
2017 自主招生必刷真题 200 道

数学篇

爱尖子自主招生研究中心

内部资料

前言

自 2003 年 22 所高校首批启动自主选拔录取改革试点以来，截至 2017 年，试点高校达到 90 所（其中 77 所高校面向全国招生，13 所高校在本省内招生），通过教育部“阳光高考”平台累计公示自主选拔录取资格考生以逾 25 万人，实际录取超过 14 万人。目前，自主招生已经成为一个稳定的招生渠道，受到越来越多优秀考生的青睐，对于促进科学选拔人才起到了积极作用。

爱尖子作为学科竞赛和自主招生培训的专业品牌，在国际数学奥赛金牌和物理奥赛金牌选手的领衔下，长期致力于竞赛和自主招生培训的研发工作。2016 年，爱尖子学员在竞赛上取得了惊人的成绩，北京地区 53 名学员获得高中数学联赛一等奖（共 62 人），数学 IMO 国家队 6 名成员均曾参与爱尖子培训，1 人进入物理 IPhO 国家队，1 人进入 APhO 国家队。

2015 年，爱尖子成立自主招生研究中心，经过对近年来清华北大自主招生及博雅领军计划真题的分析与整理，甄选数学和物理学学科核心考点下的经典真题，按照专题分类后，编写了这份《2017 自主招生必刷真题 200 道》。帮助今年备战以清华北大等国内顶级高校为目标的同学节省备考时间，精准高效的突破笔试。为保证同学们在使用本题集时获得更好的体验，爱尖子特为本题集搭配详细解析，希望同学们经过 200 题的“洗刷”后，能在自主招生笔试上取得长足的进步。



目录

(一) 代数式变形	4
(二) 复数、平面向量	9
(三) 函数与方程	12
(四) 三角函数	21
(五) 概率	25
(六) 平面几何与立体几何	26
(七) 解析几何	36
(八) 数列	41
(九) 数论	45
(十) 排列、组合与二项式定理	48



(一) 代数式变形

001 (2016 年清华大学领军计划)

$$a, b, c \in \mathbb{R}, \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \text{ 那么}$$

A. $a_{\max} = \frac{2}{3}$ B. $(abc)_{\max} = 0$ C. $a_{\min} = -\frac{1}{3}$ D. $(abc)_{\max} = -\frac{4}{27}$

002 (2016 年清华大学领军计划)

x, y, z 均为非负实数, 满足 $(x + \frac{1}{2})^2 + (y + 1)^2 + (z + \frac{3}{2})^2 = \frac{27}{4}$, 则 $x + y + z$ 的最大值为 _____
 最小值为 _____.

003 (2016 年清华大学领军计划)

实数 $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$, 则 $x^2 + y^2$ 的最大值为 _____.

004 (2015 年北京大學博雅计划)

已知 $x^2 - y^2 + 6x + 4y + 5 = 0$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值是 _____.

005 (2016 年清华大学领军计划)

已知 x, y, z 满足 $x \geq y \geq z$, 且 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$, 则 ()

A. $(xyz)_{\max} = 0$ B. $(xyz)_{\min} = -\frac{4}{27}$ C. $Z_{\min} = -\frac{1}{3}$

006 (2016 年清华大学领军计划)



$$\int_0^{2\pi} (x-\pi)^{2n-1} (1+\sin^{2n} x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

007 (2016 年北京大学自主招生)

已知 $x+y+z=2016$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2016}$, 则 $(x-2016)(y-2016)(z-2016) = \underline{\hspace{2cm}}$

008 (2016 年北京大学博雅计划)

已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a, b, c , 有以下 4 个命题:

- ① 以 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 为边长的三角形一定存在;
- ② 以 a^2, b^2, c^2 为边长的三角形一定存在;
- ③ 以 $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{a+c}{2}$ 为边长的三角形一定存在;
- ④ 以 $|a-b|+1, |b-c|+1, |c-a|+1$ 为边长的三角形一定存在;

其中正确命题的个数为 ().

- A.2 B.3 C.3 D.前三个答案都不对

009 (2016 年北京大学博雅计划)

三个不同的实数 x, y, z 满足 $x^3 - 3x^2 = y^3 - 3y^2 = z^3 - 3z^2$, 则 $x+y+z$ 等于 ().

- A.-1 B.0 C.1 D.前三个答案都不对

010 (2016 年北京大学博雅计划)

已知 $a+b+c=1$, 则 $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1}$ 的最大值与最小值乘积属于区间 ().

- A.[10,11) B.[11,12) C.[12,13) D.前三个答案都不对



011(2015 年北京大学自主招生)

设实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 \leq 1$, 则 $|x^2 + 2xy - y^2|$ 的最大值为

- (A)3 (B) $\sqrt{3}$ (C)2 (D) $\sqrt{2}$

012(2015 年北京大学自主招生)

设集合 $A = \{x, xy, \lg(xy)\}$ 与集合 $B = \{0, |x|, y\}$ 相等, 则 $x + y$ 的值是

- (A)2 (B)-2 (C)1 (D)以上均不对

013(2015 年北京大学自主招生)

已知 $x > 1, y > 1$, 且 $(x-1)(y-1) = 2$, 则 $x + 2y$ 具有

- (A)最大值 4 (B)最小值 4 (C)最大值 7 (D)最小值 7

014 (2015 年北京大学自主招生)

设关于 x 的不等式 $(1+k^2)x \leq k^4 + 4$ 的解集为 A , 则对任意的实数 k , 一定成立的是

- (A) $2 \in A, 0 \in A$ (B) $2 \notin A, 0 \notin A$ (C) $2 \in A, 0 \notin A$ (D) $2 \notin A, 0 \in A$

015 (2015 年北京大学自主招生)

设 a, b, c 为两两不等的有理数, $N = (a-b)^{-2} + (b-c)^{-2} + (c-a)^{-2}$, 则 \sqrt{N} 一定是

- (A)整数 (B)有理数 (C)无理数 (D)前述三种关系均有可能

016 (2015 年北京大学自主招生)

已知实数 a, b, c 满足 $a + b + c > 0, ab + bc + ac > 0, abc > 0$, 则对 a, b, c 来说, 下面成立的是

- (A)全是正数 (B)至多有两个正数 (C)至多有一个正数 (D)全是负数



017(2015 年北京大学博雅计划)

已知 $a, b, c, d \in [2, 4]$, 则 $\frac{(ab+cd)^2}{(a^2+d^2)(b^2+c^2)}$ 的最大值与最小值之和是_____.

018(2015 年北京大学博雅计划)

已知 $|x^2 + px + q| \leq 2, \forall x \in [1, 5]$, 则不超过 $\sqrt{p^2 + q^2}$ 的最大整数是_____.

019(2015 年北京大学博雅计划)

设 $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, y = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, z = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, 且 $x + y + z = 1$, 则

$x^{2015} + y^{2015} + z^{2015}$ 的值是_____.

020 (2014 年北大全国优秀中学生体验营)

设 a, b, c 满足 $a + b + c = a^3 + b^3 + c^3 = 0$, n 为任意自然数. 求 $a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}$ 的值.

021 (2014 年北大等十一校联考自招)

已知正实数 x_1, x_2, \dots, x_n , 且 $x_1 x_2 \dots x_n = 1$. 证明: $\prod_{i=1}^n (\sqrt{2} + x_i) \geq (\sqrt{2} + 1)^n$.

022 (2014 年“华约”试题)

设 n 是正整数, 且 $x \leq n$. 证明: $n - n(1 - \frac{x}{n})^n e^x \leq x^2$.

023 (2013 年北大等十一校联考自招)

以 $\sqrt{2}$ 和 $1-\sqrt{2}$ 为两根的有理系数多项式的次数最小是 ()。

A.2 B.3 C.5 D.6

024 (2013 年北大等十一校联考自招)

若 $x^2 = 2y + 5, y^2 = 2x + 5 (x \neq y)$, 则 $x^3 - 2x^2y^2 + y^3$ 的值为 ()。

A.-10 B.-12 C.-14 D.以上都不对

025 (2013 年北大等十一校联考自招)

已知 a_1, a_2, a_3, \dots , 满足 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, 且 $|a_1 - 2a_2| = |a_2 - 2a_3| = |a_3 - 2a_4| = \dots = |a_{2012} - 2a_{2013}| = |a_{2013} - 2a_1|$. 求证: $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{2013} = 0$ 。

026 (2012 年清华暑期学校学业水平测试)

设选满足条件 $x^3 - \frac{1}{x^3} = 8\sqrt{5}$. 求 $x^2 + \frac{1}{x^3}$ 的值。

027 (2012 年清华暑期学校学业水平测试)

已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 三条边的边长.

(1) 证明: 存在三个正实数 x, y, z , 成立 $a = x + y, b = y + z, c = z + x$;

(2) 证明: $\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$.

028 (2012 年复旦千分考)

若 $x^3 + px + q = 0$ 的三个解成等比数列, 那么公比是多少?



029 (2012 年北大夏令营)

n 个球队打单循环赛, 第 i 支球队的胜场数为 x_i , 负场数为 y_i , 已知 $\sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n y_i^3$ 。求证: $\sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n y_i^4$ 。

030 (2012 年“华约”自招测试)

已知 $-6 \leq x_i \leq 10 (i=1, 2, \dots, 10)$, $\sum_{i=1}^{10} X_i = 50$. 当 $\sum_{i=1}^{10} X_i^2$ 取得最大值时, 在 x_1, x_2, \dots, x_{10} 这十个数中等于 -6 的数共有 ()。

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

(二) 复数、平面向量
031 (2016 年清华大学领军计划)

对于复数 $z (z \neq 0)$, $\frac{z}{10}$ 和 $\frac{40}{z}$ 的实部和虚部均为不小于 1 的正数, 则在复平面中, z 所对应的向量 \overrightarrow{OP} 的端点 P 运动所形成的图形面积为_____。

032 (2016 年清华大学领军计划)

O 在 $\triangle ABC$ 内, $S_{\triangle AOB} : S_{\triangle BOC} : S_{\triangle AOC} = 4 : 3 : 2$, $\overrightarrow{AO} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$ 则 $\lambda =$ _____, $\mu =$ _____.

033 (2016 年清华大学领军计划)

$z = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$, 求 $z^3 + \frac{z^2}{z^2 + z + 2} =$ _____.



034 (2016 年清华大学领军计划)

$|z^2 + 1| = |z|$, 求 $|z|$ 的范围和 $\arg z$ 的范围_____.

