，因为中位数为 2，极差为 8，故最大值大于 7. 故 A 错误；

对 B，失分数据分别为 0，0，0，2，2，2，2，2，2，8，则满足平均数为 2，众数为 2，但不满足每名同学失分都不超过 7 分，故 B 错误；

对 C，失分数据分别为 0，0，0，0，0，0，0，0，1，9，则满足平均数为 1，方差大于 0，但不满足每名同学失分都不超过 7 分，故 C 错误；

对 D，利用反证法，假设有一同学失分超过 7 分，则方差大于$\frac{1}{10}\times(8-2)^2=3.6>3$. 与题设矛盾，故每名同学失分都不超过 7 分. 故 D 正确.

11.【答案】C



【解析】若 F 为 AD 中点，连接 BF 交 AE 于点 H，则 $AE\perp$ 面 MBF，又 $AE\subset$ 面 MAE，所以平面 $AEM\perp$ 平面 MBF，A 正确；

取 AM 中点 P，则 $PQ \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}AD$，又 $CE \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}AD$，$\therefore PQ \underline{\underline{/\!/}} CE$，

$\therefore CQ/\!/EP$，B 正确；

过 M 作 $MO\perp$ 平面 $AECD$，则 O 在 BF 上，所以平面 AEM 与平面 $AECD$ 所成锐二面角为 $\angle MHB$（或其补角），$\therefore \sin\alpha=\frac{MO}{MH}$，$\sin\beta=\frac{MO}{ME}=\frac{MO}{\sqrt{2}MH}$，$\therefore \sin\alpha=\sqrt{2}\sin\beta$，C 错误；

若$\sqrt{2}\cos\alpha=\cos\beta$，又 $\cos\alpha=\frac{OH}{MH}$，$\cos\beta=\frac{OE}{ME}=\frac{OE}{\sqrt{2}MH}$，则 $OE=2OH$，D 正确

12.【答案】B

【解析】因为 $f(x+\pi)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数，A 正确；

又 $f(\pi-x)=|\sin x|+|\cos x|+\sin 2x-1\neq f(x)$，B 错误；

由 A 知只需考虑 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值.

①当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时，令 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，则 $t\in[1,\sqrt{2}]$，$f(x)=-t^2+t=u(t)$，易知 $u(t)$在区间$[1,\sqrt{2}]$上单调递减，所以，$f(x)$的最大值为 $u(1)=0$，最小值为 $u(\sqrt{2})=\sqrt{2}-2$.

②当 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$时，令 $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$，则 $t\in[1,\sqrt{2}]$，$f(x)=t^2+t-2=v(t)$，易知 $v(t)$在区间$[1,\sqrt{2}]$上单调递增，所以，$f(x)$的最大值为 $v(\sqrt{2})=\sqrt{2}$，最小值为 $v(1)=0$.

综合可知：函数 $f(x)$的最大值为$\sqrt{2}$，最小值为$\sqrt{2}-2$，C 正确；

因为 $f(x)$是以 π 为周期的函数，可以先研究函数 $f(x)$在$(0,\pi]$上的零点个数，易知 $f(\pi)=0$.

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$时，令 $f(x)=u(t)=-t^2+t=0$，解得 $t=0$ 或 1，

$t=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=0$ 在$(0,\frac{\pi}{2}]$上无解，$t=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=1$ 在$(0,\frac{\pi}{2}]$上仅有一解 $x=\frac{\pi}{2}$.

当 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$时，令 $f(x)=v(t)=t^2+t-2=0$，解得 $t=-2$ 或 1.

$t=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=-2$ 在$(\frac{\pi}{2},\pi)$上无解，$t=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=1$ 在$(\frac{\pi}{2},\pi)$上也无解.

综合可知：函数 $f(x)$在$(0,\pi]$上有两个零点，分别为 $x=\frac{\pi}{2}$和 $x=\pi$.

