放缩法通关 100 题（含答案）

1. 由下列不等式：$1>\frac{1}{2}$，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}>1$，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{7}>\frac{3}{2}$，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{15}>2$，…，你能得到一个怎样的一般不等式?并加以证明.

2. 数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数，$a_1=\frac{1}{2}$，且对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_{n+1}=a_n+ca_n^2(c>0)$.

（1）求 $\frac{c}{1+ca_1}+\frac{c}{1+ca_2}+\frac{1}{a_3}$ 的值；

（2）若 $c=\frac{1}{2016}$，是否存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_n>1$，若存在，试求出 n 的最小值，若不存在，请说明理由.

3. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，数列 $\{a_n\}$ 满足 $S_n=\frac{a_n^2+a_n}{2}$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\frac{1}{(a_n+2)^2}$，它的前 n 项和为 T_n，求证：对任意正整数 n，都有 $T_n<\frac{1}{2}$ 成立.

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $4S_n=(2n-1)a_{n+1}+1(n\in\mathbf{N})$，且 $a_1=1$.

（1）求证：数列 $\{a_n\}$ 为等差数列；

（2）设 $b_n=\frac{1}{a_n\sqrt{S_n}}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，证明：$T_n<\frac{3}{2}(n\in\mathbf{N})$.

5. 观察下列三角形数表，假设第 n 行第二个数为 $a_n(n\geq 2,n\in\mathbf{N}^*)$.

\（ \begin{array}{ccccccccccc} & & & & 1 & & & & & & \llap {\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ } 第 \ 1 \ 行 \\ & & & 2 & & 2 & & & & & \llap {\cdots\cdots\cdots\cdots \ } 第 \ 2 \ 行 \\ & & 3 & & 4 & & 3 & & & & \llap {\cdots\cdots\cdots \ } 第 \ 3 \ 行 \\ & 4 & & 7 & & 7 & & 4 & & \quad & \llap {\cdots\cdots \ } 第 \ 4 \ 行 \\ 5 & & 11 & & 14 & & 11 & & 5 & & \llap {\cdots \ } 第 \ 5 \ 行 \\ \cdots & & & & \cdots& & & & \cdots & & \cdots \\ \end{array} \）

（1）归纳出 a_{n+1} 与 a_n 的关系式，并求出 a_n 的通项公式；

（2）设 $a_n\cdot b_n=1(n\geq 2)$，求证：$b_2+b_3+\cdots+b_n<2$.

6. 已知一个口袋有 m 个白球，n 个黑球 $(m,n\in\mathbf{N}^*,n\geq 2)$，这些球除颜色外全部相同．现将口袋中的球随机的逐个取出，并放入如图所示的编号为 1，2，3，…，$m+n$ 的抽屉内，其中第 k 次取出的球放入编号为 k 的抽屉 $(k=1,2,3,\cdots,m+n)$.

$$1\quad 2\quad 3\quad \cdots\quad m+n$$

（1）试求编号为 2 的抽屉内放的是黑球的概率 p；

（2）随机变量 X 表示最后一个取出的黑球所在抽屉编号的倒数，$E(X)$ 是 X 的数学期望，证明 $E(X)<\frac{n}{(m+n)(n-1)}$.

7. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}-a_n+a_na_{n+1}=0(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求证：$a_1+a_1a_2+a_1a_2a_3+\cdots+a_1a_2\cdots a_n<1$.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{3}{2}$，$a_{n+1}=3a_{n-1}(n\in\mathbf{N}_+)$.

（1）若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_n-\frac{1}{2}$，求证：$\{b_n\}$ 是等比数列；

（2）若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=\log_3 a_n$，$T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$，求证：$T_n>\frac{n(n-1)}{2}$.

9. 求证：$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$（$n\geq 2,n\in\mathbf{N}_+$）.

10. 已知 a，b，c 均为正实数，求证：

（1）$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$;

（2）$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\geq\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$.

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 S_n 满足：$2S_n+a_n=1$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\frac{2a_{n+1}}{(1+a_n)(1+a_{n+1})}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求证：$T_n<\frac{1}{4}$.

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=4$，$a_{n+1}=qa_n+d$（q，d 为常数）.

（1）当 $q=1$，$d=2$ 时，求 a_{2017} 的值；

（2）当 $q=3$，$d=-2$ 时，记 $b_n=\frac{1}{a_n-1}$，$S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$，证明：$S_n<\frac{1}{2}$.

13. 已知数列 $\{x_n\}$ 按如下方式构成：$x_n\in(0,1)(n\in\mathbf{N}^*)$，函数 $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ 在点 $(x_n,f(x_n))$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标为 x_{n+1}.

（1）证明：当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>2x$;

（2）证明：$x_{n+1}<x_n^3$;

（3）若 $x_1\in(0,a)$，$a\in(0,1)$，求证：对任意的正整数 m，都有 $\log_{x_n}a+\log_{x_{n+1}}a+\cdots+\log_{x_{n+m}}a<\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}(n\in\mathbf{N}^*,n\geq 2)$

（1）证明：数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是等比数列，并求出 $\{a_n\}$ 的通项公式

（2）设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=2\log_4(a_n+1)^2$，证明：对一切正整数 n，有 $\frac{1}{b_1^2-1}+\frac{1}{b_2^2-1}+\cdots+\frac{1}{b_n^2-1}<\frac{1}{2}$.

15. 设 $n\in\mathbf{N}^*$，x_n 是曲线 $y=x^{2n+2}+1$ 在点 $(1,2)$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标，

（1）求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式；

（2）记 $T_n=x_1^2x_3^2\cdots x_{2n-1}^2$，证明：$T_n\geq\frac{1}{4n}$.

16. 设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 S_n 满足 ${S_n}^2-(n^2+n-2)S_n-2(n^2+n)=0$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）求 a_1 的值；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（3）证明：对一切正整数 n，有 $\frac{a_1+1}{a_1}\times\frac{a_2+1}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_n+1}{a_n}>\sqrt{n+1}$.

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=1-\frac{4}{a_n+3}$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\frac{1}{a_n+1},(n\in\mathbf{N}^*)$

（1）求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）证明：$\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{b_2^2}+\cdots+\frac{1}{b_n^2}<7$.

18. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=a_n^2+a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）证明：$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 3$；

（2）设数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，证明：$S_n < 3$.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n^2+1}$.

（1）求证：$a_{n+1} < a_n$；

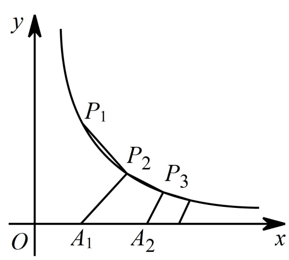
（2）求证：$\frac{1}{2^{n-1}} \leq a_n \leq \frac{2^n}{3\cdot 2^n-4}$.

20. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_{10} = 100$，数列 a_1，$a_2 - a_1$，$a_3 - a_2$，…，$a_n - a_{n-1}$ 的前 5 项和为 9.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，$b_n = \frac{a_n+3}{(n^2+2n)^2}$，求证：$T_n < \frac{5}{8}$.

21. 已知点列 $P_n\left(x_n, \frac{2}{x_n}\right)$ 与 $A_n(a_n, 0)$ 满足 $x_{n+1} > x_n$，$\overrightarrow{P_nP_{n+1}} \perp \overrightarrow{A_nP_{n+1}}$，且 $|\overrightarrow{P_nP_{n+1}}| = |\overrightarrow{A_nP_{n+1}}|$，其中 $n \in \mathbf{N}^*$，$x_1 = 1$.



（1）求 x_{n+1} 与 x_n 的关系式；

（2）求证：$n^2 < x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leq 4n^2$.

22. 现有 $\frac{n(n+1)}{2}$（$n \geq 2$，$n \in \mathbf{N}^*$）个给定的不同的数随机排成一个下图所示的三角形数阵：

	*	第 1 行
	*　　*	第 2 行
	*　　*　　*	第 3 行
	……	
	……	
第 n 行	*　　……　　*　　*	

设 M_k 是第 k 行中的最大数，其中 $1 \leq k \leq n$，$k \in \mathbf{N}^*$．记 $M_1 < M_2 < \cdots < M_n$ 的概率为 p_n.

（1）求 p_2 的值；

（2）证明：$p_n > \frac{C_{n+1}^2}{(n+1)!}$.

23. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{2}{5}$，$a_{n+1} = \frac{2a_n}{3-a_n}$，$n \in \mathbf{N}^*$.

（1）求 a_2；

（2）求 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的通项公式；

（3）设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求证：$\frac{6}{5}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \leq S_n < \frac{21}{13}$.

24. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{3}$，$a_{n+1} = a_n + \frac{a_n^2}{n^2}(n \in \mathbf{N}^*)$.

（1）证明：$a_n < a_{n+1} < 1(n \in \mathbf{N}^*)$；

（2）证明：$a_n \geq \frac{n}{2n+1}(n \in \mathbf{N}^*)$.

25. 已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 中，$a_1 = 1$，$b_n = \left(1 - \frac{a_n^2}{a_{n+1}^2}\right) \cdot \frac{1}{a_{n+1}}$，$n \in \mathbf{N}^*$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

（1）若 $a_n = 2^{n-1}$，求 S_n；

（2）是否存在等比数列 $\{a_n\}$，使 $b_{n+2} = S_n$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立?若存在，求出所有满足条件的数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；若不存在，说明理由；

（3）若 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$，求证：$0 \leq S_n < 2$.

26. 定义：若数列 $\{A_n\}$ 满足 $A_{n+1} = A_n^2$，则称数列 $\{A_n\}$ 为“平方递推数列”. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1 = 2$，点 (a_n, a_{n+1}) 在函数 $f(x) = 2x^2 + 2x$ 的图象上. 其中 n 为正整数.

（1）求 a_2，a_3，并求证：数列 $\{2a_n + 1\}$ 是“平方递推数列”，且数列 $\{\lg(2a_n + 1)\}$ 为等比数列；

（2）设 $T_n = (2a_1 + 1)(2a_2 + 1)\cdots(2a_n + 1)$. 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及 T_n 关于 n 的表达式；

（3）记 $b_n = \frac{\log_5 T_n + 1}{(\log_5 T_n)^2}$,$\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 求证：$S_n < 3$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立.

27.（1）已知 a 为常数，且 $0 < a < 1$，函数 $f(x) = (1 + x)^a - ax$，求函数 $f(x)$ 在 $x > -1$ 上的最大值；

（2）若 a，b 均为正实数，求证：$a^b + b^a > 1$.

28. 已知函数 $f(x) = \ln(1 + x) - ax$，$g(x) = \frac{x}{1+x} - b\ln(1 + x)$.

（1）当 $b = 1$ 时，求 $g(x)$ 的最大值；

（2）若对 $\forall x \in [0, +\infty)$，$f(x) \leq 0$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（3）证明 $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{i^2+1} - \ln n \leq \frac{1}{2}$.

29. 已知函数 $f(x) = \ln x - x - 3$.

（1）求函数 $f(x)$ 的最大值；

（2）求证：$\ln(2^2 + 1) + \ln(3^2 + 1) + \ln(4^2 + 1) + \cdots + \ln(n^2 + 1) < 1 + 2\ln n!(n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$.

30. 设函数 $f(x) = x^2\ln x$，$g(x) = ax^3 - x^2$.

（1）求函数 $f(x)$ 的最小值；

（2）若存在 $x \in (0, +\infty)$，使 $f(x) > g(x)$ 成立，求实数 a 的取值范围；

（3）若使关于 x 的方程 $f(x) - g(x) = 0$ 在 $\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}, \mathrm{e}^n\right]$（其中 $\mathrm{e} = 2.71\cdots\cdots$ 为自然对数的底数）上有解的 a 的最小值为 a_n，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求证：$S_n < 3$.

31. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = 3n - 2$，$f(n) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$，$g(n) = f(n^2) - f(n - 1)$，$n \in \mathbf{N}^*$.

（1）求证：$g(2) > \frac{1}{3}$；

（2）求证：当 $n \geq 3$ 时，$g(n) > \frac{1}{3}$.

32. 已知数列 $\{a_n\}$，$a_1 = 1$，前 n 项和为 S_n，且满足 $a_n = \frac{2S_n^2}{2S_n - 1}$ $(n \geq 2)$.

（1）求证：数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是等差数列；

（2）证明：当 $n \geq 2$ 时，$S_1 + \frac{1}{2}S_2 + \frac{1}{3}S_3 + \cdots + \frac{1}{n}S_n < \frac{3}{2}$.

33. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_n - \frac{a_{n+1}}{2}| \leq 1$，$n \in \mathbf{N}^*$.

（1）证明：$|a_n| \geq 2^{n-1}(|a_1|-2)$，$n \in \mathbf{N}^*$；

（2）若 $|a_n| \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n$，$n \in \mathbf{N}^*$，证明：$|a_n| \leq 2$，$n \in \mathbf{N}^*$.

34. 已知 $\{a_n\}$ 满足 $2na_{n+1}=(n+1)a_n(n \in \mathrm{N}^*)$，且 $a_1,1,4a_3$ 成等差数列.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\sin(\pi a_n)$，S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，求证：对任意 $n \in \mathrm{N}^*$，$S_n < 2+\pi$.