035 (2016 年北京大学博雅计划)

设 a, b, c 为实数, $a, c \neq 0$, 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个虚数根 x_1, x_2 满足 $\frac{x_1^2}{x_2}$ 为实数, 则 $\sum_{k=0}^{2015} \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^k$ 等于()

- A. 34650 B. 5940 C. 495 D. 前三个答案都不对

036 (2015 年北京大学自主招生)

设 z_1, z_2 为两个不相等的复数, $|z_1| = 2$, 则复数 $\frac{z_1 - z_2}{4 - \bar{z}_1 z_2}$ 的模是

- (A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 4 (D) $\frac{1}{4}$

037 (2015 年北京大学自主招生)

复平面上满足 $|z - i| - |z - 1| = 2$ 的复数 z 组成的曲线是

- (A) 抛物线 (B) 椭圆 (C) 双曲线 (D) 双曲线的一支

038 (2015 年北京大学博雅计划)

设 α 是复数, $\bar{\alpha}$ 表示共轭复数, 已知 $|\alpha - \bar{\alpha}| = 2\sqrt{3}$ 且 $\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}$ 是纯虚数, 则 $|\alpha|$ 的值为_____.

039 (2014 年“卓越”试题)

设 \vec{e}_1, \vec{e}_2 为平面上夹角为 $\theta (0 < \theta \leq \frac{\pi}{2})$ 的两个单位向量, O 为平面上的一个固定点, P 为平面上的任意一

点. 当 $\vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ 时, 定义 (x, y) 为点 P 的斜坐标. 现设 A, B 两点的斜坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 则



A, B 两点之间的距离为_____.

040 (2013 年复旦自招)

求 $(\sin 80^\circ + i \sin 10^\circ)^5$ 所对应的复数逆时针转 10° 的结果.

041 (2013 年北大等十一校联考自招)

如果模长为 1 的复数 A, B, C 满足 $A+B+C \neq 0$, 则 $\frac{AB+BC+CA}{A+B+C}$ 的模长=().

- A. $-\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 无法确定

042 (2012 年复旦千分考)

设 $z^5 + z - 1 = 0$, 且 $|z|=1$. 求 z 的值.

043 (2012 年“华约”自招测试)

向量 $a \neq e, |e|=1$. 若 $\forall t \in \mathbb{R}, |a-te| \geq |a+e|$, 则 ().

- A. $a \perp e$ B. $a \perp (a+e)$ C. $e \perp (a+e)$ D. $(a+e) \perp (a-e)$

044 (2012 年“华约”自招测试)

若复数 $\frac{\omega-1}{\omega+1}$ 的实部为 0, z 是复平面上对应 $\frac{1}{1+\omega}$ 的点, 则点 $Z(x, y)$ 的轨迹是 ().

- A. 一条直线 B. 一条线段 C. 一个圆 D. 一段圆弧



045 (2011 年“华约”自招测试)

设复数 z 满足 $|z| < 1$ 且 $|\bar{z} + \frac{1}{z}| = \frac{5}{2}$, 则 $|z| = (\quad)$.

- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

(三) 函数与方程

046 (2016 年清华大学领军计划)

对于函数 $y = x^2 - 1$ 和 $y = \ln x$, 下列说法正确的是 ()

- A. 二者在 $(1, 0)$ 处有公切线 B. 二者存在平行切线
C. 二者只有一个交点 D. 二者有两个交点

047 (2016 年北京大学博雅计划)

直线 $y = -x + 2$ 与曲线 $y = -e^{x+a}$ 相切, 则 a 的值为 ()

- A. -3 B. -2 C. -1 D. 前三个答案都不对

048 (2016 年北京大学博雅计划)

函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}, x = \frac{q}{p}, (p, q) = 1, p, q \in N^* \\ 0, x \notin Q \end{cases}$, 则满足 $x \in (0, 1)$ 且 $f(x) > \frac{1}{7}$ 的 x 的个数为 ()

- A. 12 B. 13 C. 14 D. 前三个答案都不对



049 (2016 年北京大学博雅计划)

$f(x)$ 是定义在 R 上的函数, 且对任意实数 x 均有 $2f(x) + f(x^2 - 1) = 1$, 则 $f(-\sqrt{2})$ 等于 ()。

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 前三个答案都不对

050 (2015 年北京大学自主招生)

函数 $y = \lg \frac{x+3}{10}$ 的图像可由函数 $y = \lg x$ 的图像经过怎样的变换得到?

- (A) 向左平移 3 个单位, 向上平移 1 个单位
(B) 向左平移 3 个单位, 向下平移 1 个单位
(C) 向右平移 3 个单位, 向上平移 1 个单位
(D) 向右平移 3 个单位, 向下平移 1 个单位

051 (2015 年北京大学博雅计划)

满足等式 $(1 + \frac{1}{x})^{x+1} = (1 + \frac{1}{2015})^{2015}$ 的整数 x 的个数是_____。

052 (2014 年北大等十一校联考自招)

已知函数 $f(x)$ 满足 $f(\frac{a+2b}{3}) = \frac{f(a)+2f(b)}{3}$, $f(1)=1, f(4)=7$, 则 $f(2014) = ()$ 。

- A. 4027 B. 4028 C. 4029 D. 4030

053 (2014 年北大等十一校联考自招)

设 x, y 均为负数, 且 $x + y = -1$, 那么 $xy + \frac{1}{xy}$ 有 ()。

- A. 最大值 $-\frac{17}{4}$ B. 最小值 $-\frac{17}{4}$ C. 最大值 $\frac{17}{4}$ D. 最小值 $\frac{17}{4}$



054 (2014 年北大等十一校联考自招)

使得函数 $f(x) = \arctan \frac{2-2x}{1+4x} + C$ 成为区间 $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ 上的奇函数的常数 C 为 ()。

- A. 0 B. $-\arctan 2$ C. $\arctan 2$ D. 不存在

055 (2014 年北大等十一校联考自招)

实系数二次函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足 $3f(x) + g(x) = 0$ 与 $f(x) - g(x) = 0$ 都只有一对重根。已知 $f(x) = 0$ 有两个不相等的实根，证明： $g(x) = 0$ 无实根。

056 (2014 年“卓越”试题)

当实数 m 变化时，不在任何直线 $2mx + (1-m^2)y - 4m - 4 = 0$ 上的所有点 (x, y) 形成的图形的面积为 ()。

- A. 2 B. 4 C. 2π D. 4π

057 (2014 年“卓越”试题)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x^2}, & x < -\frac{1}{2} \\ \ln(x+1), & x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$, $g(x) = x^2 - 4x - 4$. 设 b 为实数, 若存在实数 a , 使得 $f(a) + g(b) = 0$,

则 b 的取值范围为 ()。

- A. $[-1, 5]$ B. $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$ C. $[-1, +\infty)$ D. $(-\infty, +5]$



058 (2014 年“卓越”试题)

已知 $f(x)$ 为 R 上的可导函数, 且对 $\forall x_0 \in R$, 有 $0 < f'(x+x_0) - f'(x_0) < 4x(x > 0)$.

(1) 对 $\forall x_0 \in R$, 证明: $f'(x_0) < \frac{f(x+x_0) - f(x_0)}{x} (x > 0)$;

(2) 若 $|f(x)| \leq 1, x \in R$, 证明: $|f'(x)| \leq 4$.

059 (2014 年“华约”试题)

对于函数 $f(x)$, 记 $f^{-1}(x)$ 是它的反函数. 定义 $(f \circ g)(x)$ 是关于函数 f 和 g 的复合函数, 即

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ 。证明:

(1) $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$;

(2) 设 $F(x) = f(-x), G(x) = f^{-1}(-x)$, 若 F 与 G 互为反函数, 则 $f(x)$ 为奇函数。



060 (2013 “卓越” 试题)

(理科) 设 $x > 0$.

(1) 证明: $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$;

(2) 若 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2e^y$, 证明: $0 < y < x$.

061 (2013 年清华大学夏令营)

已知函数 $f(x) = x \ln x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上的最小值;

(2) 若存在 $x \in [\frac{1}{e}, e]$ (e 为自然对数的底数, 且 $e = 2.7182828\dots$), 使不等式 $2f(x) \geq -x^2 + ax - 3$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

062 (2013 年复旦自招)

$x^2 = x \sin x + \cos x$ 有几个实数解?

063 (2013 年复旦自招)

设 $e^x = 4 - x$, $\ln x = 4 - x$ 两个方程的解分别为 x_1, x_2 . 求 $x_1 + x_2$.



064 (2012 年“卓越”自招试题)

已知函数 $f(x) = \frac{ax^2+1}{bx}$, 其中 a 是非零实数, $b > 0$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $a > 0, |x_i| > \frac{1}{\sqrt{a}} (i=1,2,3)$, 且 $x_1 + x_2 > 0, x_2 + x_3 > 0, x_3 + x_1 > 0$, 证明:

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) > \frac{2\sqrt{a}}{b};$$

(3) 若 $f(x)$ 有极小值 f_{\min} , 且 $f_{\min} = f(1) = 2$, 证明: $|f(x)|^n - |f(x^n)| \geq 2^n - 2 (n \in \mathbb{N}^*)$.

065 (2012 年“华约”自招测试)

已知 $f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 求证: 当 n 为偶数时, $f_n(x) = 0$ 无解; 当 n 为奇数时,

$f_n(x) = 0$ 有唯一解 x_n 且 $x_{n+2} < x_n$.

066 (2011 年北大等十三校联考自招)

求 $f(x) = |x-1| + |2x-1| + \dots + |2011x-1|$ 的最小值.

067 (2011 年北大夏令营)

是否存在定义域为全体实数的实值函数 $f(x)$, 使得 $f(-n^2 + 3n + 1) = f(n)^2 + 2$, 对于任意整数 n 均成立?



068(2015 年北京大学自主招生)

设函数 $f(x)$ 是偶函数, 且当 $x > 0$ 时 $f(x)$ 是单调函数, 则满足 $f(x) = f\left(\frac{x+3}{x+4}\right)$ 的所有 x 之和是

- (A) -3 (B) 3 (C) -8 (D) 8

069 (2013 年北大暑期体验营)

设 $f(x) = 2x^2 - ax + 7$, 已知存在 $\varphi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, 满足 $f(\sin \varphi) = f(\cos \varphi)$. 求参数 a 的取值范围.

070 (2013 年“华约”试题)

设函数 $f(x) = (1-x)e^x - 1$.

- (1) 证明: 当 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$;
- (2) 令 $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1, x_1 = 1$, 证明: 数列 $\{x_n\}$ 递减且 $x_n > \frac{1}{2^n}$.

071 (2012 年“卓越”自招试题)

函数 $f(\theta) = \frac{\sin \theta}{2 + \cos \theta}$ ($\theta \in R$) 的值域为_____.

072 (2012 年清华暑期学校学业水平测试)

设 $0 < a < b, f(x) = \frac{1}{x}$, 过 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 两点的直线方程为 $y = cx + d$.