又因为 $f(x)$是以 π 为周期的函数，所以，若 $n\in\mathbf{N}^*$，则 $f(x)$在$(0,n\pi]$上恰有 $2n$ 个零点.

又已知函数 $f(x)$在$(0,M\pi)$上恰有 2021 个零点，所以$\frac{2021}{2}<M\leqslant1011$，D 正确.

二、填空题

13.【答案】2

【解析】直线 $y=kx+\sqrt{3}$经过定点 $A(0,\sqrt{3})$，定点 A 在圆内，圆心 $B(1,0)$到直线 $y=kx+\sqrt{3}$的最大距离为$|AB|=2$，所以，所求弦长的最小值为 $2\sqrt{(\sqrt{5})^2-2^2}=2$.

14.【答案】$(x-1)^3$(答案不唯一)

15.【答案】$\sqrt{5}$

【解析】球心在平面 $ABCD$ 上射影落在四边形 $ABCD$ 外接圆圆心处(即 AB 中点)，设球心 O 到平面 $ABCD$ 的距离为 d，则由 $R^2=d^2+\frac{1}{4}AB^2=d^2+5\geqslant5$ 得，外接球半径最小值为$\sqrt{5}$，当 $PO\perp$面 $ABCD$ 时，高最大为$\sqrt{5}$.

16.【答案】253；$\begin{cases}\frac{n}{2} & n\text{ 为偶数}\\ \frac{n+1}{2} & n\text{ 为奇数}\end{cases}$

【解析】$a_{505}=\frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{3}+\frac{3^2}{5}+\cdots\frac{505^2}{1009}$，$b_{505}=\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{5}+\cdots+\frac{504^2}{1009}+\frac{505^2}{1011}$，

$\therefore a_{505}-b_{505}=1+\frac{2^2-1^2}{3}+\frac{3^2-2^2}{5}+\cdots+\frac{505^2-504^2}{1009}-\frac{505^2}{1011}=505-\frac{505^2}{1011}=\frac{505\times506}{505+506}$

$\therefore\frac{2}{506}<\frac{1}{a_{505}-b_{505}}=\frac{1}{505}+\frac{1}{506}<\frac{2}{505}$

$\therefore252.5<a_{505}-b_{505}<253$

$\therefore c_{505}=253$.

$a_n-b_n=n-\frac{n^2}{2n+1}=\frac{n^2+n}{2n+1}$

$\therefore \frac{1}{a_n-b_n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\in\left(\frac{2}{n+1},\frac{2}{n}\right)$

$\therefore \frac{n}{2}<a_n-b_n<\frac{n+1}{2}$

若 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $c_n=k=\frac{n}{2}$，

若 $n=2k+1(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $c_n=k+1=\frac{n+1}{2}$，

$\therefore c_n=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\text{ 为偶数}\\ \frac{n+1}{2} & n\text{ 为奇数}\end{cases}$

三、解答题

17.【解析】

(1)连接 AC，$AB=BC=3$，$\angle ABC=60°$，$\therefore AC=3$ …………………………………………（1 分）

又 $\angle ADC=120°$，在 $\triangle ACD$ 中由余弦定理，$\cos120°=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}$，即 $-\frac{1}{2}=\frac{AD^2-6}{2\sqrt{3}AD}$，$\therefore AD=\sqrt{3}$

…………………………………………………………………………（3 分）

又 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R=\frac{AC}{2\sin60°}=\sqrt{3}$ …………………………………………（4 分）

$\therefore \triangle OAD$ 为正三角形，$\angle AOD=\frac{\pi}{3}$

$\therefore \angle ABD$ 所对的圆弧 $\overset{\frown}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$. …………………………………………（6 分）

(2)在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理 $\cos\angle ADC=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}$

即 $AD^2+CD^2+AD\cdot CD=9$，…………………………………………（8 分）

又 $AD^2+CD^2\geqslant 2AD\cdot CD$，$\therefore 9-AD\cdot CD\geqslant 2AD\cdot CD$