35. 设实数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，且 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n| \leq 1\left(n \in \mathbf{N}^*\text{且 } n \geq 2\right)$，令 $b_n=\frac{a_n}{n}(n \in \mathbf{N}^*)$. 求证：$|b_1+b_2+\cdots+b_n| \leq \frac{1}{2}-\frac{1}{2n}(n \in \mathbf{N}^*)$.

36. 已知函数 $f(x)=\ln x-mx+m$，$m \in \mathbf{R}$.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间.

（2）若 $f(x) \leq 0$ 在 $x \in (0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 m 的取值范围.

（3）在（2）的条件下，任意的 $0<a<b$，求证：$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{1}{a(1+a)}$.

37. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}+k\ln x, k \neq 0$.

（1）当 $k=1$ 时，求函数 $f(x)$ 单调区间和极值；

（2）若关于 x 的方程 $f(x)=k$ 有解，求实数 k 的取值范围.

38. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=2(S_n+n+1)(n \in \mathbf{N}^*)$，令 $b_n=a_n+1$.

（1）求证：$\{b_n\}$ 是等比数列；

（2）记数列 $\{nb_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求 T_n；

（3）求证：$\frac{1}{2}-\frac{1}{2\times 3^n}<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{11}{16}$.

39. 设函数 $f(x)=\ln x+x^2+ax$.

（1）若 $x=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 取得极值，求 a 的值；

（2）若 $f(x)$ 在其定义域内为增函数，求 a 的取值范围；

（3）设 $g(x)=f(x)-x^2+1$，当 $a=-1$ 时，证明 $g(x) \leq 0$ 在其定义域内恒成立，并证明 $\frac{\ln 2^2}{2^2}+\frac{\ln 3^2}{3^2}+\cdots+\frac{\ln n^2}{n^2}<\frac{2n^2-n-1}{2(n+1)}(n \in \mathbf{N}, n \geq 2)$.

40. 已知点 $P_n(a_n,b_n)$（$n \in \mathbf{N}^*$）在直线 l：$y=3x+1$ 上，P_1 是直线 l 与 y 轴的交点，数列 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列.

（1）求数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）求证：

$$\frac{1}{|P_1P_2|^2}+\frac{1}{|P_1P_3|^2}+\cdots+\frac{1}{|P_1P_{n+1}|^2}<\frac{1}{6}.$$

41. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，通项公式为 $a_n=\frac{1}{n}$，$f(n)=\begin{cases} S_{2n}, & n=1 \\ S_{2n}-S_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$.

（1）计算 $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$ 的值；

（2）比较 $f(n)$ 与 1 的大小，并用数学归纳法证明你的结论.

42. 正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $\{a_n\}$ 满足：$S_n^2-(n^2+n-1)S_n-(n^2+n)=0$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n；

（2）令 $b_n=\frac{n+1}{(n+2)^2a_n^2}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，证明：对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $T_n<\frac{5}{64}$.

43. 数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数，且对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，满足 $a_{n+1}=a_n+ca_n^2$（$c>0$ 且为常数）.

（1）若 a_1，$2a_2$，$3a_3$ 依次成等比数列，求 a_1 的值（用常数 c 表示）；

（2）设 $b_n=\frac{1}{1+ca_n}$，S_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，

（ⅰ）求证：$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=-\frac{c}{1+ca_n}$；

（ⅱ）求证：$S_n<S_{n+1}<\frac{1}{ca_1}$.

44. 已知 $f(x)=ax^2+bx+c$，当 $|x|\le 1$ 时，$|f(x)|\le 1$．求证：$|c|\le 1$，$|b|\le 1$，$|a+c|\le 1$，$|a|\le 2$.

45. 已知函数 $f(x)=x\cos x-\sin x+1(x>0)$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）记 x_{i} 为的从小到大的第 $\mathrm{i}(\mathrm{i}\in\mathbf{N}^*)$ 个零点，证明：对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}<\frac{2}{3}$.

46. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+2a_2\cdots+na_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求 a_3 的值；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 T_n；

（3）令 $b_1=a_1$，$b_n=\frac{T_{n-1}}{n}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)a_n(n\ge 2)$，证明：数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n<2+2\ln n$.

47. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\ln(x+m)$.

（1）设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 m，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $m\le 2$ 时，证明 $f(x)>0$.

48. 已知 $\lambda\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\ln x-\frac{\lambda(x-1)}{x+\lambda-1}$，其中 $x\in[1,+\infty)$.

（1）当 $\lambda=2$ 时，求 $f(x)$ 的最小值；

（2）在函数 $y=\ln x$ 的图象上取点 $P_n(n,\ln n)(n\in\mathbf{N}^*)$，记线段 P_nP_{n+1} 的斜率为 k_n，$S_n=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\cdots+\frac{1}{k_n}$.

对任意正整数 n，试证明：

$(1)S_n<\frac{n(n+2)}{2}$；$(2)S_n>\frac{n(3n+5)}{6}$.

49. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1=1$，$x_n=x_{n+1}+\ln(1+x_{n+1})$（$n\in\mathbf{N}^*$），证明：当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，

（1）$0<x_{n+1}<x_n$；

（2）$2x_{n+1}-x_n\le\frac{x_nx_{n+1}}{2}$；

（3）$\frac{1}{2^{n-1}}\le x_n\le\frac{1}{2^{n-2}}$.

50. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，且 $2a_n=a_{n-1}+1(n\ge 2,n\in\mathbf{N}_+)$.

（1）求证：数列 $\{a_n-1\}$ 是等比数列，并求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=n(a_n-1)$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求证：$1\le S_n<4$.

51. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n>0$，$a_1=2$，且 $(n+1)a_{n+1}^2=na_n^2+a_n(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）证明：$a_n>1$；

（2）证明：$\frac{a_2^2}{4}+\frac{a_3^2}{9}+\cdots+\frac{a_n^2}{n^2}<\frac{9}{5}(n\geq 2)$.

52. 设 $f(x)=\mathrm{e}^x-a(x+1)$.

（1）若 $a>0$，$f(x)\geq 0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求 a 的最大值；

（2）设 $g(x)=f(x)+\frac{a}{\mathrm{e}^x}$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$ 是曲线 $y=g(x)$ 上任意两点，若对任意的 $a\leq -1$，直线 AB 的斜率恒大于常数 m，求 m 的取值范围；

（3）是否存在正整数 a，使得 $1^n+3^n+\cdots+(2n-1)^n<\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}-1}(an)^n$ 对一切正整数 n 都成立?若存在，求 a 的最小值；若不存在，请说明理由.

53. 设 $n\in\mathbf{N}^*$，x_n 是是曲线 $y=x^{2n+2}+1$ 在点 $(1,2)$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标.

（1）求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式；

（2）记 $T_n=x_1^2x_3^2\cdots x_{2n-1}^3$，证明：$T_n\geq\frac{1}{4n}$.

54. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_n=\frac{3}{2}a_n-n(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求证 $\{a_n+1\}$ 是等比数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

（2）证明：$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}>\frac{n}{3}-\frac{1}{8}$.

55. 已知数列中，$a_1=1$，$a_2=\frac{1}{4}$，且 $a_{n+1}=\frac{(n-1)a_n}{n-a_n}(n=2,3,4,\cdots)$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求证：（ⅰ）对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $\frac{1}{a_{n+1}^2}>\frac{1}{a_n^2}$;

（ⅱ）对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2<\frac{7}{6}$.

56. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $4(n+1)(S_n+1)=(n+2)^2a_n(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求 a_1，a_2 的值；

（2）求 a_n；

（3）设 $b_n=\frac{n+1}{a_n}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求证：$T_n<\frac{3}{4}$.

57. 已知函数 $f(x)=\ln(x-1)-k(x-1)+1(k\in\mathbf{R})$.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 $f(x)\leq 0$ 恒成立，试确定实数 k 的取值范围；

（3）证明：$\frac{\ln 2}{3}+\frac{\ln 3}{4}+\cdots+\frac{\ln n}{n+1}\leq\frac{n(n-1)}{4}$（$n\in\mathbf{N}_+$ 且 $n\geq 2$）.

58. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，首项 $a_1=1$，且对于任意 $n\in\mathbf{N}_+$ 都有 $na_{n+1}=2S_n$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\frac{4a_{n+1}}{a_n^2a_{n+2}^2}$，且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项之和为 T_n，求证：$T_n<\frac{5}{4}$.

59. 数列 $\{a_n\}$，$a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n+2$；

（1）求证：$\{a_n+2\}$ 是等比数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\frac{n}{a_n+2}$，求和 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，并证明：$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$\frac{1}{5}\leq S_n<\frac{4}{5}$.

60. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A，B，点 P 在椭圆上且异于 A，B 两点，O 为坐标原点.

（1）若直线 AP 与 BP 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$，求椭圆的离心率；

（2）若 $|AP|=|OA|$，证明直线 OP 的斜率 k 满足 $|k|>\sqrt{3}$.

61. 已知 $f(x)=ax^2+bx+c$，$a,b,c\in\mathbf{R}$，定义域为 $[-1,1]$.

（1）当 $a=1$，$|f(x)|\le 1$ 时，求证：$|1+c|\le 1$；

（2）当 $b>2a>0$ 时，是否存在 $x\in[-1,1]$，使得 $|f(x)|\ge b$？

62. 已知数列 a_n 中，$a_1=1$，$a_n=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}(n=2,3,4,\cdots)$.

（1）求 a_2，a_3 的值；

（2）证明当 $n=2,3,4,\cdots$ 时，$\sqrt{2n-1}<a_n\le\sqrt{3n-2}$.

63. 设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 S_n 满足 $S_n^2-(n^2+n-3)S_n-3(n^2+n)=0$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）求 a_1 的值；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（3）证明：对一切正整数 n，有 $\frac{1}{a_1(a_1+1)}+\frac{1}{a_2(a_2+1)}+\cdots+\frac{1}{a_n(a_n+1)}<\frac{1}{3}$.

64. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_2=\frac{1}{4}$，且 $a_{n+1}=\frac{(n-1)a_n}{n-a_n}(n=2,3,4,\cdots)$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求证：对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2<\frac{7}{6}$.

65. 已知数列 $\{a_n\}$ 是以 d 为公差的等差数列，数列 $\{b_n\}$ 是以 q 为公比的等比数列.

（1）若数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=b_1=d=2$，$S_3<a_{1003}+5b_2-2010$，且 q 为整数，求 q 的值；

（2）在（1）的条件下，试问数列 $\{b_n\}$ 中是否存在一项 b_k，使得 b_k 恰好可以表示为该数列中连续 $p(p\in\mathbf{N},p\ge 2)$ 项的和?请说明理由；

（3）若 $b_1=a_r$，$b_2=a_s\ne a_r$，$b_3=a_t$（其中 $t>s>r$，且（$s-r$）是（$t-r$）的约数），求证：数列 $\{b_n\}$ 中每一项都是数列 $\{a_n\}$ 中的项.

66. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1$，$a_2=2$，且 $a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}\ (n\ge 2,n\in\mathbf{N}^+)$.

（1）设 $b_n=a_{n+1}+a_n(n\in\mathrm{N}^+)$，求证 $\{b_n\}$ 是等比数列；

（2）（i） 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（ii） 求证：对于任意 $n\in\mathbf{N}^+$ 都有 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2n-1}}+\frac{1}{a_{2n}}<\frac{7}{4}$ 成立.

67. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n=\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$. 从数列 $\{a_n\}$ 中选出 $k(k\ge 3)$ 项并按原顺序组成的新数列记为 $\{b_n\}$，并称 $\{b_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的 k 项子列. 例如数列 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{8}$ 为 $\{a_n\}$ 的一个 4 项子列.

（1）试写出数列 $\{a_n\}$ 的一个 3 项子列，并使其为等比数列；

（2）如果 $\{b_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的一个 5 项子列，且 $\{b_n\}$ 为等差数列，证明：$\{b_n\}$ 的公差 d 满足 $-\frac{1}{4}<d<0$；

（3）如果 $\{c_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的一个 6 项子列，且 $\{c_n\}$ 为等比数列，证明：$c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6\le\frac{63}{32}$.

68. 已知函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}-a\ln x$.

（1）若 $f(x)$ 无极值点，求 a 的取值范围；

（2）设 $g(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2$，当 a 取 (1) 中的最大值时，求 $g(x)$ 的最小值；

（3）证明不等式：$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2^i(2^i+1)}}>\ln\frac{2^{n+1}}{2^n+1}\,(n\in\mathbf{N}^*)$.

69. 记 $U=\{1,2,\cdots,100\}$．对数列 $\{a_n\}$（$n\in\mathbf{N}^*$）和 U 的子集 T，若 $T=\emptyset$，定义 $S_T=0$；若 $T=\{t_1,t_2,\cdots,t_k\}$，定义 $S_T=a_{t_1}+a_{t_2}+\cdots+a_{t_k}$．例如：$T=\{1,3,66\}$ 时，$S_T=a_1+a_3+a_{66}$．现设 $\{a_n\}$（$n\in\mathbf{N}^*$）是公比为 3 的等比数列，且当 $T=\{2,4\}$ 时，$S_T=30$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）对任意正整数 k（$1\le k\le 100$），若 $T\subseteq\{1,2,\cdots,k\}$，求证：$S_T<a_{k+1}$；

（3）设 $C\subseteq U$，$D\subseteq U$，$S_C\ge S_D$，求证：$S_C+S_{C\cap D}\ge 2S_D$.