- (1) 求证: 当 $a \leq x \leq b$ 时, $cx + d \geq \frac{1}{x}$;
- (2) 证明: $\ln(1+n) + \frac{n}{2(n+1)} \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

073 (2016 年清华大学领军计划)


$f(x) = (x^2 + a)e^x$ 有最小值, 则 $x^2 + 2x + a = 0$ 的解的个数为_____

074 (2016 年北京大学博雅计划)

若方程 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的根也是方程 $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ 的根, 则 $a + b - 2c$ 的值为 ().

- A.-13 B.-9 C.-5 D.前三个答案都不对

075 (2016 年北京大学博雅计划)

方程组 $\begin{cases} x + y^2 = z^3 \\ x^2 + y^3 = z^4 \\ x^3 + y^4 = z^5 \end{cases}$, 的实数解组数为 ().

- A.5 B.6 C.7 D.前三个答案都不对

076 (2016 年北京大学博雅计划)

方程 $(\frac{x^3 + x}{3})^3 + \frac{x^3 + x}{3} = 3x$ 的所有实根的平方和等于 ().

- A.0 B.2 C.4 D.前三个答案都不对

077 (2015 年北京大学自主招生)

设关于 x 的方程 $\sin^2 x + 4m \sin x + 3 - m = 0$ 总有解, 则实数 m 的取值范围是

- (A) $m \geq -\frac{4}{3}$ (B) $m \leq \frac{4}{5}$ (C) $-\frac{4}{3} \leq m \leq 1$ 或 $\frac{3}{4} \leq m \leq \frac{4}{5}$ (D) 以上均不对

078 (2014 年北大全国优秀中学生体验营)

设关于 x 的方程 $x^2 - ax + 2a - 2 = 0$ 在区间 $[0, \frac{3}{2}]$ 内有根, 求实数 a 的取值范围.

079 (2014 年北大全国优秀中学生体验营)



设 a 、 b 、 c 是实数，方程 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 有三个正根。证明 $2a^3 + 9c \leq 7ab$ ，并且等号成立当且仅当这三个正根相等。

080 (2014 年“卓越”试题)

$|x|^3 - 2x^2 + 1 < 0$ 的解集为 ()。

A. $(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, -1) \cup (1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ B. $(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$

C. $(-\infty, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty)$ D. $(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1)$

081 (2012 年北大夏令营)

方程 $ax^2 + (a+4)x + a+1 = 0$ 有且仅有一个质根。求 a 的范围。

082 (2012 年北大等十一校联考自招)

关于 x 的方程 $\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}} = 1$ 的实根的个数为 ()。

A. 1 B. 3 C. 0 D. 无穷多



(四) 三角函数

083 (2016 年清华大学领军计划)

下列计算正确的是

A. $\frac{\tan 1^\circ + \tan 61^\circ + \tan 121^\circ}{\tan 1^\circ \tan 61^\circ \tan 121^\circ} = 3$

B. $\frac{\tan 1^\circ + \tan 61^\circ + \tan 121^\circ}{\tan 1^\circ \tan 61^\circ \tan 121^\circ} = -3$

C. $\tan 1^\circ \tan 61^\circ + \tan 1^\circ \tan 121^\circ + \tan 61^\circ \tan 121^\circ = 3$

D. $\tan 1^\circ \tan 61^\circ + \tan 1^\circ \tan 121^\circ + \tan 61^\circ \tan 121^\circ = -3$

084 (2016 年清华大学领军计划)

已知 $\tan 4\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 求值 $\frac{\sin 4\alpha}{\cos 8\alpha \cos 4\alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha \cos 2\alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos 2\alpha \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

085 (2016 年清华大学领军计划)

下列能构成唯一 $\triangle ABC$ 的是 ()

A. $a = 1, b = 2, c \in \mathbb{Z}$

B. $A = 150^\circ, a \sin A + c \sin C + \sqrt{2}a \sin C = b \sin B$

C. $\cos A \sin B \cos C + \cos(B+C) \cos B \sin C = 0, C = 60^\circ$

D. $a = \sqrt{3}, b = 1, A = 60^\circ$



086 (2016 年北京大学博雅计划)

$\cos \frac{\pi}{11} \cos \frac{2\pi}{11} \dots \cos \frac{10\pi}{11}$ 的值为 ()

- A. $-\frac{1}{16}$ B. $-\frac{1}{32}$ C. $-\frac{1}{64}$ D. 前三个答案都不对

087(2015 年北京大学自主招生)

$\tan 10^\circ \tan 20^\circ + \tan 20^\circ \tan 60^\circ + \tan 60^\circ \tan 10^\circ$ 的值是

- (A) $3 \tan 10^\circ$ (B) 1 (C) 2 (D) $2\sqrt{3}$

088(2015 年北京大学自主招生)

设角 α, β, γ 均大于 0, 且 $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 则 $\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2}$ 的值一定

- (A) $= \frac{\pi}{2}$ (B) $> \frac{\pi}{2}$ (C) $< \frac{\pi}{2}$ (D) 前述三种关系均有可能

089 (2015 年北京大学博雅计划)

已知 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 对任意实数 a , 函数 $y = \cos^2 x - 2a \cos x + 1$ 的最小值记为 $g(a)$, 则当 a 跑遍所有实数时, $g(a)$

的最大值是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 前三个答案都不对

090 (2014 年北大全国优秀中学生体验营)

证明: 若 $n \geq 2$ 为自然数, t 为实数且 $\sin \frac{t}{2} \neq 0$, 则 $\sum_{k=1}^n (1 + \sum_{p=1}^{k-1} 2 \cos pt) = (\sin \frac{nt}{2} / \sin \frac{t}{2})^2$ 。



091 (2014 年北大等十一校联考自招)

证明: $\tan 3^\circ$ 是无理数。

092 (2014 年“卓越”试题)

设 $a \in R$, 函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin 2x \cos \alpha + \sqrt{2} \cos 2x \sin \alpha - \sqrt{2} \cos(\alpha + 2x) + \cos \alpha (x \in R)$.

(1) 若 $\alpha \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, 求 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值;

(2) 若 $f(x) = 3$, 求 α 与 x 的值.

093 (2014 年“华约”试题)

已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) \sin(x + \frac{\pi}{4}) - 2a \sin x + b (a > 0)$ 的最大值为 1, 最小值为 -4, 求 a, b 的值。

094 (2013 年“卓越”试题)

(理科) 在 $\triangle ABC$ 中, 三个内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知

$$(a - c) \sin A + \sin C = a - b.$$

(1) 求角 C 的大小;

(2) 求 $\sin A \cdot \sin B$ 的最大值.

095 (2013 年北大等十一校联考自招)

对于任意的 θ , 求 $32 \cos^6 \theta - \cos 6\theta - 6 \cos 4\theta - 15 \cos 2\theta$ 的值。



096 (2012 年“卓越”自招试题)

设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ，其中 $\omega > 0$ ， $\varphi \in \mathbb{R}$ 。若存在常数 $T(T < 0)$ ，使对任意的 $x \in \mathbb{R}$ ，有 $f(x+T) = Tf(x)$ ，则 ω 可取到的最小值为_____。

097 (2012 年清华暑期学校学业水平测试)

记 $\triangle ABC$ 的三个内角为 A, B, C 。试问：是否存在满足条件 $\cos \angle A + \cos \angle B = \cos \angle C$ 的非等腰三角形？请给出证明。

098 (2012 年北大夏令营)

设 $f_k(x) = \frac{1}{k}(\sin^2 x - \cos kx)$ 。求 $m, n \in \mathbb{N}^*$ 且 $m > n$ ，使 $f_m(x) - f_n(x)$ 为恒定常数。

099 (2012 年北大等十一校联考自招)

(理科) 若关于 x 的方程 $\sin 2x \cdot \sin 4x - \sin x \cdot \sin 3x = a$ 在 $x \in [0, \pi)$ 时有唯一的解，求实数 a 的值。

100 (2011 年“华约”自招测试)

已知 $\triangle ABC$ 不是直角三角形。

(1) 证明： $\tan \angle A + \tan \angle B + \tan \angle C = \tan \angle A \tan \angle B \tan \angle C$ ；

(2) 若 $\sqrt{3} \tan \angle C - 1 = \frac{\tan \angle B + \tan \angle C}{\tan \angle A}$ ，且 $\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C$ 的倒数成等差数列，求

$\cos \frac{\angle A - \angle C}{2}$ 的值。



（五）概率

101（2016 年清华大学领军计划）

甲，乙，丙，丁四个人进行网球赛规定甲乙一组，丙丁一组先打，胜者再打决胜局，四人相互对战，对战时胜率如下，求甲获胜的概率为_____.

选手 \ 对手	甲	乙	丙	丁
甲		0.3	0.3	0.8
乙	0.7		0.6	0.4
丙	0.7	0.4		0.5
丁	0.2	0.6	0.5	

102（2014 年“卓越”试题）

已知 $0 < a < 1$ ，分别在区间 $(0, a)$ 和 $(0, 4-a)$ 内任取一个数，且取出的两数之和小于 1 的概率为 $\frac{3}{16}$ ，则 $a =$ _____.

103（2014 年“华约”试题）

一场比赛在甲、乙之间进行，采取五局三胜制。已知甲赢一局的概率为 $p (p > \frac{1}{2})$ ，设甲赢得比赛的概率为 q 。求 $q - p$ 的最大值及取最大值时的 p 值。

104（2012 年清华暑期学校学业水平测试）

某企业生产的电子元件的次品率为 10%。为保证质量，检测部门对该产品进行抽查，每次抽检 1 件。如果抽到次品则抽查结束，否则继续抽查。抽查产品件数的数学期望与方差分别为（ ）。

- A. $E(\xi) = 10, D(\xi) = 90$ B. $E(\xi) = 10, D(\xi) = 9$ C. $E(\xi) = 9, D(\xi) = 90$ D. $E(\xi) = 9, D(\xi) = 9$



105 (2012 年“华约”自招测试)

设某系统中每个元件正常工作的概率都是 $p(0 < p < 1)$, 各个元件正常工作的事件相互独立. 如果该系统中有多于一半的元件正常工作, 系统就能正常工作. 系统正常工作的概率称为系统的可靠性.

- (1) 该系统配置有 $2k-1$ 个元件, k 为正整数, 求该系统正常工作概率的表达式;
- (2) 现为改善 (1) 中系统的性能, 拟增加两个元件, 试讨论增加两个元件后, 能否提高系统的可靠性.

106 (2011 年清华夏令营)

北京采用摇号买车的方式. 有 20 万人摇号, 每个月有 2 万个名额.

- (1) 如果每个月摇上的退出摇号, 没有摇上的继续进入下月摇号, 则平均每个人摇上需要多长时间?
- (2) 如果每个月都有 2 万人补充进摇号队伍, 则平均每个人摇上需要多长时间?
- (3) 如果交管所可以控制摇上号的人的比例, 使其成为每个季度第一个月摇上的概率为 $\frac{1}{10}$, 第二个月为 $\frac{1}{9}$, 第三个月为 $\frac{1}{8}$, 则平均每个人摇上需要多长时间?