$\therefore AD\cdot CD\leqslant 3$ 当且仅当 $AD=CD=\sqrt{3}$ 时等号成立 …………………………………（10 分）

$\therefore S_{ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin60°+\frac{1}{2}AD\cdot DC\cdot\sin120°\leqslant\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=$

$3\sqrt{3}$，

所以四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 $3\sqrt{3}$. …………………………………………（12 分）

18.【解析】

(1)结论①正确，结论②错误，理由如下：…………………………………………（1 分）

对于结论①，因为 $EA//FC$ 且 $FC=EA=4$，连接 AC，所以四边形 $EACF$ 是平行四边形，

所以 $EF//AC$，因为 $EF\not\subset$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore EF//$ 平面 $ABCD$，$\therefore$ 结论①正确 …………………………………………（3 分）

对于结论②，若 $AF\perp$ 平面 EBD，则 $AF\perp BD$，

因为 $EA\perp$ 平面 $ABCD$，$EA//FC$，所以 $FC\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $FC\perp BD$，又因为 $AF\cap FC=F$，所以 $BD\perp$ 平面 AFC，

所以 $BD\perp AC$，而在梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，$AD\perp AB$，

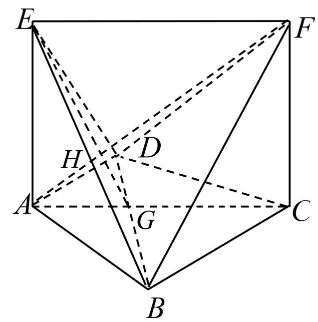
$AD=AB=2$，$BC=4$，所以 $CD=2\sqrt{2}\neq BC$，与 $BD\perp AC$ 矛盾

所以结论②错误. …………………………………………（6 分）

(2)方法一:连接 AC,交 BD 于点 G,连接 EG,则在平面 $EACF$ 中,AF 与 EG 相交,设交点为 H,则由 $AC//EF$ 可得:$\frac{AG}{EF}=\frac{AH}{HF}$,又∵$\frac{AG}{EF}=\frac{AG}{AC}=\frac{AD}{AD+BC}$

$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,

∴$\frac{AH}{HF}=\frac{1}{3}$,

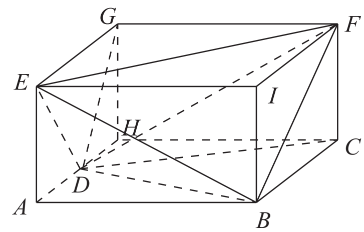


该七面体的体积等于 $V_{E-ABD}+V_{F-BED}+V_{F-BCD}$

$=V_{E-ABD}+3V_{A-BED}+2V_{E-ABD}=6V_{E-ABD}$

$=6\times\frac{1}{3}\times4\times\frac{1}{2}\times2\times2=16$. ……………………………………………………(12 分)

方法二:将该七面体补成如图所示的长方体;



$V_{ABCH-EIFG}-V_{B-EFI}-V_{F-BGD}-V_{D-FCHG}=2\times4\times4-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times4\times4-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times4\times2-\frac{1}{3}\times4\times2\times2=32-\frac{16}{3}-\frac{16}{3}-\frac{16}{3}=16$

方法三:建立空间直角坐标系,利用空间向量求点 F 到平面 BED 的距离后求三棱锥 $F-BED$ 的体积.(参照给分)

19.【解析】(1)用 A 表示事件"一回中,甲队赢球",则三个回合中,所有可能结果是,AAA,$A\bar{A}A$,$AA\bar{A}$,$\bar{A}AA$,$\bar{A}\bar{A}A$,$\bar{A}A\bar{A}$,$A\bar{A}\bar{A}$,$\bar{A}\bar{A}\bar{A}$,共 8 个结果,其中只有 $A\bar{A}A$,$A\bar{A}\bar{A}$,$\bar{A}AA$ 三个结果,甲队得 1 分.