70. 设函数 $f(x)=x^3-ax-b$，$x\in\mathbf{R}$，其中 $a,b\in\mathbf{R}$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 $f(x)$ 存在极值点 x_0，且 $f(x_1)=f(x_0)$，其中 $x_1\ne x_0$，求证：$x_1+2x_0=0$；

（3）设 $a>0$，函数 $g(x)=|f(x)|$，求证：$g(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.

71. 对于函数 $f(x)(x\in D)$，若 $x\in D$ 时，恒有 $f'(x)>f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 是 D 上的 J 函数.

（1）当函数 $f(x)=me^x\ln x$ 是定义域上的 J 函数时，求 m 的取值范围；

（2）若函数 $g(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的 J 函数，①试比较 $g(a)$ 与 $e^{a-1}g(1)$ 的大小；②求证：对于任意大于 1 的实数 x_1，x_2，x_3，…，x_n，均有 $g(\ln(x_1+x_2+\cdots+x_n))>g(\ln x_1)+g(\ln x_2)+\cdots+g(\ln x_n)$.

72. 已知函数 $f(x)=ax^2+bx$，$a,b\in\mathbf{R}$．若 $-3x^2-1\le f(x)\le 6x+2$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立．数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{3}$，$a_{n+1}=f(a_n)(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）确定 $f(x)$ 的解析式；

（2）证明：$\frac{1}{3}\le a_n<\frac{1}{2}$；

（3）设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，求证：$4S_n\ge 2n-1+\frac{1}{3^n}$.

73. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_n-\frac{a_{n+1}}{2}|\le 1$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）证明：$|a_n|\ge 2^{n-1}(|a_1|-2)$，$n\in\mathbf{N}^*$；

（2）若 $|a_n|\le\left(\frac{3}{2}\right)^n$，$n\in\mathbf{N}^*$，证明：$|a_n|\le 2$，$n\in\mathbf{N}^*$.

74. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，$b_n=n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n a_n(n\in\mathbf{N}_+)$，e 为自然对数的底数.

（1）求函数 $f(x)=1+x-e^x$ 的单调区间，并比较 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 与 e 的大小；

（2）计算 $\frac{b_1}{a_1}$，$\frac{b_1b_2}{a_1a_2}$，$\frac{b_1b_2b_3}{a_1a_2a_3}$，由此推测计算 $\frac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n}$ 的公式，并给出证明；

（3）令 $c_n=(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$，数列 $\{a_n\}$，$\{c_n\}$ 的前 n 项和分别记为 S_n，T_n，证明：$T_n<eS_n$.

75. 已知函数 $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$ 和直线 $l:y=m(x-1)$.

（1）当曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 l 垂直时，求原点 O 到直线 l 的距离；

（2）若对于任意的 $x\in[1,+\infty)$，$f(x)\le m(x-1)$ 恒成立，求 m 的取值范围；

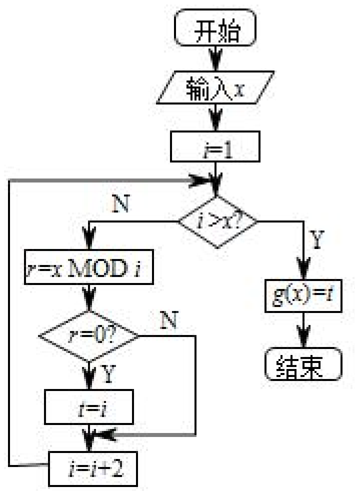
（3）求证：$\ln\sqrt[4]{2n+1}<\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{4i^2-1}(n\in\mathbf{N}^+)$

76. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足，$x_1=\frac{1}{2}$，$x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）猜想数列 $\{x_{2n}\}$ 的单调性，并证明你的结论；

（2）证明：$|x_{n+1}-x_n|\le\frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$.

77. 定义函数 $g(x)$，x 为正整数，其原理如图所示，记 $a_n=g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(2^n)$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$.



（1）分别计算 $g(1)+g(3)+g(5)+g(7)$；$g(1)+g(2)+g(3)+g(4)$；$g(2)+g(4)+g(6)+g(8)$.

（2）求 $g(1)+g(3)+g(5)+\cdots+g(2k-1)$，并证明 $g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(2^{n-1})=g(2)+g(4)+g(6)+\cdots+g(2^n)$.

（3）记 $b_n=\frac{2^n}{3a_n-2}$，证明 $b_1+b_2+b_4+\cdots+b_{2^{n-1}}<\frac{7}{8}$.

78. 设数列 a_1，a_2，$\cdots$，a_{2015} 满足性质 P：$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2015}=0$，$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots+|a_{2015}|=1$.

（1）（ⅰ）若 a_1，a_2，$\cdots$，a_{2015} 是等差数列，求 a_n；

（ⅱ）是否存在具有性质 P 的等比数列 a_1，a_2，$\cdots$，a_{2015}？

（2）求证：$a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{2015}a_{2015}\le\frac{1007}{2015}$.

79. 已知函数 $f(x)=2x-3x^2$，设数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=\frac{1}{4}$，$a_{n+1}=f(a_n)$.

（1）求证：$\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $0<a_n<\frac{1}{3}$；

（2）求证：$\frac{3}{1-3a_1}+\frac{3}{1-3a_2}+\cdots+\frac{3}{1-3a_n}\ge 4^{n+1}-4$.

80. 已知定义在 $[-2,2]$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足：当 $x\in(0,2]$ 时，$f(x)=x(x-2)$.

（1）求 $f(x)$ 的解析式和值域；

（2）设 $g(x)=\ln(x+2)-ax-2a$，其中常数 $a>0$.

①试指出函数 $F(x)=g(f(x))$ 的零点个数；

②若当 $1+\frac{1}{k}$ 是函数 $F(x)=g(f(x))$ 的一个零点时，相应的常数 a 记为 a_k，其中 $k=1,2,\cdots,n$.

证明：$a_1+a_2+\cdots+a_n<\frac{7}{6}(n\in\mathbf{N}^*)$．

81. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=a$（实数 a 为常数），$a_2=2$，S_n 是其前 n 项和，且 $S_n=\frac{n(a_n-a_1)}{2}$．数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，$b_1=2$，a_4 恰为 S_4 与 b_2-1 的等比中项．

（1）证明：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列；

（2）求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（3）若 $c_1=\frac{3}{2}$，当 $n\geq 2$ 时 $c_n=\frac{1}{b_{n-1}+1}+\frac{1}{b_{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{b_n}$，$\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求证：对任意 $n\geq 2$，都有 $12T_n\geq 6n+13$．

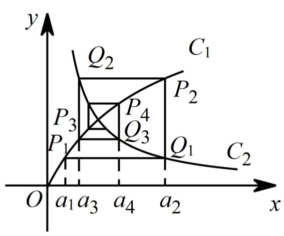
82. 设无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，且 $a_n>0(n\in\mathbf{N}^*)$，$[a_n]$ 表示不超过实数 a_n 的最大整数（如 $[2.5]=2$），记 $b_n=[a_n]$，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n．

（1）若 $a_1=14$，$q=\frac{1}{2}$，求 T_3；

（2）证明：$S_n=T_n(n=1,2,3,\cdots)$ 的充分必要条件为 $a_n\in\mathbf{N}^*$；

（3）若对于任意不超过 2014 的正整数 n，都有 $T_n=2n+1$，证明：$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2012}}<q<1$．

83. 如图，已知曲线 $C_1{:}y=\frac{2x}{x+1}(x>0)$ 及曲线 $C_2{:}y=\frac{1}{3x}(x>0)$．从 C_1 上的点 $P_n(n\in\mathbf{N}_+)$ 作直线平行于 x 轴，交曲线 C_2 于点 Q_n，再从点 Q_n 作直线平行于 y 轴，交曲线 C_1 于点 P_{n+1}．点 P_n 的横坐标构成数列 $\{a_n\}\left(0<a_1<\frac{1}{2}\right)$．



（1）试求 a_{n+1} 与 a_n 之间的关系，并证明：$a_{2n-1}<\frac{1}{2}<a_{2n}(n\in\mathbf{N}_+)$；

（2）若 $a_1=\frac{1}{3}$，求证：$|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|<\frac{4}{3}(n\in\mathbf{N}_+)$．

84. 各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_2a_4=16$，单调递增数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_4=b_3$，且 $6S_n=b_n^2+3b_n+2(n\in\mathbf{N}^*)$

（1）求数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式

（2）令 $c_n=\frac{b_n}{a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$

（1）求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n

（2）若 $d=\frac{1}{3}[a_n+2(-1)^{n-1}]$，证明：对任意的整数 $m>4(m\in\mathbf{N}^*)$，有 $\frac{1}{d_4}+\frac{1}{d_5}+\cdots+\frac{1}{d_m}<\frac{7}{8}$

85. 已知实数组成的数组（x_1，x_2，x_3，$\cdots$，x_n）满足条件：（i）$\sum_{i=1}^{n}x_i=0$；（ii）$\sum_{i=1}^{n}|x_i|=1$．

（1）当 $n=2$ 时，求 x_1，x_2 的值；

（2）当 $n=3$ 时，求证：$|3x_1+2x_2+x_3|\leq 1$；

（3）设 $a_1\geq a_2\geq a_3\geq\cdots\geq a_n$，且 $a_1>a_n$（$n\geq 2$），求证：$|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i|\leq\frac{1}{2}(a_1-a_n)$．

86. 已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足：$b_na_n+a_{n+1}+b_{n+1}a_{n+2}=0$，$b_n=\frac{3+(-1)^n}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$，且 $a_1=2$，$a_2=4$.

（1）求 a_3，a_4，a_5 的值；

（2）设 $c_n=a_{2n-1}+a_{2n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，证明：$\{c_n\}$ 是等比数列；

（3）设 $S_k=a_2+a_4+\cdots+a_{2k}$，$k\in\mathbf{N}^*$，证明：$\sum_{k=1}^{4n}\frac{S_k}{a_k}<\frac{7}{6}(n\in\mathbf{N}^*)$.

87. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，满足 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{\frac{a_n+1}{2}}$，记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．证明：

（1）$a_{n+1}>a_n$；

（2）$a_n=\cos\frac{\pi}{3\cdot2^{n-1}}$；

（3）$S_n>n-\frac{27+\pi^2}{54}$.

88. 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)+\frac{a}{2}x^2-x(a\geq0)$.

（1）若 $f(x)>0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 都成立，求 a 的取值范围；

（2）已知 e 为自然对数的底数，证明：$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$\sqrt{\mathrm{e}}<\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)<\mathrm{e}$.

89. 已知曲线 $C_n{:}y=nx^2$，点 $P_n(x_n,y_n)$（$x_n>0,y_n>0$）是曲线 C_n 上的点 $(n=1,2,\cdots)$.

（1）试写出曲线 C_n 在点 P_n 处的切线 l_n 的方程，并求出 l_n 与 y 轴的交点 Q_n 的坐标；

（2）若原点 $O(0,0)$ 到 l_n 的距离与线段 P_nQ_n 的长度之比取得最大值，试求点 P_n 的坐标 (x_n,y_n)；

（3）设 m 与 k 为两个给定的不同的正整数，x_n 与 y_n 是满足（2）中条件的点 P_n 的坐标，证明：

$\sum_{n=1}^{s}|\sqrt{\frac{(m+1)x_n}{2}}-\sqrt{(k+1)y_n}|<|\sqrt{ms}-\sqrt{ks}|(s=1,2,\ldots)$.

90. 设函数 $f(x)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^x\left(n\in\mathbf{N},\text{且 }n>1,x\in\mathbf{N}\right)$.

（1）当 $x=6$ 时，求 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^x$ 的展开式中二项式系数最大的项；

（2）对任意的实数 x，证明 $\frac{f(2x)+f(2)}{2}>f'(x)$（$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数）；

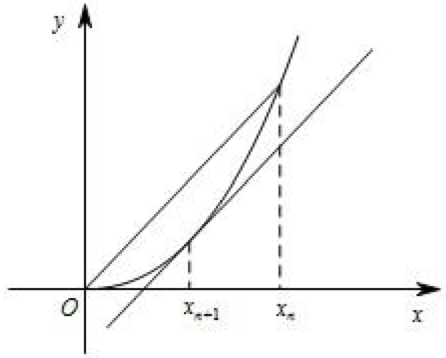
（3）是否存在 $a\in\mathbf{N}$，使得 $an<\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<(a+1)n$ 恒成立?若存在，试证明你的结论并求出 a 的值；若不存在，请说明理由.

91. 已知曲线 $C_n{:}x^2-2nx+y^2=0(n=1,2,\cdots)$．从点 $P(-1,0)$ 向曲线 C_n 引斜率为 $k_n(k_n>0)$ 的切线 l_n，切点为 $P_n(x_n,y_n)$.