(六) 平面几何与立体几何

107 (2016 年清华大学领军计划)

AB 为圆 O 的一条弦, P 为圆 O 上一点, $OC \perp AB, PA \cap OC = M, PB$ 交 OC 延长线于 N .

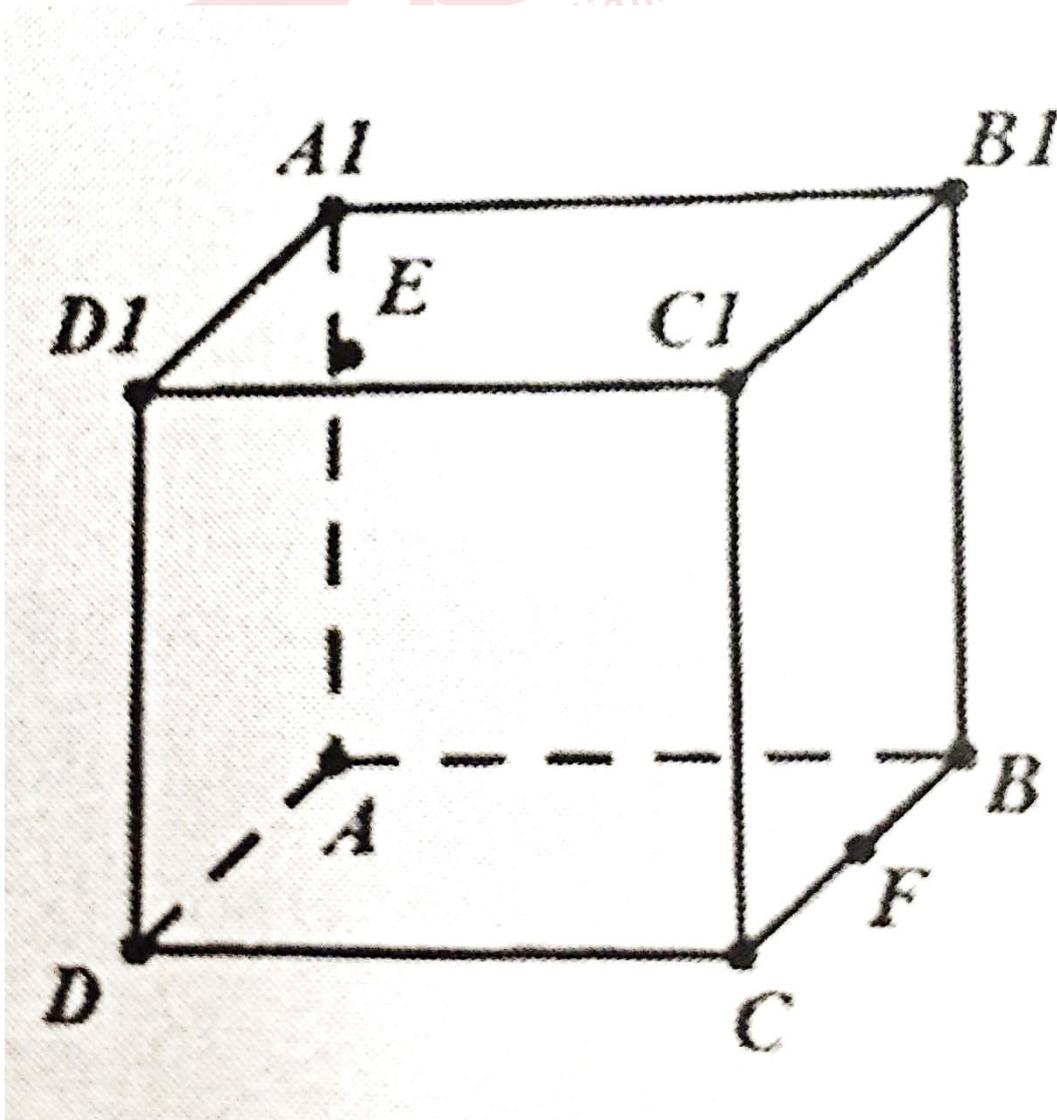
A. $OMBP$ 共圆 B. $AMBN$ 共圆 C. $AOPN$ 共圆



108 (2016 年清华大学领军计划)

F 为 BC 中点 $A_1E = \frac{1}{4}AA_1$, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 1, 中心为 O , 问 V_{O-BEF}

- A. $\frac{17}{144}$ B. $\frac{17}{38}$ C. $\frac{11}{144}$ D. $\frac{11}{38}$



109 (2016 年清华大学领军计划)

在正三棱锥 $P-ABC$ 中, ΔABC 边长为 1, 设 P 到平面 ABC 距离为 h . 当 h 趋近于正无穷时, 异面直线 AB 与 CP 之间的距离为_____.



110 (2016 年北京大学自主招生)

四个半径为 1 的球体两两外切，则外切正四面体体积为_____。

111 (2016 年北京大学博雅计划)

设 AB, CD 是 $\odot O$ 的两条垂直直径，弦 DF 交 AB 于点 E ， $DE = 24, EF = 18$ ，则 OE 等于 ()。

- A. $4\sqrt{6}$ B. $5\sqrt{3}$ C. $6\sqrt{2}$ D. 前三个答案都不对

112 (2016 年北京大学博雅计划)

设 A 是以 BC 为直径的圆上的一点， D, E 是线段 BC 上的点， F 是 CB 延长线上的点，已知 $BF = 4, BD = 2, BE = 5, \angle BAD = \angle ACD, \angle BAF = \angle CAE$ ，则 BL 的长为 ()。

- A. 11 B. 12 C. 13 D. 前三个答案都不对

113 (2016 年北京大学博雅计划)

两个圆内切于 K ，大圆的弦 AB 与小圆切于 L ，已知 $AK : BK = 2 : 5, AL = 10$ ，则 BL 的长为 ()。

- A. 24 B. 25 C. 26 D. 前三个答案都不对

114 (2016 年北京大学博雅计划)

在圆内接四边形 $ABCD$ 中， $BD = 6, \angle ABD = \angle CBD = 30^\circ$ ，则四边形 $ABCD$ 的面积等于 ()。

- A. $8\sqrt{3}$ B. $9\sqrt{3}$ C. $12\sqrt{3}$ D. 前三个答案都不对



115 (2015 年北京大学自主招生)

在长方形 $ABCD$ 中, 过对角线 AC 的中点 O 做 AC 的垂线交 AB 于 E , 交 CD 于 F , 设 $AB = a$, $BC = b$, 则 EF 的长是

- (A) $\frac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2}$ (B) $\frac{b}{a}\sqrt{a^2+b^2}$ (C) $\frac{a}{2b}\sqrt{a^2+b^2}$ (D) $\frac{b}{2a}\sqrt{a^2+b^2}$

116 (2015 年北京大学自主招生)

下面四个命题: (1) 分别在两个平面内的两条直线是异面直线; (2) 和两条异面直线都垂直的直线有且仅有一条; (3) 和两条异面直线都相交的两条直线必定异面; (4) 与同一条直线都异面的两条直线也是异面直线; 则其中真命题的个数是

- (A)0 (B)1 (C)2 (D)3

117 (2015 年北京大学博雅计划)

在内切圆半径为 1 的直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, 内切圆与 BC 切于 D , 则 A 到 D 的距离 AD 等于 ()

- A. $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ B. $\sqrt{3+3\sqrt{3}}$ C. $\sqrt{3+4\sqrt{3}}$ D. 前三个答案都不对

118 (2015 年北京大学博雅计划)

正方形 $ABCD$ 内一点 P 满足 $AP:BP:CP = 1:2:3$, 则 $\angle APB$ 等于 ()

- A. 120° B. 135° C. 150° D. 前三个答案都不对

119 (2015 年北京大学博雅计划)

在凸四边形 $ABCD$ 中, $BC = 4$, $\angle ADC = 60^\circ$, $\angle BAD = 90^\circ$, 四边形 $ABCD$ 的面积等于 $\frac{AB \cdot CD + BC \cdot AD}{2}$, 则 CD 的长为 () (精确到小数点后 1 位)

- A. 6.9 B. 7.1 C. 7.3 D. 前三个答案都不对



120 (2014 年北大全国优秀中学生体验营)

顶点为 A 的等腰 $\triangle ABC$ 的 $\angle B$ 的平分线交 AC 于 D, 已知 $BC=BD+AD$. 求 $\angle A$ 的度数.

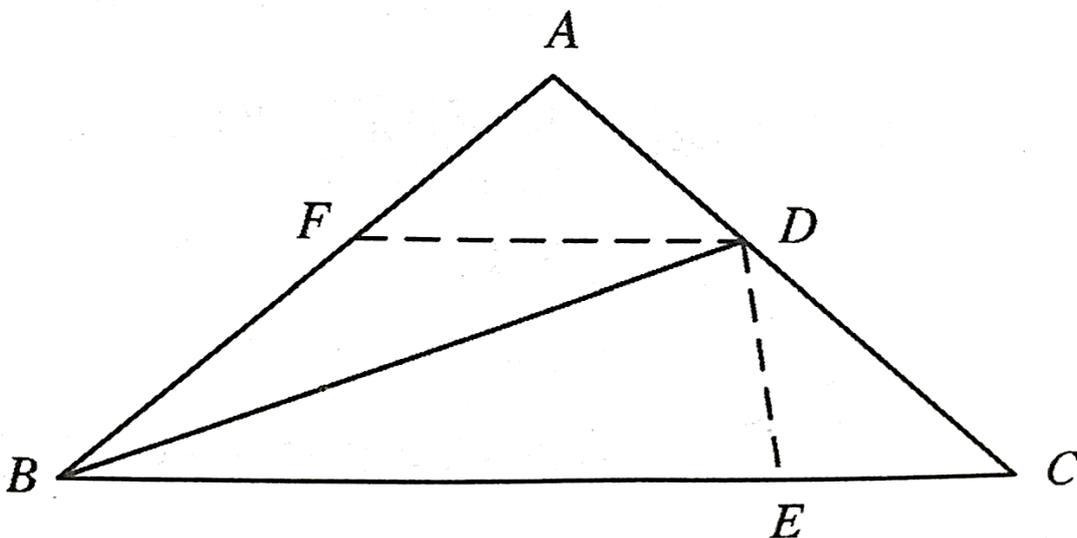


图 2

121 (2014 年“卓越”试题)

在三棱柱 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 底面 ABC , $AC \perp BC$. 若 $AC=2$, 二面角 $P-BC-A$ 的大小为 60° , 三棱

锥 $P-ABC$ 的体积为 $\frac{4}{3}\sqrt{6}$, 则直线 PB 与平面 PAC 所成角的正弦值为 ().