设"在连续三个回合中,第一回合由甲队发球. 甲队得 1 分"为事件 B,则

$P(B)=\frac{3}{8}$,

所以,甲队得 1 分的概率为$\frac{3}{8}$. ………………………………………………………………………… 6 分

(2)打完四回合的所有可能结果是:$A\bar{A}AA$,$\bar{A}AAA$,$\bar{A}\bar{A}AA$,$\bar{A}A\bar{A}A$,$\bar{A}AA\bar{A}$,$A\bar{A}A\bar{A}$,$A\bar{A}\bar{A}A$,$\bar{A}\bar{A}A\bar{A}$,$\bar{A}A\bar{A}\bar{A}$,$A\bar{A}\bar{A}\bar{A}$,共 10 个结果,其中只有 $A\bar{A}AA$,$\bar{A}AAA$ 两个结果,甲队第四回合比乙队多 2 分,甲获胜.

设"甲队在第四回合获比赛胜利"为事件 C,则

$P(C)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$.

所以,甲队在第四回合获比赛胜利的概率为$\frac{1}{5}$. ……………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)∵$a=\frac{1}{2}$,∴$f(x)=e^x+\frac{1}{2}x^2-x$,∴$f(x)$的定义域是 R. ………………………………… 1 分

$f'(x)=e^x+x-1$,$(f'(x))'=e^x+1>0$,∴$f'(x)$是增函数. ……………………………………… 2 分

∵$f'(0)=0$,∴当 $x<0$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;当 $x>0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.

所以,$f(x)$有极小值,且 $f(x)_{极小}=f(0)=1$,$f(x)$没有极大值. …………………………………… 4 分

(2)设 $g(x)=\frac{1}{x}+\ln x$,则 $g'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=-(\frac{1}{x}-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$,

∴当 $0<x<1$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$在区间$(0,1)$上单调递减,

∴当 $0<x<1$ 时,$g(x)=\frac{1}{x}+\ln x$ 的值域是$(g(1),+\infty)$,即值域为$(1,+\infty)$. ……………………… 6 分

若 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$,设 $h(x)=f(x)-g(x)=e^x+a(x^2-2x)-\frac{1}{x}-\ln x$,∵$0<x<1$,∴$x-1<0$,则有 $h'(x)=e^x+2a(x-1)+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}>e^x+(x-1)+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=e^x+\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2}>0$,∴$h(x)$在区间$(0,1)$上单调递

增. $\because h(\frac{1}{e^2})=e^{e^{-2}}+a(\frac{1}{e^4}-\frac{2}{e^2})-e^2+2<e^{e^{-2}}-e^2+2<e-e^2+2<0$, $h(1)=$

$e-a-1>0$, $\therefore \exists x_1\in(\frac{1}{e^2},1)$, 使得 $h(x_1)=0$, 即 $f(x_1)=g(x_1)$. 与题意不合, 舍. ………………… 9 分

若 $a>\frac{1}{2}$, 则 $f'(0)=1-2a<0$, $f'(1)=e>0$, $\therefore \exists x_2\in(0,1)$, 使得 $f'(x_2)=0$. …………………… 10 分

$\because (f'(x))'=e^x+2a>0$, $\therefore f'(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增. $\therefore$ 当 $0<x<x_2$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x_2<x<1$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增. 要使 $f(x)<g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上恒成立, 由于 $f(0)=1<g(1)$, 则必须 $f(1)\leqslant g(1)=1$, 即 $e-a\leqslant 1$, 所以 $a\geqslant e-1$.