（1）求数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 的通项公式；

（2）证明：$x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot\cdots\cdot x_{2n-1}<\sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}}<\sqrt{2}\sin\frac{x_n}{y_n}$.

92. 已知函数 $f(x)=x^3+x^2$，数列 $\{x_n\}(x_n>0)$ 的第一项 $x_1=1$，以后各项按如下方式取定：曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_{n+1},f(x_{n+1}))$ 处的切线与经过 $(0,0)$ 和 $(x_n,f(x_n))$ 两点的直线平行（如图）．求证：当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时：



（1）$x_n^2+x_n=3x_{n+1}^2+2x_{n+1}$；

（2）$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\le x_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

93. A 是定义在 $[2,4]$ 上且满足如下条件的函数 $\varphi(x)$ 组成的集合：

① 对任意的 $x\in[1,2]$，都有 $\varphi(2x)\in(1,2)$；

② 存在常数 $L(0<L<1)$，使得对任意的 $x_1,x_2\in[1,2]$，都有 $|\varphi(2x_1)-\varphi(2x_2)|\le L|x_1-x_2|$.

（1）设 $\varphi(x)=\sqrt[3]{1+x}$，$x\in[2,4]$，证明：$\varphi(x)\in A$；

（2）设 $\varphi(x)\in A$，如果存在 $x_0\in(1,2)$，使得 $x_0=\varphi(2x_0)$，那么这样的 x_0 是唯一的；

（3）设 $\varphi(x)\in A$，任取 $x_1\in(1,2)$，令 $x_{n+1}=\varphi(2x_n)$，$n=1,2,\cdots$，证明：给定正整数 k，对任意的正整数 p，不等式 $|x_{k+p}-x_k|\le\frac{L^{k-1}}{1-L}|x_2-x_1|$ 成立.

94. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+2a_2+\cdots+na_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）求 a_3 的值；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 T_n；

（3）令 $b_1=a_1$，$b_n=\frac{T_{n-1}}{n}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)a_n(n\ge2)$，证明：数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n<2+2\ln n$.

95. 设 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n-1$，$x\ge0$，$n\in\mathbf{N}$，$n\ge2$.

（1）求 $f'_n(2)$；

（2）证明：$f_n(x)$ 在 $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ 内有且仅有一个零点（记为 a_n），且 $0<a_n-\frac{1}{2}<\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

96. 已知在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\frac{3}{2}$，$a_{n+1}=a_n^2-2a_n+2$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）求证：$1<a_{n+1}<a_n<2$；

（2）求证：$\frac{6}{2^{n-1}+3}\le a_n\le\frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1}$；

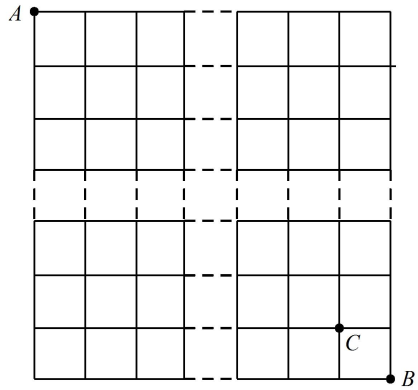
（3）记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，求证：$n<S_n<n+2$.

97. 设 $f_n(x)$ 是等比数列 $1,x,x^2,\cdots,x^n$ 的各项和，其中 $x>0$，$n\in\mathbf{N}$，$n\ge2$.

（1）证明：函数 $F_n(x)=f_n(x)-2$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个零点（记为 x_n），且 $x_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_n^{n+1}$；

（2）设有一个与上述等比数列的首项、末项、项数分别相同的等差数列，其各项和为 $g_n(x)$，比较 $f_n(x)$ 和 $g_n(x)$ 的大小，并加以证明.

98. 如图所示，某城市有南北街道和东西街道各 $n+1$ 条，一邮递员从该城市西北角的邮局 A 出发，送信到东南角 B 地，要求所走路程最短.



（1）求该邮递员途径 C 地的概率 $f(n)$；

（2）求证：$2<[2f(n)]^{2n+1}<3$，$(n\in\mathbf{N}^*)$

99. 已知函数 $f(x)=\ln(\mathrm{e}^x+a)$（a 为常数）是实数集 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

（1）求实数 a 的值；

（2）讨论关于 x 的方程 $\ln x=f(x)(x^2-2\mathrm{e}x+m)$ 的根的个数；

（3）证明：$\frac{\ln(2^2-1)}{2^2}+\frac{\ln(3^2-1)}{3^2}+\cdots+\frac{\ln(n^2-1)}{n^2}<\frac{2n^2-n-1}{2(n+1)}(n\in\mathbf{N}^*,n\geq 2)$.

100. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，前 n 项和为 S_n，点 (a_n+1,S_{n+1}) 在直线 $y=4x-2$ 上，其中 $n=1,2,3,\cdots$.

（1）设 $b_n=a_{n+1}-2a_n$，且 $a_1=1$，求证：数列 $\{b_n\}$ 是等比数列；

（2）令 $f(x)=b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n$，求函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的导数 $f'(1)$，并比较 $f'(1)$ 与 $6n^2-3n$ 的大小.

答案

第一部分

1. 根据给出的几个不等式可以猜想第 n 个不等式，

即一般不等式为：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

用数学归纳法证明如下：

（1）当 $n=1$ 时，$1>\frac{1}{2}$，猜想成立；

（2）假设当 $n=k$ 时，猜想成立，即 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}>\frac{k}{2}$.

则当 $n=k+1$ 时，

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k-1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}>\frac{k}{2}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}>\frac{k}{2}+\frac{2^k}{2^{k+1}}=\frac{k+1}{2}.$$

即当 $n=k+1$ 时，猜想也正确，

所以对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，不等式成立.

2.（1） 因为 $a_1=\frac{1}{2}$，且对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_{n+1}=a_n+ca_n^2(c>0)$，

所以 $a_2=a_1+ca_1^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}c$，

$$a_3=a_2+ca_2^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}c+c\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}c\right)^2=\frac{1}{16}(2+c)(4+2c+c^2).$$

所以

$$\begin{aligned}&\frac{c}{1+ca_1}+\frac{c}{1+ca_2}+\frac{1}{a_3}\\=&\frac{c}{1+\frac{1}{2}c}+\frac{c}{1+c\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}c\right)}+\frac{16}{(2+c)(4+2c+c^2)}\\=&\frac{2c}{2+c}+\frac{4c}{4+2c+c^2}+\frac{16}{(2+c)(4+2c+c^2)}\\=&\frac{2c(4+2c+c^2)+4c(2+c)+16}{(2+c)(4+2c+c^2)}\\=&2.\end{aligned}$$

（2） 因为 $a_{n+1}=a_n+ca_n^2$，$c=\frac{1}{2016}$，

所以 $a_{n+1}>a_n>0$.

所以 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n+2016}$，即 $\frac{1}{a_n+2016}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$，

所以

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a_1+2016}+\frac{1}{a_2+2016}+\cdots+\frac{1}{a_n+2016}\\=&\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\\=&2-\frac{1}{a_{n+1}}.\end{aligned}$$

所以 $2-\frac{1}{a_{2017}}<\frac{1}{2016}+\frac{1}{2016}+\cdots+\frac{1}{2016}=\frac{n}{2016}$.

当 $n=2016$ 时，$2-\frac{1}{a_{2017}}<1$，可得 $a_{2017}<1$.

当 $n=2017$ 时，$2-\frac{1}{a_{2018}}>\frac{1}{2017}+\frac{1}{2017}+\cdots+\frac{1}{2017}=1$，可得 $a_{2018}>1$.

因此存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_n>1$.

3.（1） 由 $S_n=\frac{a_n^2+a_n}{2}$ 可得：$2S_n=a_n^2+a_n$，

当 $n=1$ 时，由 $2S_1=a_1^2+a_1$，且 $a_n>0$ 可得：$a_1=1$，

当 $n\geq 2$ 时，$2S_n=a_n^2+a_n$， ……①

$2S_{n-1}=a_{n-1}^2+a_{n-1}$， ……②

由 ① − ② 得：$2a_n=a_n^2+a_n-a_{n-1}^2-a_{n-1}$， ……③

即：$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-1)=0$，

因为 $a_n>0$，

所以 $a_n-a_{n-1}-1=0$，

所以 $\{a_n\}$ 为以 $a_1=1$ 为首项，公差为 1 的等差数列，$a_n=n(n\in\mathbf{N}^*)$.

（2） 由 $b_n=\frac{1}{(a_n+2)^2}=\frac{1}{(n+2)^2}<\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$,

所以

$$\begin{aligned}T_n&=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)^2}\\&<\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&<\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\\&<\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

所以对任意正整数，都有 $T_n<\frac{1}{2}$ 成立.

4.（1） 因为 $4S_n=(2n-1)a_{n+1}+1$，⋯①

所以 $n\geq 2$ 时，$4S_{n-1}=(2n-3)a_n+1$，⋯②

①−②，得 $4a_n=(2n-1)a_{n+1}-(2n-3)a_n$，$n\geq 2$，

所以 $(2n+1)a_n=(2n-1)a_{n+1}$，

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+1}{2n-1}$,

所以 $a_n=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_n}{a_{n-1}}=1\times\frac{3}{1}\times\frac{5}{3}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n-3}=2n-1$，

所以 $a_n-a_{n-1}=(2n-1)-(2n-3)=2$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列.

（2） 因为数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列，

所以 $a_n=2n-1$，$S_n=n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2$，

所以 $b_n=\frac{1}{a_n\sqrt{S_n}}=\frac{1}{(2n-1)n}=\frac{2}{2n(2n-1)}<\frac{2}{2n(2n-2)}=\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n}$，$n\geq 2$，

所以 $T_n<\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2n}<\frac{3}{2}$.

所以 $T_n<\frac{3}{2}(n\in\mathbf{N})$.

5.（1） 依题意 $a_{n+1}=a_n+n(n\geq 2)$.

$a_2=2$.

$n\geq 3$ 时，

$$\begin{aligned}a_n&=a_2+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n-1})\\&=2+2+3+\cdots+(n-1)\\&=2+\frac{(n-2)(n+1)}{2},\end{aligned}$$

$a_2=2$ 也符合上式.

所以 $a_n=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1(n\geq 2)$.

（2） 因为 $a_nb_n=1$，所以 $b_n=\frac{2}{n^2-n+2}<\frac{2}{n^2-n}=2\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$.

$$\begin{aligned} b_2+b_3+\cdots+b_n &<2\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right]\\ &=2\left(1-\frac{1}{n}\right)\\ &<2. \end{aligned}$$

6.（1） 设事件 A_i 表示编号为 i 的抽屉里放的是黑球，

则

$$\begin{aligned} p &=p(A_2)\\ &=P(A_2|A_1)P(A_1)+P\left(A_2|\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_1}\right)\\ &=\frac{n-1}{m+n-1}\times\frac{n}{m+n}+\frac{n}{m+n-1}\times\frac{m}{m+n}\\ &=\frac{n^2-n+mn}{(m+n)(m+n-1)}\\ &=\frac{n}{m+n}. \end{aligned}$$

（2） 因为 X 的所有可能取值为 $\frac{1}{n}$，$\frac{1}{n+1}$，$\cdots$，$\frac{1}{n+m}$，

$P\left(x=\frac{1}{k}\right)=\frac{\mathrm{C}_{k-1}^{n-1}}{\mathrm{C}_{m+n}^{n}}$，$k=n,n+1,n+2,\cdots,n+m$，

所以

$$\begin{aligned} E(X) &=\sum_{k=n}^{n+m}\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{\mathrm{C}_{k-1}^{n-1}}{\mathrm{C}_{n+m}^{n}}\right)\\ &=\frac{1}{\mathrm{C}_{n+m}^{n}}\cdot\sum_{k=n}^{n+m}\frac{\mathrm{C}_{k-1}^{n-1}}{k}\\ &=\frac{1}{\mathrm{C}_{n+m}^{n}}\cdot\sum_{k=n}^{n+m}\frac{\mathrm{C}_{k-1}^{n-1}}{k}\\ &<\frac{1}{\mathrm{C}_{n+m}^{n}}\cdot\sum_{k=n}^{n+m}\frac{\mathrm{C}_{k-1}^{n-1}}{k-1}\\ &=\frac{1}{\mathrm{C}_{n+m}^{n}}\cdot\sum_{k=n}^{n+m}\frac{\mathrm{C}_{k-2}^{n-2}}{n-1}\\ &=\frac{1}{(n-1)\mathrm{C}_{n+m}^{n}}\cdot\left(\mathrm{C}_{n-2}^{n-2}+\mathrm{C}_{n-1}^{n-2}+\cdots+\mathrm{C}_{n+m-2}^{n-2}\right)\\ &=\frac{1}{(n-1)\mathrm{C}_{m+n}^{n}}\cdot\mathrm{C}_{m+n-1}^{n-1}\\ &=\frac{n}{(m+n)(n-1)}, \end{aligned}$$

所以 $E(X)<\frac{n}{(m+n)(n-1)}$.