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$



122 (2013 年“卓越”试题)

如图 2 所示, AE 是 $\odot O$ 的切线, A 是切点, AD 垂直 OE 于点 D , 割线 EC 交 $\odot O$ 于 B, C 两点. 设 $\angle ODC = \alpha, \angle DBC = \beta$, 则 $\angle OEC =$ _____ (用 α, β 表示).

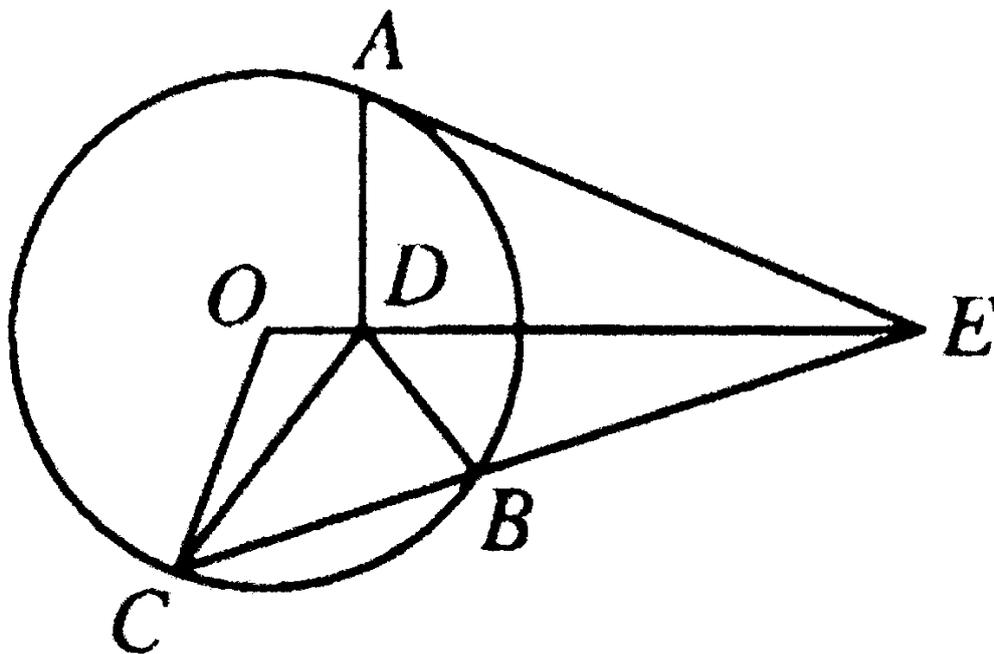


图 2

123 (2013 年复旦自招)

假设地球半径为 R . 如果宇航员能看到地球表面的 25%, 那么他离地多高?

124 (2013 年复旦自招)

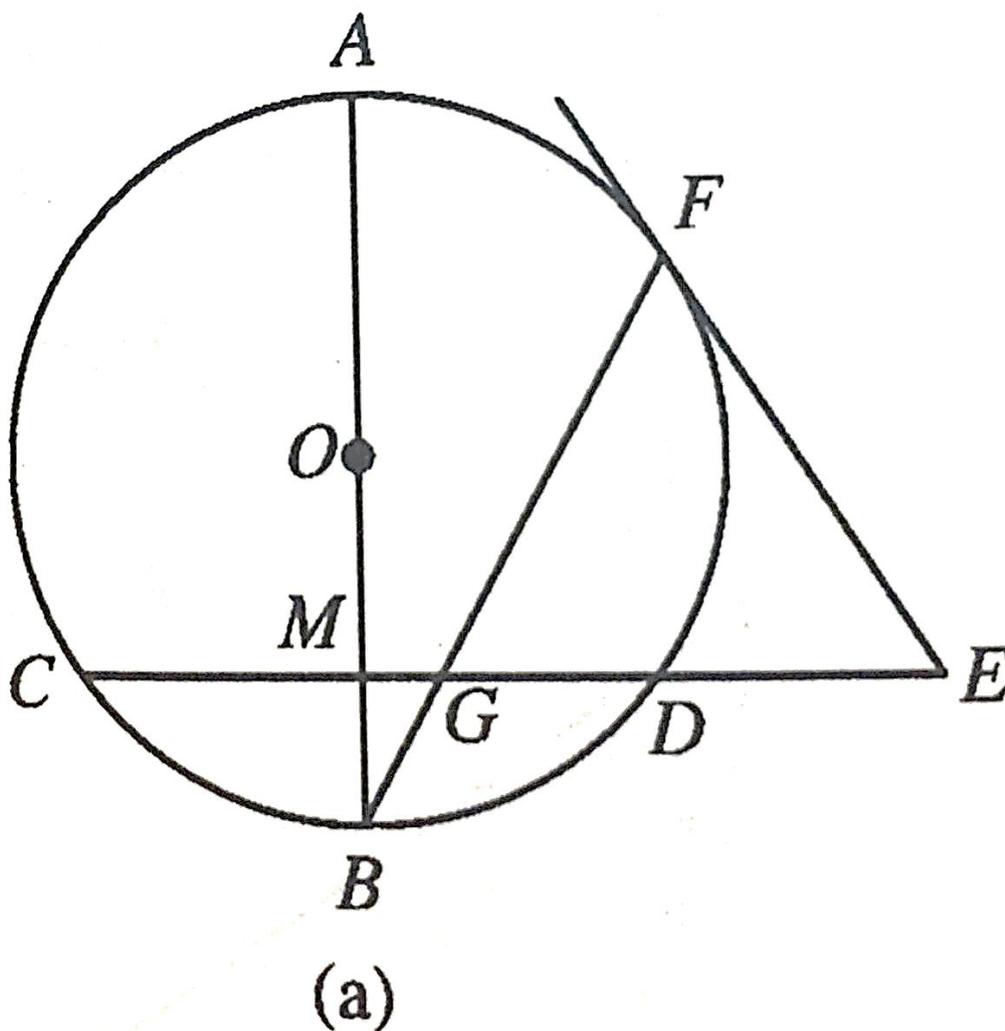
设有一个棱长为 1 的正方体, 有两个球内切于该正方体, 这两个球也相切. 问半径是多少时, 两球加起来的体积最大?



125 (2012 年“卓越”自招试题)

如图 2 (a) 所示, AB 是 $\odot O$ 的直径, 弦 CD 垂直 AB 于点 M , E 是 CD 延长线上的一点, $AB=10, CD=8, 3ED=4OM$, EF 是 $\odot O$ 的切线, F 是切点, BF 与 CD 相交于点 G .

- (1) 求线段 EG 的长;
- (2) 连接 DF , 判断 DF 是否平行于 AB , 并证明你的结论.



126 (2012 年清华暑期学校学业水平测试)

如图 1 所示, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为矩形, 各棱及底边 BC, DA 的长均为 a , AB, CD 的长为 $\sqrt{2}a$, 过底面对角线 AC 作与 PB 平行的平面交 PD 于 E .

- (1) 求二面角 $E-AC-D$ 的大小;
- (2) 记 AC 与 BD 的交点为 O , 求 EO 与底面 $ABCD$ 所成角的大小;
- (3) 求 DO 与平面 EAC 所成角的大小.

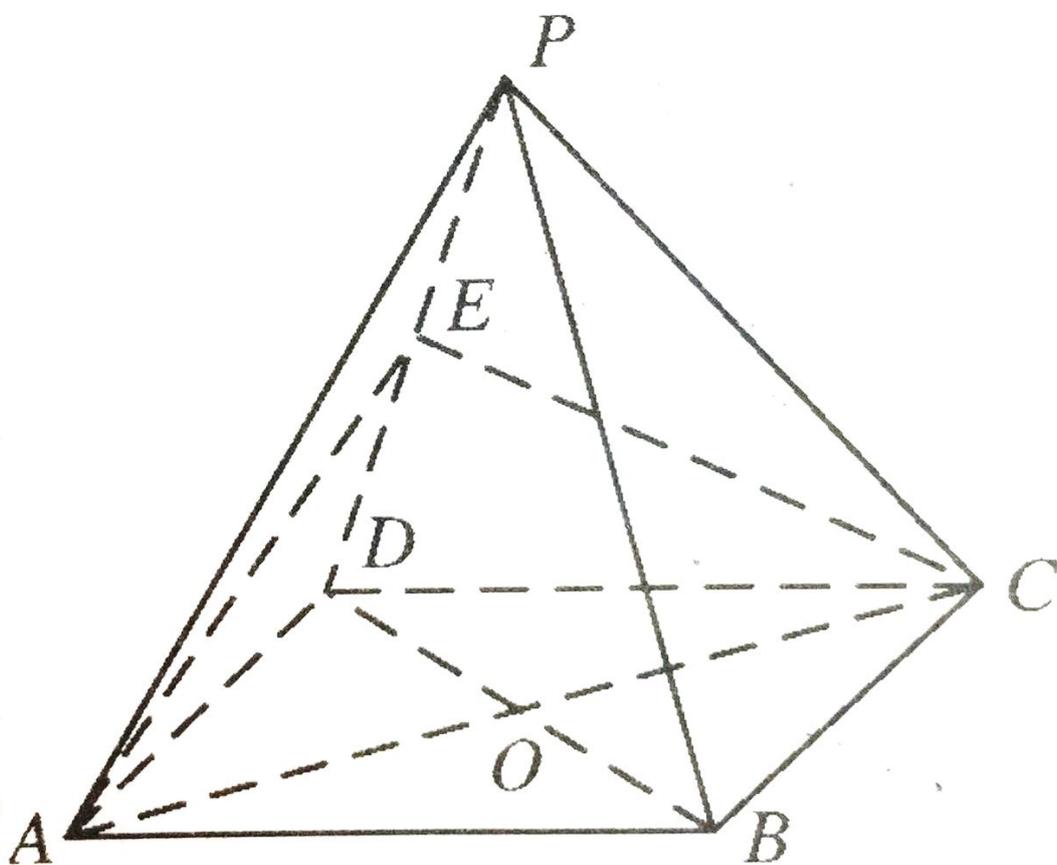


图 1



127 (2012 年“华约”自招测试)

已知三棱锥 $S-ABC$ 的底面 ABC 为正三角形，点 A 在侧面 SBC 上的射影 H 是 $\triangle SBC$ 的垂心，二面角 $H-AB-C$ 为 30° ，且 $SA=2$ ，则此三棱锥的体积为 ()。

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{3}{4}$



128 (2011 年北大夏令营)

如图 1 所示, 对于正 n 边形 $A_1A_2A_3\dots A_n$, 延长 A_kA_{k+1} 至 B_{k+1} (记 $A_{n+1} = A_1, B_{n+1} = B_1$), 使得 $\triangle A_kB_kB_{k+1}$ 的周长相等, 求证: 所有三角形全等。