所以, 实数 a 的取值范围是 $[e-1,+\infty)$. ……………………………………………………………… 12 分

21.【解析】

(1) 当 P 为椭圆 E 的上顶点时, $|PF_1|=a$, $\therefore |MF_2|=|PM|=|MF_1|+a$,

又因为 $|MF_1|+|MF_2|=2a$, $\therefore |MF_1|=\frac{a}{2}$, $|PM|=|MF_2|=\frac{3a}{2}$,

所以 $\cos\angle MPN=\dfrac{PM^2+PF_2^2-MF_2^2}{2PM\cdot PF_2}=\dfrac{\left(\frac{3}{2}a\right)^2+a^2-\left(\frac{3}{2}a\right)^2}{2\cdot\frac{3}{2}a\cdot a}=\frac{1}{3}$,

所以 $\cos\angle MPN=1-2\sin^2\angle MPO=\frac{1}{3}$, $\therefore \sin\angle MPO=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore e=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………………………………………………………… (5 分)

(2) 方法一: 设 $P(x_0,y_0)$, $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$, $\overrightarrow{PF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1M}$, $\overrightarrow{PF_2}=\mu\overrightarrow{F_2N}$, $(\lambda,\mu>0)$

$\therefore (-c-x_0,-y_0)=\lambda(x_1+c, y_1)$, $(c-x_0,-y_0)=\mu(x_2-c,y_2)$,

$\therefore x_1=-\left(\frac{x_0+c}{\lambda}+c\right)$, $y_1=-\frac{y_0}{\lambda}$,

又 $\because$ 点 P 在椭圆上, 则 $\dfrac{\left(\frac{x_0+c}{\lambda}+c\right)^2}{a^2}+\dfrac{\left(\frac{y_0}{\lambda}\right)^2}{b^2}=1$,

$\therefore \left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)+\dfrac{2c(1+\lambda)x_0+c^2(1+\lambda)^2}{a^2}=\lambda^2$, 又 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$,

$\therefore 2c(1+\lambda)x_0+c^2(1+\lambda)^2=(\lambda^2-1)a^2=3c^2(\lambda^2-1)$,

$\therefore \lambda=\frac{x_0+2c}{c}$, 同理 $\mu=\frac{x_0-2c}{-c}=\frac{2c-x_0}{c}$ (用“$-c$”代替“c”),

$\therefore \lambda+\mu=4$, ………………………………………………………………………………… (10 分)

$\therefore \dfrac{S_{\triangle PF_1F_2}}{S_{\triangle PMN}}=\dfrac{|PF_1|\cdot|PF_2|}{|PM|\cdot|PN|}=\dfrac{\lambda\mu}{(\lambda+1)(\mu+1)}=\dfrac{\lambda\mu}{\lambda\mu+5}=\dfrac{1}{1+\frac{5}{\lambda\mu}}$,

又 $\lambda+\mu\geqslant 2\sqrt{\lambda\mu}$, $\therefore \lambda\mu\leqslant 4$, 所以 $\dfrac{S_{\triangle PF_1F_2}}{S_{\triangle PMN}}$ 的最大值为 $\frac{4}{9}$. ……………………………………… (12 分)

方法二: 设 $P(x_0,y_0)$, $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$, $\overrightarrow{PF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1M}$, $\overrightarrow{PF_2}=\mu\overrightarrow{F_2N}$,

$\therefore \begin{cases}x_0+\lambda x_1=-c(1+\lambda)\\ y_0+\lambda y_1=0\end{cases}$, $\begin{cases}x_0+\mu x_2=c(1+\mu)\\ y_0+\mu y_2=0\end{cases}$,

由 $\begin{cases}2x_0^2+3y_0^2=3b^2\\ 2x_1^2+3y_1^2=3b^2\end{cases}$, 得 $2x_0^2+3y_0^2-\lambda^2(2x_1^2+3y_1^2)=3b^2(1-\lambda^2)$,

即 $2(x_0+\lambda x_1)(x_0-\lambda x_1)+3(y_0+\lambda y_1)(y_0-\lambda y_1)=3b^2(1-\lambda^2)$，

$\therefore 2(-c-\lambda c)(x_0-\lambda x_1)=3b^2(1-\lambda^2)$，即 $x_0-\lambda x_1=\dfrac{3b}{\sqrt{2}}(\lambda-1)$，同理 $x_0-\lambda x_2=\dfrac{3b}{\sqrt{2}}(1-\mu)$，

$\therefore \lambda x_1-\mu x_2=\dfrac{3b}{\sqrt{2}}(1-\mu)+\dfrac{3b}{\sqrt{2}}(1-\lambda)=3c(2-\lambda-\mu)$，

又 $\because \lambda x_1-\mu x_2=-c(1+\lambda)-c(1+\mu)=c(-2-\lambda-\mu)$，

$\therefore c(-2-\lambda-\mu)=3c(2-\lambda-\mu)$，$\therefore \lambda+\mu=4$，以下同解法一.