7.（1） 由已知可得数列 $\{a_n\}$ 各项非零，

否则，若有 $a_k=0$ 结合 $a_k-a_{k-1}+a_ka_{k-1}=0\Rightarrow a_{k-1}=0$，

继而 $\Rightarrow a_{k-1}=0\Rightarrow a_{k-2}=0\Rightarrow\cdots\Rightarrow a_1=0$，与已知矛盾，

所以由 $a_{n+1}-a_n+a_na_{n+1}=0$ 可得 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1$，

即数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是公差为 1 的等差数列，

所以 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)=n+1$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=\frac{1}{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

（2） 证明一：

因为 $a_1a_2\cdots a_k=\frac{1}{2\times3\times\cdots\times(k+1)}\le\left(\frac{1}{2}\right)^k$，

所以 $a_1+a_1a_2+a_1a_2a_3+\cdots+a_1a_2\cdots a_n\le\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n<1$，

所以 $a_1+a_1a_2+a_1a_2a_3+\cdots+a_1a_2\cdots a_n<1$；

证 明 二：

$$\begin{aligned}a_1+a_1a_2+a_1a_2a_3+\cdots+a_1a_2\cdots a_n&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{2\times3\times\cdots\times(n+1)}\\&\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\\&=1-\frac{1}{n+1}\\&<1,\end{aligned}$$

所以 $a_1+a_1a_2+a_1a_2a_3+\cdots+a_1a_2\cdots a_n<1$.

8.（1） 由题可知 $a_{n+1}-\frac{1}{2}=3\left(a_n-\frac{1}{2}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$，

从而有 $b_{n+1}=3b_n$，$b_1=a_1-\frac{1}{2}=1$，

所以 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项，3 为公比的等比数列.

（2） 由（1）知 $b_n=3^{n-1}$，

从而 $a_n=3^{n-1}+\frac{1}{2}$，$c_n=\log_3\left(3^{n-1}+\frac{1}{2}\right)>\log_{33}^{n-1}=n-1$，

有 $T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n>0+1+2+\cdots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$,

所以 $T_n>\frac{n(n-1)}{2}$.

9.
$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n&=\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1\times\frac{1}{n}+\mathrm{C}_n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n\left(\frac{1}{n}\right)^n\\&=1+1+\mathrm{C}_n^2\times\frac{1}{n^2}+\mathrm{C}_n^3\times\frac{1}{n^3}+\cdots+\mathrm{C}_n^n\times\frac{1}{n^n}\\&=2+\frac{1}{2!}\times\frac{n(n-1)}{n^2}+\frac{1}{3!}\times\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}+\cdots+\frac{1}{n!}\times\frac{n(n-1)\times\cdots\times2\times1}{n^n}\\&<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\&<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\\&=2+\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{2}}\\&=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\&<3.\end{aligned}$$

显然 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\mathrm{C}_n^2\times\frac{1}{n^2}+\mathrm{C}_n^3\times\frac{1}{n^3}+\cdots+\mathrm{C}_n^n\times\frac{1}{n^n}>2$.

所以 $2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$.

10.（1） a，b 均为正实数，可得 $a+b\ge2\sqrt{ab}$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge2\sqrt{\frac{1}{ab}}$,

相乘可得 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge2\sqrt{ab}\cdot2\sqrt{\frac{1}{ab}}=4$，当且仅当 $a=b$ 取得等号.

则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$.

（2）由（1）可得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$；

同理，由 b，c 为正实数，可得 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{4}{b+c}$；

由 c，a 为正实数，可得 $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\geq\frac{4}{c+a}$.

相加可得 $2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}$，

即有 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\geq\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$.

11.（1）因为 $2S_n+a_n=1$ ……①，易得

$$2S_{n+1}+a_{n+1}=1 \quad \cdots\cdots②②-①$$

可得

$$2a_{n+1}+a_{n+1}-a_n=0,$$

即 $3a_{n+1}=a_n$，即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}$，所以数列 $\{a_n\}$ 是公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列.

又 $2S_1+a_1=1$，所以 $a_1=\frac{1}{3}$，故

$$a_n=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}.$$

（2）因为 $b_n=\frac{2a_{n+1}}{(1+a_n)(1+a_{n+1})}$，所以

$$\begin{aligned} b_n &=\frac{2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)\left(1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)} \\ &=\frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{3^n+1}{3^n}\cdot\frac{3^{n+1}+1}{3^{n+1}}} \\ &=\frac{2\cdot 3^n}{(3^n+1)(3^{n+1}+1)} \\ &=\frac{1}{3^n+1}-\frac{1}{3^{n+1}+1}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} T_n &=b_1+b_2+\cdots+b_n \\ &=\left(\frac{1}{3^1+1}-\frac{1}{3^2+1}\right)+\left(\frac{1}{3^2+1}-\frac{1}{3^3+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3^n+1}-\frac{1}{3^{n+1}+1}\right) \\ &=\frac{1}{4}-\frac{1}{3^{n+1}+1}<\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

12.（1）因为数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=4$，$a_{n+1}=qa_n+d$（q，d 为常数）.

所以当 $q=1$，$d=2$ 时，$a_{n+1}-a_n=2$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1=4$，公差 $d=2$ 的等差数列，

所以 $a_n=4+(n-1)\times 2=2n+2$，

所以 $a_{2017}=2\times 2017+2=4036$.

（2）当 $q=3$，$d=-2$ 时，$a_{n+1}=3a_n-2$ 变形得 $a_{n+1}-1=3(a_n-1)$，

所以数列 $\{a_n-1\}$ 是以 3 为首项，3 为公比的等比数列，

所以 $a_n-1=3\times 3^{n-1}=3^n$，

所以 $b_n=\frac{1}{a_n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$，

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 $\frac{1}{3}$ 为首项，$\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列，

所以

$$\begin{aligned}S_n=&\ b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n\\=&\ \frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}\\=&\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\\<&\ \frac{1}{2},\end{aligned}$$

所以 $S_n<\frac{1}{2}$.

13.（1） 设 $g(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)-2x$，

则 $g'(x)=\frac{2x^2}{1-x^2}$，

故当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

所以 $g(x)>g(0)=0$，

即有 $f(x)>2x$.

（2） 由 $f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}=\frac{2}{1-x^2}$，知曲线在点 $(x_n,f(x_n))$ 处的切线方程为：$y=\frac{2}{1-x_n^2}(x-x_n)+f(x_n)$，

令 $y=0$，则 $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{2}f(x_n)\left(x_n^2-1\right)$，

由（1）及 $x_n^2-1<0$ 知，$x_{n+1}<\frac{1}{2}(2x_n)\left(x_n^2-1\right)+x_n=x_n^3$.

（3） 令 $\log_{x_{n+k}}a=b_k(k=0,1,\cdots,m)$，

因为 $x_{n+k}<x_{n+k-1}^3$，且 $x_1\in(0,a)$，$a\in(0,1)$，

所以 $\log_a x_{n+k}>\log_a x_{n+k-1}^3$，

从而有

$$\begin{aligned}b_k&=\log_{x_{n+k}}a<\log_{x_{n+k-1}^3}a\\&=\left(\frac{1}{3}\right)b_{k-1}<\left(\frac{1}{3}\right)^2 b_{k-2}<\cdots<\left(\frac{1}{3}\right)^k b_0.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\log_{x_n}a+\log_{x_{n+1}}a+\cdots+\log_{x_{n+m}}a\\=&\ b_0+b_1+\cdots+b_m<b_0\left[1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^m\right]\\=&\ \frac{3}{2}b_0\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{m+1}\right]<\frac{3}{2}b_0,\end{aligned}$$

要证 $\log_{x_n}a+\log_{x_{n+1}}a+\cdots+\log_{x_{n+m}}a<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$，

只需证 $\frac{3}{2}b_0<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$，

即证 $b_0<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\Leftrightarrow\log_{x_n}a<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\Leftrightarrow x_n<a^{3^{n-1}}$，

由（2）及 $x_1 \in (0,a)$，

可得 $x_n < x_{n-1}^3 < x_{n-2}^{3^2} < \cdots < x_1^{3^{n-1}} < a^{3^{n-1}}$.

14.（1） 因为 $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$，

所以 $a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1})$，

因为 $a_1 = 1$，$a_2 = 3$，

所以 $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}} = 2,(n \in \mathbf{N}^*,n \geq 2)$，

所以数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是以 $a_2 - a_1$ 为首项，2 为公比的等比数列，

则 $a_{n+1} - a_n = 2^n$，

所以

$$\begin{aligned} a_n &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 \\ &= \frac{1\times(1-2^n)}{1-2} = 2^n - 1. \end{aligned}$$

（2） $b_n = 2\log_4(a_n+1)^2 = 2\log_4(2^n - 1 + 1)^2 = 2\log_{42}^{2n} = 2n$.

则

$$\begin{aligned} &\frac{1}{b_1^2 - 1} + \frac{1}{b_2^2 - 1} + \cdots + \frac{1}{b_n^2 - 1} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

15.（1） $y' = (x^{2n+2}+1)' = (2n+2)x^{2n+1}$，曲线 $y = x^{2n+2} + 1$ 在点 $(1,2)$ 处的切线斜率为 $2n+2$.

从而切线方程为 $y - 2 = (2n+2)(x-1)$.

令 $y = 0$，解得切线与 x 轴交点的横坐标 $x_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

所以数列 $\{x_n\}$ 的通项公式 $x_n = \frac{n}{n+1}$.

（2） 由题设和（1）中的计算结果知

$$T_n = x_1^2 x_3^2 \cdots x_{2n-1}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdots\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2.$$

当 $n = 1$ 时，$T_1 = \frac{1}{4}$.

当 $n \geq 2$ 时，因为 $x_{2n-1}^2 = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 = \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2} > \frac{(2n-1)^2-1}{(2n)^2} = \frac{2n-2}{2n} = \frac{n-1}{n}$，所以

$$T_n > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{4n}.$$

综上可得，对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$，均有 $T_n \geq \frac{1}{4n}$.

16.（1） 由 ${S_n}^2 - (n^2+n-2)S_n - 2(n^2+n) = 0$，

得 ${S_1}^2 - (1^2+1-2)S_1 - 2(1^2+1) = 0$，

又 $S_1 = a_1$，可得 $a_1 = 2$.

（2） 由 ${S_n}^2 - (n^2+n-2)S_n - 2(n^2+n) = 0$，

得 $(S_n+2)[S_n - (n^2+n)] = 0$，

又 $a_n>0$，所以 $S_n+2>0$，所以 $S_n=n^2+n$，
当 $n\ge 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n$，由（1）知 $a_1=2$，
综上可得 $a_n=2n$.

（3）由（2）知 $a_n=2n$，所以 $\frac{a_n+1}{a_n}=\frac{2n+1}{2n}>\sqrt{\frac{4n^2+4n}{4n^2}}=\sqrt{\frac{n+1}{n}}$,

所以 $\frac{a_1+1}{a_1}\times\frac{a_2+1}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_n+1}{a_n}>\sqrt{\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}}=\sqrt{n+1}$,

所以 $\frac{a_1+1}{a_1}\times\frac{a_2+1}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_n+1}{a_n}>\sqrt{n+1}$.

17.（1）因为 $a_{n+1}+1=2-\frac{4}{a_n+3}=\frac{2a_n+2}{a_n+3}$,

所以 $b_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}+1}=\frac{a_n+3}{2a_n+2}=\frac{(a_n+1)+2}{2(a_n+1)}=\frac{1}{a_n+1}+\frac{1}{2}=b_n+\frac{1}{2}$,

又 $b_1=\frac{1}{2}$，所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$，公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列，

所以 $b_n=\frac{n}{2}$.

（2）当 $n=1$ 时，左边 $=\frac{1}{b_1^2}=4<7$，不等式成立；

当 $n=2$ 时，左边 $=\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{b_2^2}=4+1=5<7$，不等式成立；

当 $n\ge 3$ 时，$\frac{1}{b_n^2}=\frac{4}{n^2}<\frac{4}{n(n-1)}=4\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$,

$$
\begin{aligned}
\text{左边}&=\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{b_2^2}+\cdots+\frac{1}{b_n^2}\\
&<4+1+4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\
&=5+4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\\
&=7-\frac{4}{n}<7,
\end{aligned}
$$

所以不等式成立，
综上所述原不等式成立.

18.（1）因为 $a_1=\frac{1}{2}$，且 $a_{n+1}-a_n=a_n^2+1>0$，

所以 $a_n>0$，

由条件得：$\frac{a_{n+1}}{a_n}=a_n+\frac{1}{a_n}+1\ge 3$.

（2）由 (1) 得 $\frac{a_n}{a_{n+1}}\le\frac{1}{3}$，即 $\frac{1}{a_{n+1}}\le\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a_n}$,

所以 $S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\le\frac{1}{a_1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a_1}+\frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\cdot\frac{1}{a_1}$

$=\frac{1}{a_1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)$

$=3\left(1-\frac{1}{3^n}\right)<3$.