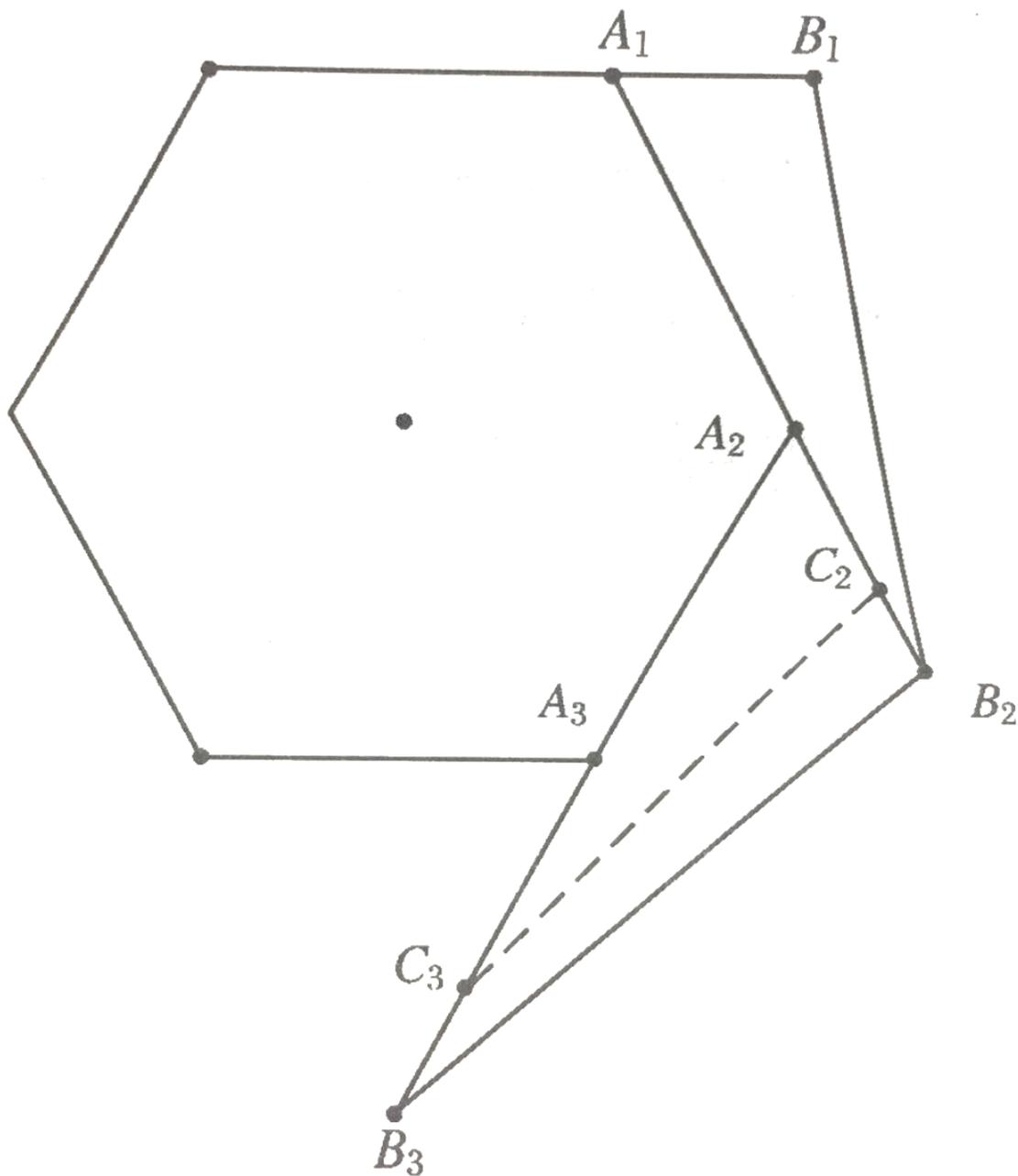


图 1



129 (2011 年“华约”自招测试)

将一个正 11 边形用对角线划分为 9 个三角形, 这些对角线在正 11 边形内两两不相交, 则 ().

- A. 存在某种分法, 所分出的三角形都不是锐角三角形
- B. 存在某种分法, 所分出的三角形恰有锐角三角形
- C. 存在某种分法, 所分出的三角形至少有三个锐角三角形
- D. 任何一种分法所分出的三角形都恰有一个锐角三角形

(七) 解析几何**130(2015 年北京大学自主招生)**

已知直线 $\ell_1: 3x - 2y = -4$ 和 $\ell_2: 5x + 6y = 2$ 的交点为 P , 则过点 P 且与直线 $\ell_3: 3x - 4y = -5$ 平行的直线方程是

- (A) $56x + 42y = 79$ (B) $21x - 28y = -41$ (C) $56x + 42y = -79$ (D) $21x - 28y = 41$

131(2015 年北京大学自主招生)

设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A, B 两点, 与 y 轴交于 C 点, 若直线 AC 与 BC 垂直, 则 ac 的值是

- (A) -1 (B) -2 (C) -3 (D) 不能确定

132 (2015 年北京大学博雅计划)

椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条切线与 x 轴、 y 轴分别交于点 A, B , 则 $\triangle AOB$ 面积的最小值是_____.

133 (2015 年北京大学博雅计划)

平面区域 $\{(x, y) | \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} \geq xy\}$ 的面积为_____.



134 (2014 年“卓越”试题)

已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 的两条渐近线的斜率之积为 -3 , A, B 分别为左支和右支上的动点.

- (1) 若 A, B 之间的直线斜率为 1 , 且直线 AB 经过点 $D(0, 5a)$, $\overline{AD} = \lambda \overline{DB}$, 求实数 λ 的值;
- (2) 若点 M 为点 A 关于 x 轴的对称点, 直线 AB 交 x 轴于点 P , 直线 BM 交 x 轴于点 Q , 点 O 为坐标原点, 求证: $OP \cdot OQ = a^2$.

135 (2014 年“华约”试题)

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 过椭圆上一点 M 作圆 $x^2 + y^2 = b^2$ 的两条切线, 切点为 P, Q , 设直线

PQ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 E 和 F . 求 $\triangle EOF$ 面积的最小值.

136 (2013 “卓越”试题)

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1 (a > 2)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 斜率为 k 的直线 l 过点 $E(0, 1)$, 且与椭圆相交于 C, D 两点.

- (1) 求椭圆方程;
- (2) 若直线 l 与 x 轴相交于点 G , 且 $\overline{GC} = \overline{DE}$, 求 k 的值;
- (3) 设 A 为椭圆的下顶点, k_{AC}, k_{AD} 分别为直线 AC, AD 的斜率, 证明: 对任意的 k , 恒有

$$k_{AC} \cdot k_{AD} = -2.$$



137 (2013 年清华大学夏令营)

设直线 $l: y = k(x+1)$ 与椭圆 $x^2 + 3y^2 = a^2 (a > 0)$ 相交于 A, B 两个不同的点, 于 x 轴相交于点 C , 记 O 为坐标原点.

(1) 证明: $a^2 > \frac{3k^2}{1+3k^2}$;

(2) 若 $\overline{AC} = 2\overline{CB}$, 求 $\triangle OBC$ 的面积取得最大值时的椭圆方程.

138 (2013 年复旦自招)

设 $x^2 + y^2 = 1$, 点 $P(2,0), Q$ 是圆上的动点, M 是 $\angle POQ$ 的角平分线和 PQ 的交点. 求 M 的轨迹.

139 (2013 年复旦自招)

过 $x^2 - y^2 = 1$ 上的点 P 作 $x + y - 2 = 0$ 的垂线, 垂足为 Q . 求 PQ 的中点轨迹.



140 (2013 年北大暑期体验营)

函数 $y = x^2 + ax + b$ 的图像与坐标轴交于三个不同的点 A, B, C , 已知 $\triangle ABC$ 的外心在直线 $y = x$ 上。求 $a + b$ 的值。

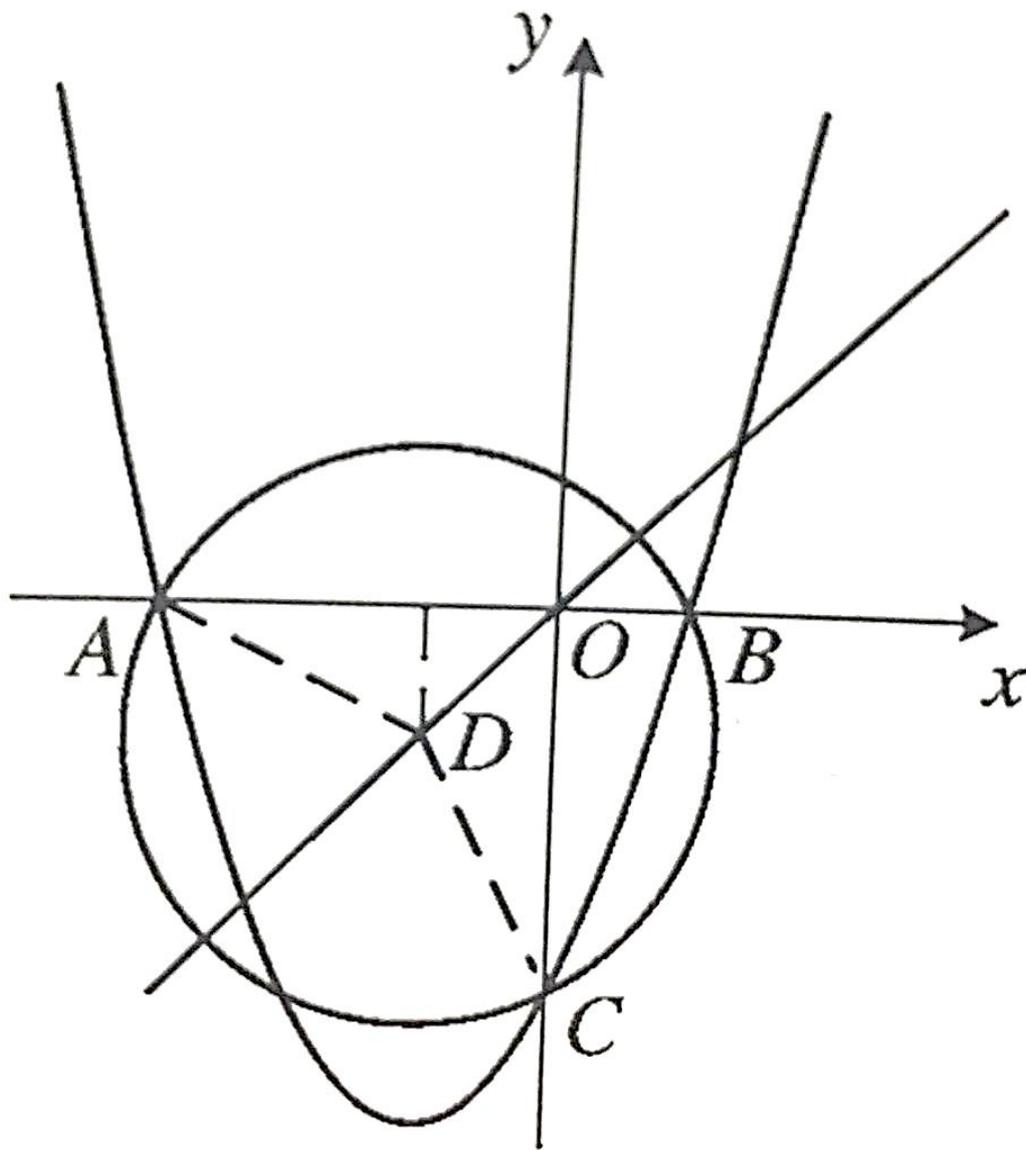


图 2



141 (2012 “卓越” 自招试题)

如图 6 所示, 设抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点是 F , A 、 B 是抛物线上互异的两点, 直线 AB 与 x 轴不垂直, 线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 $D(a, 0)$, 记 $m = AF + BF$.