22.【解析】(1)根据条件，圆 O_1 的标准直角坐标方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$，将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入该方程并化简得圆 O_1 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta+2\sin\theta$. …………………………………… 4 分

(2)$\because$ 圆 O_2 的极坐标方程为 $\rho=2R\sin\theta$，$\therefore$ 圆 O_1 和圆 O_2 都经过极点 O，设圆 O_1 和圆 O_2 另一个交点的为 (ρ,θ)，则 ρ,θ 满足方程组：

$\begin{cases}\rho=4\cos\theta+2\sin\theta,\\ \rho=2R\sin\theta.\end{cases}$ …………………………………… 6 分

由题意得，$\begin{cases}3\sqrt{2}=4\cos\theta+2\sin\theta,\\ 3\sqrt{2}=2R\sin\theta.\end{cases}$ 解得 $\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{2}}{2R}$，$\cos\theta=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}-\dfrac{3\sqrt{2}}{4R}$，

由 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 得，$\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2R}\right)^2+\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4}-\dfrac{3\sqrt{2}}{4R}\right)^2=1$，解得，$R=3$，或 $R=15$. ………… 9 分

所以，圆 O_2 的极坐标方程是 $\rho=6\sin\theta$，或 $\rho=30\sin\theta$. ………………………… 10 分

23.【解析】(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=\begin{cases}3, x<-1,\\ -2x+1, -1\leqslant x\leqslant 2,\\ -3, x>2.\end{cases}$ …………………………………… 1 分

当 $x<-1$ 时，由 $f(x)\geqslant 1$ 得，$x<-1$. …………………………………… 2 分

当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，由 $f(x)\geqslant 1$ 得，$-2x+1\geqslant 1$，解得 $-1\leqslant x\leqslant 0$. ………………… 3 分

当 $x>2$ 时，由 $f(x)\geqslant 1$ 得，$-3\geqslant 1$，不等式 $f(x)\geqslant 1$ 解集为 $\varnothing$. ………………… 4 分

综上所述，不等式 $f(x)\geqslant 1$ 的解集为 $(-\infty,0]$. ………………………………… 5 分

(2)$\because x\geqslant 1$，$\therefore f(x)=|2-ax|-x-1$. …………………………………… 6 分

由 $f(x)\leqslant x^2$ 得，$|2-ax|-x-1\leqslant x^2$，即 $|2-ax|\leqslant x^2+x+1$，

$\therefore -x^2-x-1\leqslant 2-ax\leqslant x^2+x+1$， …………………………………… 7 分

$\therefore \begin{cases}ax\geqslant -x^2-x+1,\\ ax\leqslant x^2+x+3.\end{cases}$ 在 $x\geqslant 1$ 时恒成立，即 $\begin{cases}a\geqslant -x+\dfrac{1}{x}-1,\\ a\leqslant x+\dfrac{3}{x}+1.\end{cases}$ 在 $x\geqslant 1$ 时恒成立. ……………… 8 分

由于 $x\geqslant 1$ 时，$y=-x+\dfrac{1}{x}-1$ 是减函数，最大值为 -1，$x+\dfrac{3}{x}+1\geqslant 2\sqrt{x\cdot\dfrac{3}{x}}+1=2\sqrt{3}+1$，等号在 $x=\sqrt{3}$ 时成立，所以，实数 a 的取值范围是 $[-1,2\sqrt{3}+1]$. ………………………………… 10 分