19.（1）由 $a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n^2+1}$，得 $a_n>0(n\in\mathbf{N})$，

则 $a_{n+1}-a_n=\frac{a_n}{a_n^2+1}-a_n=\frac{-a_n^3}{a_n^2+1}<0$，

所以 $a_{n+1}<a_n$；

（2）由（1）知 $0<a_n<1$，又 $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n^2+1}$，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{a_n^2+1}\ge\frac{1}{2}$，即 $a_{n+1}\ge\frac{1}{2}a_n$，

所以 $a_n \geq \frac{1}{2}a_{n-1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2 a_{n-1} \geq \cdots \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2 a_{n-1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} a_1 = \frac{1}{2^{n-1}}$，即 $a_n \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.

由 $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n^2+1}$，则 $\frac{1}{a_{n+1}} = a_n + \frac{1}{a_n}$,

所以 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = a_n$，

所以 $\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = a_1 = 1$，$\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} = a_2 \geq \frac{1}{2}$，$\frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_3} = a_3 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2$,$\cdots$,$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} = a_{n-1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$，

累加得 $\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1} \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$，

而 $a_1 = 1$，

所以 $\frac{1}{a_n} \geq 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{3\cdot 2^{n-2}-1}{2^{n-2}} = \frac{3\cdot 2^n-4}{2^n}$,

所以 $a_n \leq \frac{2^n}{3\cdot 2^n-4}$.

综上得 $\frac{1}{2^{n-1}} \leq a_n \leq \frac{2^n}{3\cdot 2^n-4}$.

20.（1） 因为数列 a_1，$a_2 - a_1$，$a_3 - a_2$，$\cdots$，$a_n - a_{n-1}$ 的前 5 项和为 9，

所以 $a5 = 9$.

因为 $S_{10} = 5(a_5 + a_6) = 100$，

所以 $a_6 = 11$，

所以 $d = 2$，$a_1 = 1$.

所以 $a_n = 2n - 1(n \in \mathbf{N}_+)$.

（2） 因为

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{a_n+3}{n^2\cdot(n+2)^2} \\ &= \frac{2n+2}{n^2\cdot(n+2)^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{4n+4}{n^2\cdot(n+2)^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}\right), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{25}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2}\right] \\ &< \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

21.（1） 由题意可得 $P_n\left(x_n, \frac{2}{x_n}\right)$，$P_{n+1}\left(x_{n+1}, \frac{2}{x_{n+1}}\right)$，$A_n(a_n, 0)$，

由 $\overrightarrow{P_nP_{n+1}} \perp \overrightarrow{A_nP_{n+1}}$，可得 $(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - a_n) + \left(\frac{2}{x_{n+1}} - \frac{2}{x_n}\right)\cdot\frac{2}{x_{n+1}} = 0$，

化简可得 $x_{n+1} - a_n = \frac{4}{x_n x_{n+1}^2}$,

由 $|\overrightarrow{P_nP_{n+1}}| = |\overrightarrow{A_nP_{n+1}}|$，可得 $(x_{n+1} - x_n)^2 + \left(\frac{2}{x_{n+1}} - \frac{2}{x_n}\right)^2 = (x_{n+1} - a_n)^2 + \left(\frac{2}{x_{n+1}}\right)^2$，

即 $(x_{n+1}-x_n)^2\left(1+\frac{4}{x_n^2x_{n+1}^2}\right)=\frac{4}{x_{n+1}^2}\left(1+\frac{4}{x_n^2x_{n+1}^2}\right)$,

由 $x_{n+1}>x_n$，可得 $x_{n+1}-x_n=\frac{2}{x_{n+1}}$.

（2） 当 $n=2$ 时，$x_2-x_1=\frac{2}{x_2}$，由 $x_1=1$，可得 $x_2=2$，满足 $1<2^2\leq 4$；

由 $x_{n+1}-x_n=\frac{2}{x_{n+1}}$，可得 $x_{n+1}^2=2+x_nx_{n+1}$，$x_2^2=2+x_1x_2\geq 4$，$x_3^2=2+x_2x_3>6$，…，$x_{n+1}^2=2+x_nx_{n+1}>2n+2$，

相加可得，$x_2^2+x_3^2+\cdots+x_{n+1}^2>\frac{1}{2}n(6+2n)=n^2+3n>n^2$.

又 $x_2^2=2+x_1x_2\leq 4$，$x_3^2=2+x_2x_3<8$，…，$x_{n+1}^2=2+x_nx_{n+1}<4n$，

相加可得，$x_2^2+x_3^2+\cdots+x_{n+1}^2<\frac{1}{2}n(4+4n)=2n^2+2n<4n^2$.

则有 $n^2<x_2^2+x_3^2+\cdots+x_{n+1}^2\leq 4n^2$.

22.（1） 由题意知 $p_2=\frac{2\mathrm{A}_2^2}{\mathrm{A}_3^3}=\frac{2}{3}$，即 p_2 的值为 $\frac{2}{3}$.

（2） 先排第 n 行，则最大数在第 n 行的概率为 $\frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n+1}$;

去掉第 n 行已经排好的 n 个数，

则余下的 $\frac{n(n+1)}{2}-n=\frac{n(n-1)}{2}$ 个数中最大数在第 $n-1$ 行的概率为 $\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{2}{n}$;

…

故 $p_n=\frac{2}{n+1}\times\frac{2}{n}\times\cdots\times\frac{2}{3}=\frac{2^{n-1}}{(n+1)\times n\times\cdots\times 3}=\frac{2^n}{(n+1)!}$.

由于 $2^n=(1+1)^n=\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n\geq\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2>\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2=\mathrm{C}_{n+1}^2$，

故 $\frac{2^n}{(n+1)!}>\frac{\mathrm{C}_{n+1}^2}{(n+1)!}$，即 $p_n>\frac{\mathrm{C}_{n+1}^2}{(n+1)!}$.

23.（1） 因为 $a_1=\frac{2}{5}$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{3-a_n}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

所以 $a_2=\frac{2\times\frac{2}{5}}{3-\frac{2}{5}}=\frac{4}{13}$.

（2） 因为 $a_1=\frac{2}{5}$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{3-a_n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

所以 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{2a_n}-\frac{1}{2}$，

化为：$\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$，

所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$ 是等比数列，首项与公比都为 $\frac{3}{2}$.

所以 $\frac{1}{a_n}-1=\left(\frac{3}{2}\right)^n$，

解得 $\frac{1}{a_n}=1+\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

（3） 一方面：由（2）可得：$a_n=\frac{1}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^n}\geq\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}=\frac{2}{5}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，

所以

$$
\begin{aligned}
S_n &\geq \frac{2}{5}\left[1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]\\
&=\frac{2}{5}\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\\
&=\frac{6}{5}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right],
\end{aligned}
$$

因此不等式左边成立.

另一方面：$a_n=\frac{1}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^n}<\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$，

所以

$$
\begin{aligned}
S_n &\leq \frac{2}{5}+\frac{4}{13}+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n\\
&=\frac{46}{65}+\frac{8}{27}\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}{1-\frac{2}{3}}\\
&<\frac{46}{65}+\frac{8}{27}\times 3\\
&<\frac{21}{13}(n\geq 3).
\end{aligned}
$$

又 $n=1,2$ 时也成立，因此不等式右边成立.

综上可得：$\frac{6}{5}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\leq S_n<\frac{21}{13}$.

24.（1） 易知 $a_n>0$，所以 $a_{n+1}=a_n+\frac{a_n^2}{n^2}>a_n$，

所以 $a_{k+1}=a_k+\frac{a_k^2}{k^2}<a_k+\frac{a_ka_{k+1}}{k^2}$，

所以 $\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}<\frac{1}{k^2}$，

所以，当 $n\geq 2$ 时，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a_n} &=\frac{1}{a_1}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)\\
&>\frac{1}{a_1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}\\
&>3-\left[1+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k(k-1)}\right]\\
&=3-\left[1+\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\right]\\
&=3-\left[1+1-\frac{1}{n-1}\right]\\
&=\frac{n}{n-1}\\
&>1.
\end{aligned}
$$

所以 $a_n<1$，

又 $a_1=\frac{1}{3}<1$，所以 $a_n<1(n\in\mathbf{N}^*)$.

所以 $a_n<a_{n+1}<1(n\in\mathbf{N}^*)$.

（2） 当 $n=1$ 时，显然成立.

由 $a_n<1$，知 $a_{k+1}=a_k+\frac{a_k^2}{k^2}<a_k+\frac{a_k}{k^2}$，所以 $a_k>\frac{k^2}{k^2+1}a_{k+1}$，

所以 $a_{k+1}=a_k+\frac{a_k^2}{k^2}>a_k+\frac{1}{k^2}a_k\cdot\frac{k^2}{k^2+1}a_{k+1}=a_k+\frac{1}{k^2+1}a_ka_{k+1}$，

所以 $\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}>\frac{1}{k^2+1}$，

所以，当 $n\geq 2$ 时，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a_n} &= \frac{1}{a_1} - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) \\
&< \frac{1}{a_1} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2+1} \\
&< 3 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)} \\
&= 3 - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= 3 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{2n+1}{n}.
\end{aligned}
$$

即 $a_n > \frac{n}{2n+1}$.

所以 $a_n \geq \frac{n}{2n+1}(n \in \mathbf{N}^*)$.

25.（1） 当 $a_n = 2^{n-1}$ 时，$b_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{3}{2^{n+2}}$.

所以 $S_n = \frac{3}{8}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{3}{4} - \frac{3}{2^{n+2}}$.

（2） 满足条件的数列 $\{a_n\}$ 存在且只有两个，其通项公式为 $a_n = 1$ 和 $a_n = (-1)^{n-1}$.

在 $b_{n+2} = S_n$ 中，令 $n = 1$ 得 $b_3 = b_1$.

设 $a_n = q^{n-1}$，则 $b_n = \left(1 - \frac{1}{q^2}\right)\frac{1}{q^n}$.

由 $b_3 = b_1$，得 $\left(1 - \frac{1}{q^2}\right)\frac{1}{q^3} = \left(1 - \frac{1}{q^2}\right)\frac{1}{q}$.

若 $q = \pm 1$ 则 $b_n = 0$，满足题设条件.

此时 $a_n = 1$ 和 $a_n = (-1)^{n-1}$；

若 $q \neq \pm 1$，则 $\frac{1}{q^3} = \frac{1}{q}$，即 $q^2 = 1$，矛盾.

综上，满足条件的数列 $\{a_n\}$ 存在且只有两个，一个是 $a_n = 1$，另一个是 $a_n = (-1)^{n-1}$.

（3） 因为 $1 = a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$，故 $a_n > 0$，$0 < \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$，

于是 $0 < \frac{a_n^2}{a_{n+1}^2} \leq 1$.

所以 $b_n = \left(1 - \frac{a_n^2}{a_{n+1}^2}\right) \cdot \frac{1}{a_{n+1}} \geq 0$，$n = 1,2,3,\cdots$.

所以 $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n \geq 0$．又

$$
\begin{aligned}
b_n &= \left(1 - \frac{a_n^2}{a_{n+1}^2}\right) \cdot \frac{1}{a_{n+1}} \\
&= \left(1 + \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\frac{1}{a_{n+1}} \\
&= \left(1 + \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} \\
&\leq 2\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right).
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
S_n &= b_1+b_2+\cdots+b_n \\
&\le 2\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+2\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+2\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right) \\
&= 2\left(1-\frac{1}{a_{n+1}}\right) \\
&< 2.
\end{aligned}
$$

所以 $0\le S_n<2$.

26.（1） $a_2=2a_1^2+2a_1=12$，

$a_3=2a_2^2+2a_2=312$.

由点 (a_n,a_{n+1}) 在 $f(x)=2x^2+2x$ 的图象上，得 $a_{n+1}=2a_n^2+2a_n$，

则 $2a_{n+1}+1=2\left(2a_n^2+2a_n\right)+1=(2a_n+1)^2$，

所以 $\{2a_n+1\}$ 是“平方递推数列”.

又 $\lg(2a_{n+1}+1)=\lg(2a_n+1)^2=2\lg(2a_n+1),n\ge 1$，

且 $\lg(2a_1+1)=\lg 5\ne 0$.

则数列 $\{\lg(2a_n+1)\}$ 为等比数列.

（2） 由（1），得 $\lg(2a_n+1)=\lg(2a_1+1)\times 2^{n-1}=2^{n-1}\lg 5$，

则 $2a_n+1=5^{2^{n-1}}$，解得 $a_n=\frac{5^{2^{n-1}}-1}{2}$.

$$
\begin{aligned}
T_n &= (2a_1+1)(2a_2+1)\cdots(2a_n+1) \\
&= 5^{2^{1-1}}\cdot 5^{2^{2-1}}\cdots 5^{2^{n-1}} \\
&= 5^{2^0+2^1+\cdots+2^{n-1}} \\
&= 5^{2^n-1}.
\end{aligned}
$$

（3） $b_n=\frac{\log_5 T_n+1}{(\log_5 T_n)^2}=\frac{2^n-1+1}{(2^n-1)^2}=\frac{2^n}{(2^n-1)^2}$.