(1) 证明: a 是 p 与 m 的等差中项;

(2) 设 $m = 3p$, 直线 l 平行于 y 轴, 且 l 被以 AD 为直径的动圆截得的弦长恒为定值, 求直线 l 的方程.

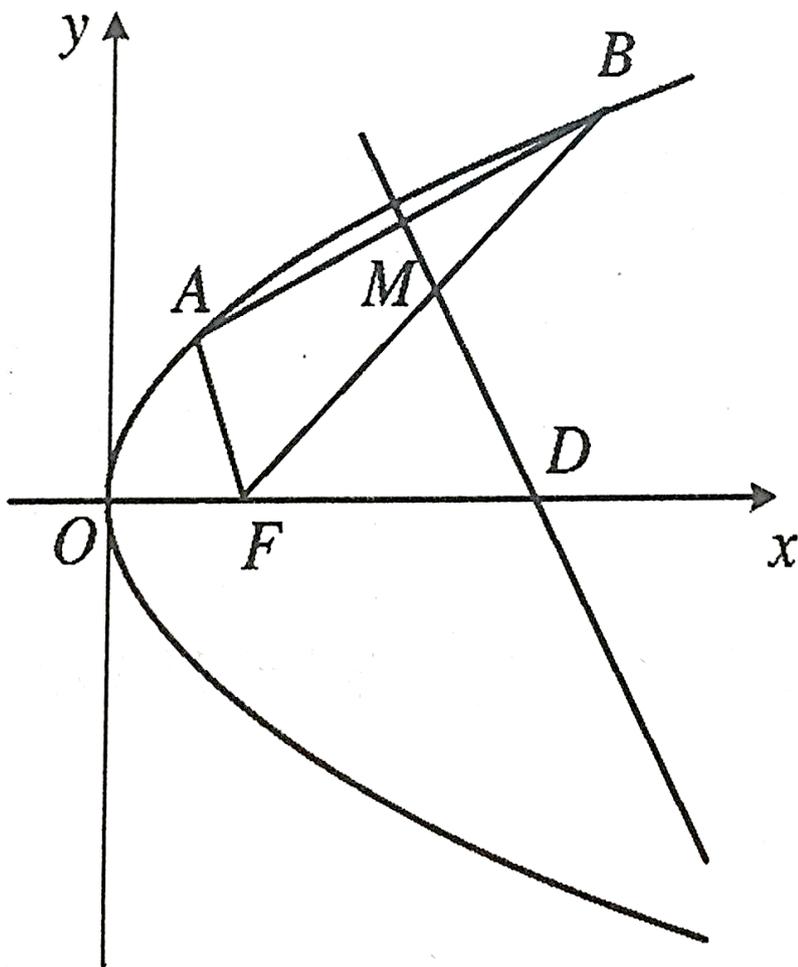


图 6



(八) 数列

142 (2016 年清华大学领军计划)

在 N 项有穷数列 $\{a_n\}$ 中, 满足 ① $1 \leq i < j \leq N$ 时, $a_i < a_j$; ② $1 \leq i < j < k \leq N$ 时, $a_i + a_j, a_j + a_k, a_k + a_i$ 至少有一项在 $\{a_n\}$ 中; 则 N 的最大值为_____.

143 (2016 年北京大学博雅计划)

已知 $k \neq 1$, 则等比数列 $a + \log_2 k, a + \log_4 k, a + \log_8 k$ 的公比为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. 前三个答案都不对

144(2015 年北京大学自主招生)

设 $a_n = \sin \frac{n\pi}{9}$, $n \geq 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 2015 项的和是

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1007}{2}$ (D) $-\frac{1007}{2}$

145 (2015 年北京大学博雅计划)

已知 n 是不超过 2015 的正整数, 且 $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ 的个位数为 0, 则满足条件的正整数 n 的个数是 ()

- A. 1511 B. 1512 C. 1513 D. 前三个答案都不对

146 (2014 年北大等十一校联考自招)

已知 a_1, a_2, \dots, a_{13} 是等差数列, 集合 $M = \{a_i + a_j + a_k \mid 1 \leq i < j < k \leq 13\}$ 。问: $0, \frac{7}{2}, \frac{16}{3}$ 能否同时为 M 中的元素? 并证明你的结论。



147 (2014 年“卓越”试题)

已知实数数列 $\{a_n\}$ 满足: $|a_1|=1, |a_{n+1}|=q|a_n| (q>1), n \in N^*$, 对 $\forall n \in N^*$, 有 $\sum_{k=1}^{n+1} |a_k| \leq 4|a_n|$. 设 C 为所有满足上述条件的数列 $\{a_n\}$ 的集合.

(1) 求 q 的值;

(2) 已知 $\{a_n\} \subset C, \{b_n\} \subset C$, 且存在 $n_0 \leq m$, 满足 $a_{n_0} \neq b_{n_0}$, 证明: $\sum_{k=1}^m a_k \neq \sum_{k=1}^m b_k$;

(3) 设集合 $A_m = \{\sum_{k=1}^m a_k \mid \{a_n\} \in C\}, m \in N^*$, 求 A_m 中所有正数之和.

148 (2014 年“华约”试题)

设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+1} = np^n + qa_n, a_1 = 0$.

(1) 若 $q=1$, 求 $\{a_n\}$ 的通项;

(2) 若 $|p|<1, |q|<1$, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 必有界.

149 (2013 年“卓越”试题)

(文科) 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $0 < a_n \leq 1, n \in N^*$. 定义函数 $f_n(x) = x + a_1x^2 + a_2x^3 + \dots + a_nx^{n+1}$.

(1) 对于每一个 $n \in N^*$, 证明: 方程 $f_n(x) = 1$ 在区间 $(0, 1)$ 内有唯一解 x_n ;

(2) 对于(1)中的数列 $\{x_n\}$, 证明: $x_n > x_{n+1} > \frac{1}{2} (n \in N^*)$.



150 (2013 年“卓越”试题)

(理科)已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n^2 - na_n + \alpha (n \in N^*, \alpha \in R)$.

(1) 若 $a_n \geq 2n$ 对 $n \in N^*$ 都成立, 求 α 的取值范围;

(2) 当 $\alpha = -2$ 时, 证明: $\frac{1}{a_1 - 2} + \frac{1}{a_2 - 2} + \dots + \frac{1}{a_n - 2} < 2 (n \in N^*)$.

151 (2013 年“卓越”试题)

(文科)设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = 3, S_n = a_{n+1} + 2n - 3 (n \in N^*)$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = 2^n + (-1)^n \lambda a_n$, 若对所有的 $n \in N^*$, 都有 $b_{n+1} > b_n$, 求实数 λ 的取值范围.

152 (2013 年北大等十一校联考自招)

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 前 n 项和为 $S_n, S_{n+1} = 4a_n + 2$. 则 $a_{2013} = (\quad)$.

A. 3019×2^{2012} B. 3019×2^{2013} C. 3018×2^{2012} D. 无法确定

153 (2013 年北大等十一校联考自招)

已知有 mn 个实数, 排列成 $m \times n$ 数阵, 记作 $(a_{ij})_{m \times n}$, 使得数阵中的每一行从左到右都是递增的, 即对

$i = 1, 2, 3, \dots, m$, 当 $j_1 < j_2$ 时, 都有 $a_{ij_1} \leq a_{ij_2}$. 现将 $(a_{ij})_{m \times n}$ 的每一列原有的各数按照从上到下递增的顺序

排列, 形成一个新的 $m \times n$ 数阵, 记作 $(a'_{ij})_{m \times n}$, 即对任意的 $j = 1, 2, 3, \dots, n$, 当 $i_1 < i_2$ 时, 都有 $a'_{i_1 j} \leq a'_{i_2 j}$.

试判断 $(a'_{ij})_{m \times n}$ 中每一行的 n 个数的大小关系, 并说明理由.



154 (2013 年“华约”试题)

已知 $a_{n+1} = a_n + ca_n^2 (n=1, 2, \dots), a_1 > 0, c > 0$.

(1) 证明: 对任意的 $M > 0$, 存在正整数 N , 使得对于 $n > N, a_n > M$;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{ca_n + 1}, s_n$ 为 b_n 的前 n 项和, 证明: $\{s_n\}$ 有界, 且 $d > 0$ 时, 存在正整数 k , 当 $n > k$ 时,

$$0 < |s_n - \frac{1}{ca_1}| < d.$$

155 (2012 年“华约”自招测试)

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \ln(1 + \frac{2}{n^2 + 3n}) (n=1, 2, \dots), S_n$ 是数列的前 n 项和, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = (\quad)$.

A. 0 B. $\lg \frac{3}{2}$ C. $\lg 2$ D. $\lg 3$

156 (2011 年“华约”自招测试)

已知函数 $f(x) = \frac{2x}{ax+b}, f(1) = 1, f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$. 令 $x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = f(x_n)$.

(1) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: $x_1 x_2 \dots x_{n+1} > \frac{1}{2e}$.