$n\ge 2$ 时，$b_n=\frac{2^n}{(2^n-1)^2}<\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n-1}-1)}=2\left[\frac{1}{2^{n-1}-1}-\frac{1}{2^n-1}\right]$，

$$
\begin{aligned}
S_n &= b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n \\
&< b_1+\frac{1}{2^{2-1}}-\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{2^{3-1}}-\frac{1}{2^3-1}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}-1}-\frac{1}{2^n-1} \\
&= 2+\frac{1}{2^{2-1}}-\frac{1}{2^n-1} \\
&= 2+1-\frac{1}{2^n-1}<3.
\end{aligned}
$$

$n=1$ 时，$S_n=b_1=2<3$.

故 $S_n<3$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立.

27.（1） 由 $f(x)=(1+x)^a-ax$，求导 $f'(x)=a(1+x)^{a-1}-a=a[(1+x)^{a-1}-1]$，

当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>0$，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极大值，也是最大值 $f(0)=1$，

所以 $f(x)$ 的最大值为 1；

（2） ①当 a，b 中有一个大于 1 时，不妨设 $a\ge 1$，$a^b+b^a>a^b>1$，

②当 a，b 均属于 $(0,1)$，设 $a=\frac{1}{1+m}$，$b=\frac{1}{1+n}(m,n>0)$，则

$a^b \quad =\left(\frac{1}{1+m}\right)^{\frac{1}{1+n}}$

$=\frac{1}{(1+m)^{\frac{1}{1+n}}}$

$\geq \frac{1}{1+\frac{m}{1+n}}$

$=\frac{1+n}{1+m+n}$,

同理可知：$b^a \geq \frac{1+m}{1+m+n}$，

所以 $a^b+b^a>\frac{1+n}{1+m+n}+\frac{1+m}{1+m+n}=\frac{2+m+n}{1+m+n}>1$，

所以 $a^b+b^a>1$.

28.（1） 当 $b=1$ 时，$g(x)=\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)$，$x\in(-1,+\infty)$，

$g'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}=\frac{-x}{(1+x)^2}$,

当 $x\in(-1,0)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

所以函数 $g(x)$ 的最大值 $g(0)=0$.

（2） $f'(x)=\frac{1}{1+x}-a$，

因为 $x\in[0,+\infty)$，

所以 $\frac{1}{1+x}\in(0,1]$.

①当 $a\geq 1$ 时，$f'(x)\leq 0$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是减函数，

所以 $f(x)\leq f(0)=0$ 适合题意.

②当 $a\leq 0$ 时，$f'(x)=\frac{1}{1+x}-a>0$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，

所以 $f(x)=\ln(1+x)-ax>f(0)=0$，不能使 $f(x)<0$ 在 $[0,+\infty)$ 恒成立.

③当 $0<a<1$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{a}-1$，

当 $x\in\left[0,\frac{1}{a}-1\right)$ 时，$f'(x)\geq 0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{a}-1\right)$ 上为增函数，

所以 $f(x)>f(0)=0$，不能使 $f(x)<0$ 在 $[0,+\infty)$ 恒成立，

所以 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

（3） 由（Ⅰ）得 $\frac{x}{1+x}-\ln(x+1)\leq 0$，

所以 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)(x>0)$，

取 $x=\frac{1}{n}$，则 $\frac{1}{1+n}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，$x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{i^2+1}-\ln n$，则 $x_1=\frac{1}{2}$，

所以

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= \frac{n}{n^2+1} - [\ln n - \ln(n-1)] \\ &= \frac{n}{n^2+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right) \\ &< \frac{n}{n^2+1} - \frac{1}{n} \\ &= -\frac{1}{(n^2+1)n} \\ &< 0, \end{aligned}$$

所以 $x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1 = \frac{1}{2}$,

所以 $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{i^2+1} - \ln n \le \frac{1}{2}$.

29. （1） $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$，令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 1$，

所以当 $0 < x < 1$ 时，$f'(x) > 0$，当 $x > 1$ 时，$f'(x) < 0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(1) =- 4$.

（2） 因为 $f(x) = \ln x - x - 3$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x) < f(1) =- 4$，即 $\ln x - x - 3 <- 4$，

所以 $\ln x < x - 1$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $\ln\left(\frac{1}{n^2} + 1\right) < \frac{1}{n^2}$,

所以

$$\begin{aligned} & \ln(2^2+1) + \ln(3^2+1) + \ln(4^2+1) + \cdots + \ln(n^2+1) - 2\ln n! \\ = & \ln\frac{(2^2+1)\cdot(3^2+1)\cdot\cdots\cdot(n^2+1)}{n^2\cdot(n-1)^2\cdot(n-2)^2\cdot\cdots\cdot 2^2} \\ = & \ln\left[\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ = & \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \\ < & \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\ < & \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} \\ = & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ = & 1 - \frac{1}{n} \\ < & 1. \end{aligned}$$

30. （1） 由 $f(x) = x^2\ln x$，得 $f'(x) = x(2\ln x + 1)$.

当 $0 < x < \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ 时，$f'(x) < 0$；当 $x > \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ 时，$f'(x) > 0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$ 上为减函数，在 $\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},+\infty\right)$ 上为增函数.

所以函数 $f(x)_{\min} = f\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) =- \frac{1}{2\mathrm{e}}$.

（2） 存在 $x \in (0,+\infty)$，使 $f(x) > g(x)$ 成立，

即 $\ln x > ax - 1$ 在 $x \in (0,+\infty)$ 上有解，

只需 $a < \left(\frac{\ln x + 1}{x}\right)_{\max}$.

设 $F(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$，则 $F'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$.

当 $0 < x < 1$ 时，$F'(x) > 0$；当 $x > 1$ 时，$F'(x) < 0$，

所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上为增函数，在 $(1,+\infty)$ 上为减函数.

由此，$F(x)_{\max}=1$.

所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty,1)$.

（3） 关于 x 的方程 $f(x)-g(x)=0$ 在 $\left[e^{-\frac{1}{3}},e^{n}\right]$ 上有解，

等价于关于 x 的方程 $a=\frac{\ln x+1}{x}$ 在 $\left[e^{-\frac{1}{3}},e^{n}\right]$ 上有解.

而由（2）知，$F(x)_{\min}=\min\left\{F\left(e^{-\frac{1}{3}}\right),F(e^{n})\right\}$.

因为 $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为减函数，所以 $F(e)>F(e^{n})$；

又 $F\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)=\frac{2}{3}e^{\frac{1}{3}}>F(e)=\frac{2}{e}$,

所以 $F\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)>F(e^{n})$,

从而 a 的最小值是 $a_n=F(x)_{\min}=F(e^{n})=\frac{n+1}{e^{n}}$.

因为 $a_n=\frac{n+1}{e^{n}}<\frac{n+1}{2^{n}}$,

所以要证明 $S_n<3$，只要证明

$$T_n=\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n+1}{2^n}<3.$$

因为

$$T_n=\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n+1}{2^n},$$

所以

$$\frac{1}{2}T_n=\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n+1}{2^{n+1}},$$

以上两式相减，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}T_n&=\frac{2}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}\\&=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}\\&=\frac{3}{2}-\frac{n+3}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

所以 $T_n=3-\frac{n+3}{2^n}<3$ 成立，因此 $S_n<3$ 成立.

31.（1） 由题意知，$a_n=3n-2$，$g(n)=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+2}}+\cdots+\frac{1}{a_{n^2}}$

当 $n=2$ 时，$g(2)=\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}=\frac{69}{140}>\frac{1}{3}$.

（2） 用数学归纳法加以证明：

①当 $n=3$ 时，

$$
\begin{aligned}
g(3)= &\ \frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\cdots+\frac{1}{a_9}\\
= &\ \frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{13}+\frac{1}{16}+\frac{1}{19}+\frac{1}{22}+\frac{1}{25}\\
= &\ \frac{1}{7}+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{13}+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{19}+\frac{1}{22}+\frac{1}{25}\right)\\
> &\ \frac{1}{8}+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}\right)\\
= &\ \frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{3}{32}\\
> &\ \frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{1}{16}\\
> &\ \frac{1}{3},
\end{aligned}
$$

所以当 $n=3$ 时，结论成立.

②假设当 $n=k$ 时，结论成立，即 $g(k)>\frac{1}{3}$,

则 $n=k+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
g(k+1)= &\ g(k)+\left(\frac{1}{a_{k^2+1}}+\frac{1}{a_{k^2+2}}+\cdots+\frac{1}{a_{(k+1)^2}}-\frac{1}{a_k}\right)\\
> &\ \frac{1}{3}+\left(\frac{1}{a_{k^2+1}}+\frac{1}{a_{k^2+2}}+\cdots+\frac{1}{a_{(k+1)^2}}-\frac{1}{a_k}\right)\\
> &\ \frac{1}{3}+\frac{(2k+1)}{3(k+1)^2-2}-\frac{1}{3k-2}\\
= &\ \frac{1}{3}+\frac{(2k+1)(3k-2)-[3(k+1)^2-2]}{[3(k+1)^2-2][3k-2]}\\
= &\ \frac{1}{3}+\frac{3k^2-7k-3}{[3(k+1)^2-2][3k-2]},
\end{aligned}
$$

由 $k\geq 3$，可知 $3k^2-7k-3>0$，即 $g(k+1)>\frac{1}{3}$.

所以当 $n=k+1$ 时，结论也成立.

综合①②可得，当 $n\geq 3$ 时，$g(n)>\frac{1}{3}$.

32.（1） 当 $n\geq 2$ 时，$S_{n-1}-S_n=\frac{2S_n^2}{2S_n-1}$，$S_n-S_{n-1}=2S_nS_{n-1}$，$\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=2$，从而 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 构成以 1 为首项，2 为公差的等差数列.

（2） 由（1）可知，$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{S_1}+(n-1)\times 2=2n-1$，

所以 $S_n=\frac{1}{2n-1}$.

当 $n\geq 2$ 时，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}S_n &=\frac{1}{n(2n-1)}<\frac{1}{n(2n-2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n(n-1)}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}
$$

所以

$S_1+\frac{1}{2}S_2+\frac{1}{3}S_3+\cdots+\frac{1}{n}S_n$
$<1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$
$<\frac{3}{2}-\frac{1}{2n}<\frac{3}{2}.$

33.（1） 由 $\left|a_n-\frac{a_{n+1}}{2}\right|\le 1$，

得 $|a_n|-\frac{1}{2}|a_{n+1}|\le 1$，

故 $\frac{|a_n|}{2^n}-\frac{|a_{n+1}|}{2^{n+1}}\le\frac{1}{2^n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

所以

$$\frac{|a_1|}{2^1}-\frac{|a_n|}{2^n}=\left(\frac{|a_1|}{2^1}-\frac{|a_2|}{2^2}\right)+\left(\frac{|a_2|}{2^2}-\frac{|a_3|}{2^3}\right)+\cdots+\left(\frac{|a_{n-1}|}{2^{n-1}}-\frac{|a_n|}{2^n}\right)\le\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<1,$$

因此 $|a_n|\ge 2^{n-1}(|a_1|-2)$.

（2） 任取 $n\in\mathbf{N}^*$，由（1）知，对于任意 $m>n$，

$$\frac{|a_n|}{2^n}-\frac{|a_m|}{2^m}=\left(\frac{|a_n|}{2^n}-\frac{|a_{n+1}|}{2^{n+1}}\right)+\left(\frac{|a_{n+1}|}{2^{n+1}}-\frac{|a_{n+2}|}{2^{n+2}}\right)+\cdots+\left(\frac{|a_{m-1}|}{2_{m-1}}-\frac{|a_m|}{2^m}\right)\le\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{m-1}}<\frac{1}{2^{n-1}}.$$

故 $|a_n|<\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{|a_m|}{2^m}\right)\cdot 2^n\le\left[\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^m}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^m\right]\cdot 2^n=2+\left(\frac{3}{4}\right)^m\cdot 2^n$.

从而对于任意 $m>n$，均有 $|a_n|<2+\left(\frac{3}{4}\right)^m\cdot 2^n$. ……①

由 m 的任意性得 $|a_n|\le 2$.

否则，存在 $n_0\in\mathbf{N}^*$，有 $|a_{n_0}|>2$，取正整数 $m_0>\log_{\frac{3}{4}}\frac{|a_{n_0}|-2}{2^{n_0}}$ 且 $m_0>n_0$，则

$2^{n_0}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{m_0}<2^{n_0}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_{\frac{3}{4}}\frac{|a_{n_0}|-2}{2^{n_0}}}=|a_{n_0}|-2$，与 ① 式矛盾.

综上，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，均有 $|a_n|\le 2$.

34.（1） 因为 $2na_{n+1}=(n+1)a_n$，当 $n=1$ 时，得 $a_2=a_1$，

当 $n=2$ 时，$4a_3=3a_2$，所以 $4a_3=3a_1$.

又因为 $a_1,1,4a_3$ 成等差数列，所以 $a_1+3a_1=2$，所以 $a_1=\frac{1}{2}$.

由 $2na_{n+1}=(n+1)a_n$, 变形得 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{1}{2}\times\frac{a_n}{n}$, 其中 $n\in\mathrm{N}^*$.

所以 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.

所以 $\frac{a_n}{n}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^n}$, 所以 $a_n=\frac{n}{2^n}$.