157 (2011 年清华夏令营)

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a, a_2 = b, 2a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 。

(1) 记 $b_n = a_{n+1} - a_n$, 证明: 若 $a \neq b$, 则 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 4$, 求 a, b 的值。

(九) 数论**158 (2016 年清华大学领军计划)**

不定方程 $x^2 + 615 = 2^y (x, y \in \mathbb{N}^*)$ 解的个数

A.0 B.1 C.2 D.3

159 (2016 年北京大学自主招生)

$(2+1)(2^2+1)(2^3+1)\dots(2^{2016}+1)$ 的个位数为_____

160 (2016 年北京大学自主招生)

已知正整数 a, b, c, d 满足 $ab = cd$, 则 $a+b+c+d$ 有可能等于 ()。

A.101 B.301 C.401 D.前三个答案都不对

161 (2016 年北京大学自主招生)

$1! + 2! + \dots + 2016!$ 除以 100 所得余数为 ()。

A.3 B.13 C.27 D.前三个答案都不对



162 (2015 年北京大学自主招生)

设 p 为素数, 二次方程 $x^2 - 2px + p^2 - 5p - 1 = 0$ 的两个根都是整数, 则 p 的可能取值个数是

- (A)3 (B)2 (C)1 (D)0

163 (2015 年北京大学自主招生)

方程 $xy - 2x + y = 0$ 的整数解的个数是

- (A)4 (B)3 (C)1 (D)无穷多

164 (2015 年北京大学博雅计划)

满足 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2015}$, $x \leq y$ 的正整数 (x, y) 的个数是 ()

- A. 12 B. 15 C. 18 D. 前三个答案都不对

165 (2015 年北京大学博雅计划)

整数 a, b, c 满足 $(a-b)(b-c)(c-a) = a+b+c$, 则 $a+b+c$ 可能等于 ()

- A. 126 B. 144 C. 162 D. 前三个答案都不对

166 (2015 年北京大学博雅计划)

整数 x, y, z 满足 $xy + yz + xz = 1$, 则 $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$ 可能取到的值为 ()

- A. 16900 B. 17900 C. 18900 D. 前三个答案都不对

167 (2015 年北京大学博雅计划)

已知 $10^{20} - 2^{20}$ 是 2^n 的整数倍, 则正整数 n 的最大值是 ()

- A. 21 B. 22 C. 23 D. 前三个答案都不对



168 (2014 年北大全国优秀中学生体验营)

求出所有实数 x , 使得 $\frac{1-x}{1+x}$ 与 $\frac{1-x}{1+x}$ 同时为整数。

169 (2013 年复旦自招)

$x^2 - 3y^2 = 2$ 的整数解有几组?

170 (2013 年北大暑期体验营)

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 14 项和 $a_1 + a_2 + \dots + a_{14} = 77$, 已知 a_1, a_{11} 为正整数。求 a_{18} 的值。

171 (2013 年北大等十一校联考自招)

最多能取多少个两两不等的正整数, 使得其中任意三个数之和都为素数?

172 (2013 年“华约”试题)

设 x, y, z 是两两不等且大于 1 的正整数。求所有满足 $xyz \mid (xy-1)(yz-1)(xz-1)$ 的 x, y, z 。

173 (2012 年复旦千分考)

任取一个小于 3 位的正整数, 它的 3 次方的十位数与个位数均是 1。这种取法的概率是多少?

174 (2012 年北大等十一校联考自招)

从 $1, 2, \dots, 2012$ 中选出 n 个数, 使得其中任意两个数的差都不能整除这两个数的和, 则 n 的最大值为()。

A. 671 B. 672 C. 673 D. 以上都不对



(十) 排列、组合与二项式定理

175 (2016 年清华大学领军计划)

甲, 乙, 丙, 丁四人参加比赛并有两人获奖, 以下是四人对获奖人的猜测

甲: 获奖者在乙, 丙, 丁中 乙: 我未获奖, 丙获奖

丙: 甲丁有一人获奖 丁: 乙说的是正确的

已知四人中有两个人的猜测是正确的, 那么获奖人是_____.

176 (2015 年北京大学博雅计划)

已知 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 都是 9 元集合 $\{1, 2, \dots, 9\}$ 的子集, 已知 $|A_i|$ 为奇数, $1 \leq i \leq n$, $|A_i \cap A_j|$ 是偶数, $1 \leq i \neq j \leq n$, 则 n 的最大值是_____.

177 (2016 年清华大学领军计划)

已知 x, y, z 为正整数, $x \leq y \leq z$, 那么方程 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ 的解有多少组? ()

A.8 B.10 C.11 D.12

178 (2016 年清华大学领军计划)

将 16 个数: 4 个 1、4 个 2、4 个 3、4 个 4 填入一个 4×4 的矩阵中, 要求每行每列正好有 2 个偶数, 则共有_____种填法。

179 (2016 年清华大学领军计划)

从 1-14 的正整数中任选出若干数构成一个集合, 该集合中任 3 个数不构成等差数列, 求元素最多的集合的元素个数。



180 (2016 年清华大学领军计划)

问一个正 2016 边形, 任选顶点顺序相连构成的凸多边形中, 正多边形有几个?

- A. 6552 B. 4536 C. 3528 D. 2016

181 (2016 年北京大学自主招生)

$f(x) = 3x^2 - x + 4$, $g(x)$ 为正系数多项式, $f(g(x)) = 3x^4 + 18x^3 + 50x^2 + 69x + a$ (a 为常数项), 则 $g(x)$ 各项系数之和_____

182 (2016 年北京大学博雅计划)

将 12 个不同物体分成 3 堆, 每堆 4 个, 则不同的分法种类为 ()

- A. 34650 B. 5940 C. 495 D. 前三个答案都不对

183 (2016 年北京大学博雅计划)

从一个正 9 边形的 9 个顶点中选 3 个使得它们是一个等腰三角形的三个顶点的方法数是 () .

- A. 30 B. 36 C. 42 D. 前三个答案都不对

184 (2015 年北京大学自主招生)

乘积 $(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5)$ 展开合并同类项后的项数是

- (A) 60 (B) 30 (C) 20 (D) 15

185 (2015 年北京大学博雅计划)

登楼梯时规定, 每次只能跨上 1 级或 2 级台阶, 今欲登上 10 级楼梯, 则不同走法的种数为_____.



186 (2015 年北京大學博雅計劃)

在不超过 99 的正整数中选出 50 个不同的正整数, 已知这 50 个数中任两个的和都不等于 99, 也不等于 100, 这 50 个数的和可能等于 ()

- A. 3524 B. 3624 C. 3724 D. 前三个答案都不对

187 (2014 年北大等十一校联考自招)

10 个人分成 3 组, 一组 4 人, 另两组每组 3 人, 共有 () 种分法。

- A.1050 B.2014 C.2100 D.4200

188 (2014 年“卓越”试题)

已知集合 A, B 满足 $A \cup B = \{n | 1 \leq n \leq 8, n \in \mathbb{Z}\}$, $A \cap B = \emptyset$. 若 A 中元素的个数不是 A 中的元素, B 中元素的个数不是 B 中的元素, 则满足条件的所有不同的集合 A 的个数为_____.

189 (2014 年“华约”试题)

已知正整数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 满足: 任四个数之和构成的集合为 $\{44, 45, 46, 47\}$. 求 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的值。

190 (2013 年复旦自招)

设 11 层的大楼中 3 个人进一部电梯, 每层楼都停. 求三个人从不同楼层下的概率。

191 (2013 年复旦自招)

有 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 这八个数字, 每个数字用一次, 随机组成五位数, 将这些五位数从小到大依次排列, 则第 833 个数字为多少?



192 (2013 年北大等十一校联考自招)

在 6×6 的表中停放三辆完全相同的红色车和 3 辆完全相同的黑色车，每一行、每一列只有一辆车，每辆车占一格，共有 () 种停放方法。

A.720 B.20 C.518400 D.14400

193 (2013 年“华约”试题)

已知集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 10\}$ ， B 是 A 的子集，且 B 中的元素满足下列条件：

(a) 数字两两不等；

(b) 任意两个数字之和不等于 9。

(1) B 中有多少个两位数，多少个三位数？

(2) B 中是否有五位数？是否有六位数？

(3) 将 B 中的元素从小到大排列，第 1081 个元素是多少？

194 (2012 年清华暑期学校学业水平测试)

有编号为①，②的 2 个红球，编号为③，④的 2 个黑球，编号为⑤，⑥，⑦的 3 个白球。将这 7 个球放入编号为 A,B,C,D,E 的 5 个盒中，要求每个盒中放 1 个或 2 个球，而且同色球不能放入同一盒中，则不同的放置方式共有_____种。

195 (2012 年复旦千分考)

将一张 10 元钱破成 1 元、5 角和 1 角的零钱，共有多少种方法？

196(2012 年北大等十一校联考自招)

求证：对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(\sqrt{2}+1)^n$ 都能写成 $\sqrt{m} + \sqrt{m-1}$ ($m \in \mathbb{N}^*$) 的形式 (例如, $(\sqrt{2}+1)^2 = \sqrt{9} + \sqrt{8}$) .



197 (2012 年“华约”自招测试)

有红蓝两色车、马、炮棋子各一枚，将这六枚棋子排成一列，其中每对同字的棋子中，均为红棋子在前，蓝棋子在后，满足这种条件的不同的排列方式共有 ()。

- A. 36 种 B. 60 种 C. 90 种 D. 120 种

198 (2012 年“华约”自招测试)

某乒乓球培训班共有 n 位学员，在班内打训练赛期间，每两名学员都作为搭档恰好参加过一场双打比赛。试确定 n 的所有可能值，并分别给出对应的一种安排比赛的方案。

199 (2011 年清华夏令营)

数列 $\{a_n\}$ 共有 11 项， $a_1 = 0, a_{11} = 4, |a_{k+1} - a_k| = 1 (k = 1, 2, \dots, 10)$ ，满足这样的条件的不同数列的个数为 ()。

- A. 100 B. 120 C. 140 D. 160

200 (2013 年北大体验营)

一个班有 n 个同学，每个同学都有一个信息希望通过短信告诉别人。已知每次一个同学可以给另一个同学发短信告诉他自已已经知道的所有信息。问同学们至少一共需要发送多少条短信，才能使每个同学都知道所有的信息？



清北自招的最后一根稻草

2017年清华北大自主招生笔试面试押题班

适用人群

通过北大清华自主招生或博雅领军初审的学员。

笔试课程

攻克北大清华自招及博雅领军考试中的重点难点，强化常见类型题目解题技巧，根据命题趋势和风格押题。

面试课程

分享面试经验及常见问题，让学员能够从容应对面试，做到从容面对，充分展示个人特点。



扫码关注爱尖子

课程表

课程名	价格	直播老师	上课时间
清北自招博雅领军押题冲刺班（数学）	¥ 299	张明宇	2017.06.09 9:00-12:00
清北自招博雅领军押题冲刺班（物理）	¥ 299	高洪生	2017.06.09 13:30-16:30
清北自招博雅领军面试技巧班	¥ 599	神秘人	2017.06.12 13:30-16:30

直播教师



高洪生

爱尖子金牌教练

清华学士 CPhO一等奖

国家集训队成员



张明宇

爱尖子市场主管

北航学士 金牌教练

高联一等奖

报名方式：5月5日起，登录www.aijianzi.com即可购买。