（2） $b_n=\sin(\pi a_n)=\sin\frac{n\pi}{2^n}$,

所以 $S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=1+1+\sin\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{4\pi}{16}+\sin\frac{5\pi}{32}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{2^n}$.

易知当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin x<x$ 成立.

所以 $S_n<2+\frac{3\pi}{8}+\frac{4\pi}{16}+\frac{5\pi}{32}+\cdots+\frac{n\pi}{2^n}$.

令 $T=\frac{3\pi}{8}+\frac{4\pi}{16}+\frac{5\pi}{32}+\cdots+\frac{n\pi}{2^n}$ ①

则 $\frac{1}{2}T=\frac{3\pi}{16}+\frac{4\pi}{32}+\frac{5\pi}{64}+\cdots+\frac{(n-1)\pi}{2^n}+\frac{n\pi}{2^{n+1}}$ ②

①－②，得 $\frac{1}{2}T=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{32}+\cdots+\frac{\pi}{2^n}-\frac{n\pi}{2^{n+1}}=\frac{3\pi}{8}+\frac{\frac{\pi}{16}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n\pi}{2^{n+1}}$.

化简，得 $T=\pi-\frac{(n+2)\pi}{2^n}<\pi$.

即 $S_n<2+\pi$.

35. 当 n=1 时，由已知易得，$a_1=0$，

$b_1=\frac{a_1}{1}=0$，$|b_1|=0\le\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$，结论成立.

（1）当 $n=2$ 时，$a_1=-a_2$，

所以 $2|a_1|=|a_1|+|a_2|\le 1$，即 $|a_1|\le\frac{1}{2}$,

所以 $|b_1+b_2|=|a_1+\frac{a_2}{2}|=\frac{|a_1|}{2}\le\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\times 2}$，即当 $n=2$ 时，结论成立.

（2）假设当 $n=k$（$k\in\mathbf{N}^*$ 且 $k\ge 2$）时，结论成立，

即当 $a_1+a_2+\cdots+a_k=0$，且 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_k|\le 1$ 时，

有 $|b_1+b_2+\cdots+b_k|\le\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}$.

则当 $n=k+1$ 时，由 $a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}=0$，且 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{k+1}|\le 1$，

因为 $2|a_{k+1}|=|a_1+a_2+\cdots+a_k|+|a_{k+1}|\le|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{k+1}|\le 1$，

所以 $|a_{k+1}|\le\frac{1}{2}$,

又因为 $a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+(a_k+a_{k+1})=0$，且 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{k-1}|+|a_k+a_{k+1}|\le|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{k+1}|\le 1$，

由假设可得 $|b_1+b_2+\cdots+b_{k-1}+\frac{a_k+a_{k+1}}{k}|\le\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}$,

所以

$$\begin{aligned}|b_1+b_2+\cdots+b_k+b_{k+1}| &=|b_1+b_2+\cdots+b_{k-1}+\frac{a_k}{k}+\frac{a_{k+1}}{k+1}|\\ &=|\left(b_1+b_2+\cdots+b_{k-1}+\frac{a_k+a_{k+1}}{k}\right)+\left(\frac{a_{k+1}}{k+1}-\frac{a_{k+1}}{k}\right)|\\ &\le\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+|\frac{a_{k+1}}{k+1}-\frac{a_{k+1}}{k}|\\ &=\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)|a_{k+1}|\\ &\le\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\times\frac{1}{2}\\ &=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(k+1)},\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时，结论成立.

综上，由（1）和（2）可知，结论成立.

36.（1） $f'(x)=\frac{1}{x}-m=\frac{1-mx}{x}$，$x\in(0,+\infty)$.

当 $m\le 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，则函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $m>0$ 时，由 $f'(x)=\frac{1}{x}-m=\frac{1-mx}{x}>0$.

则 $x\in\left(0,\frac{1}{m}\right)$，则 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{m}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{m},+\infty\right)$ 上单调递减.

（2） 由（1）得：当 $m\le 0$ 时显然不成立；

当 $m>0$ 时，$f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{m}\right)=\ln\frac{1}{m}-1+m=m-\ln m-1$ 只需 $m-\ln m-1\leq 0$ 即 令 $g(x)=x-\ln x-1$，

则 $g'(x)=1-\frac{1}{x}$，函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=0$．则若 $f(x)\leq 0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，$m=1$．

（3）

$$\begin{aligned}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}&=\frac{\ln b-\ln a+a-b}{b-a}\\&=\frac{\ln b-\ln a}{b-a}-1\\&=\frac{\ln\frac{b}{a}}{\frac{b}{a}-1}\cdot\frac{1}{a}-1.\end{aligned}$$

由 $0<a<b$ 得 $\frac{b}{a}>1$，

由（2）得：$\ln\frac{b}{a}\leq\frac{b}{a}-1$，则 $\frac{\ln\frac{b}{a}}{\frac{b}{a}-1}\cdot\frac{1}{a}-1\leq\frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a}=\frac{1-a^2}{a(1+a)}<\frac{1}{a(1+a)}$，

则原不等式 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{1}{a(1+a)}$ 成立.

37.（1） 函数 $f(x)=\frac{1}{x}+k\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{k}{x}$.

当 $k=1$ 时，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$，

所以 $f'(x),f(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 $f(1)=1$，无极大值.

$f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $(1,+\infty)$.

（2） 因为关于 x 的方程 $f(x)=k$ 有解，

令 $g(x)=f(x)-k$，则问题等价于函数 $g(x)$ 存在零点，

所以 $g'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{k}{x}=\frac{kx-1}{x^2}$.

令 $g'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{k}$.

当 $k<0$ 时，$g'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上成立，函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

而 $g(1)=1-k>0$，$g\left(e^{1-\frac{1}{k}}\right)=\frac{1}{e^{1-\frac{1}{k}}}+k\left(1-\frac{1}{k}\right)-k=\frac{1}{e^{1-\frac{1}{k}}}-1<\frac{1}{e}-1<0$，

所以函数 $g(x)$ 存在零点.

当 $k>0$ 时，$g'(x),g(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	$\left(0,\frac{1}{k}\right)$	$\frac{1}{k}$	$\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	极小值	↗

所以 $g\left(\frac{1}{k}\right)=k-k+k\ln\frac{1}{k}=-k\ln k$ 为函数 $g(x)$ 的最小值，

当 $g\left(\frac{1}{k}\right)>0$ 时，即 $0<k<1$ 时，函数 $g(x)$ 没有零点，

当 $g\left(\frac{1}{k}\right)\leq 0$ 时，即 $k\geq 1$ 时，注意到 $g(e)=\frac{1}{e}+k-k>0$，所以函数 $g(x)$ 存在零点.

综上，当 $k<0$ 或 $k\geq 1$ 时，关于 x 的方程 $f(x)=k$ 有解.

法二：

因为关于 x 的方程 $f(x)=k$ 有解，

所以问题等价于方程 $1+kx(\ln x-1)=0$ 有解，

令 $g(x)=kx(\ln x-1)+1$，所以 $g'(x)=k\ln x$，

令 $g'(x)=0$，得 $x=1$，

当 $k<0$ 时，$g'(x),g(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	极大值	↘

所以函数 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值，而 $g(1)=k(-1)+1>0$．$g\left(e^{1-\frac{1}{k}}\right)=1+ke^{1-\frac{1}{k}}\left(1-\frac{1}{k}-1\right)=1-e^{1-\frac{1}{k}}<0$，

所以函数 $g(x)$ 存在零点.

当 $k>0$ 时，$g'(x),g(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	极小值	↗

所以函数 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得最小值，而 $g(1)=k(-1)+1=1-k$.

当 $g(1)=k(-1)+1=1-k>0$ 时，即 $0<k<1$ 时，函数 $g(x)$ 不存在零点.

当 $g(1)=k(-1)+1=1-k\leq 0$，即 $k\geq 1$ 时，$g(e)=ke(\ln e-1)+1=1>0$ 所以函数 $g(x)$ 存在零点.

综上，当 $k<0$ 或 $k\geq 1$ 时，关于 x 的方程 $f(x)=k$ 有解.

法三：因为关于 x 的方程 $f(x)=k$ 有解，

所以问题等价于方程 $\frac{1}{k}=x(1-\ln x)$ 有解，

设函数 $g(x)=x(1-\ln x)$，所以 $g'(x)=-\ln x$.

令 $g'(x)=0$，得 $x=1$，$g'(x),g(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	极大值	↘

所以函数 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值，而 $g(1)=1$，

又当 $x>1$ 时，$1-\ln x<0$，所以 $x(1-\ln x)<1-\ln x$，

所以函数 $g(x)$ 的值域为 $(-\infty,1]$，

所以当 $\frac{1}{k}\in(-\infty,1]$ 时，关于 x 的方程 $f(x)=k$ 有解，

所以 $k\in(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$.

38.（1） $a_1=2$，$a_2=2(2+2)=8$，

$a_{n+1}=2(S_n+n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$，

$a_n=2(S_{n-1}+n)(n\geq 2)$，

两式相减，得 $a_{n+1}=3a_n+2(n\geq 2)$，
经检验，当 $n=1$ 时上式也成立，
即 $a_{n+1}=3a_n+2(n\geq 1)$.
故 $a_{n+1}+1=3(a_n+1)$，
即 $b_{n+1}=3b_n$，且 $b_1=3$，
故 $\{b_n\}$ 是等比数列.

（2） 由（1）得 $b_n=3^n$，

$T_n=1\times 3+2\times 3^2+3\times 3^3+\cdots+n\times 3^n$，

$3T_n=1\times 3^2+2\times 3^3+3\times 3^4+\cdots+n\times 3^{n+1}$，

两式相减，得

$$\begin{aligned}-2T_n&=3+3^2+3^3+\cdots+3^n-n\times 3^{n+1}\\&=\frac{3(1-3^n)}{1-3}-n\times 3^{n+1},\end{aligned}$$

化简得 $T_n=\left(\frac{3}{2}n-\frac{3}{4}\right)\cdot 3^n+\frac{3}{4}$.

（3） 由 $\frac{1}{a_k}=\frac{1}{3^k-1}>\frac{1}{3^k}$,

得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}\\>&\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\\=&\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}\\=&\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n},\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_k}&=\frac{1}{3^k-1}\\&=\frac{3^{k+1}-1}{(3^k-1)(3^{k+1}-1)}\\&<\frac{3^{k+1}}{(3^k-1)(3^{k+1}-1)}\\&=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3^k-1}-\frac{1}{3^{k+1}-1}\right),\end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}\\<&\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\left[\left(\frac{1}{3^2-1}-\frac{1}{3^3-1}\right)+\left(\frac{1}{3^3-1}-\frac{1}{3^4-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1}\right)\right]\\=&\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3^2-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1}\right)\\=&\frac{1}{2}+\frac{3}{16}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3^{n+1}-1}\\<&\frac{11}{16},\end{aligned}$$

故 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\times 3^n}<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{11}{16}$.

39.（1） 对 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=\frac{1}{x}+2x+a$，由题可得 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=2+1+a=0$，解得 $a=-3$，代入原函数符合题意.

（2）由（1）知 $f'(x)=\frac{2x^2+ax+1}{x}$，令 $f'(x)=0$，得 $2x^2+ax+1=0$.

①当 $\Delta\le 0$，即 $-2\sqrt{2}\le a\le 2\sqrt{2}$ 时，$2x^2+ax+1\ge 0$，$f'(x)\ge 0$ 在 $(0,+\infty)$ 内恒成立，此时 $f(x)$ 为增函数.

②当 $\Delta>0$，即 $a<-2\sqrt{2}$ 或 $a>2\sqrt{2}$ 时，要使 $f(x)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 内为增函数，只需在 $(0,+\infty)$ 内有 $2x^2+ax+1\ge 0$ 即可.

设 $h(x)=2x^2+ax+1$，结合 $h(0)=1>0$，可知只需二次函数对称轴 $-\frac{a}{4}<0$ 即可，解得 $a>0$，所以 $a>2\sqrt{2}$.

由① ②可知，若 $f(x)$ 在其定义域内为增函数，a 的取值范围是 $\left[-2\sqrt{2},+\infty\right)$.

（3）由题知 $g(x)=\ln x+ax+1$，当 $a=-1$ 时，$g(x)=\ln x-x+1$，其定义域是 $(0,+\infty)$，令 $g'(x)=\frac{1}{x}-1=0$，得 $x=1$. 则 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，也是最大值. 而 $g(1)=0$. 所以 $g(x)\le 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立. 因此 $\ln x\le x-1$. 因为 $n\in\mathbf{N}, n\ge 2$，所以 $\ln n^2\le n^2-1$. 则 $\frac{\ln n^2}{n^2}\le \frac{n^2-1}{n^2}=1-\frac{1}{n^2}$，所以

$$\begin{aligned}\frac{\ln 2^2}{2^2}+\frac{\ln 3^2}{3^2}+\cdots+\frac{\ln n^2}{n^2} &\le\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\\ &=(n-1)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\\ &<(n-1)-\left(\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)\\ &=(n-1)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &=\frac{2n^2-n-1}{2(n+1)}.\end{aligned}$$

所以结论成立.

40.（1）因为 $P_1(a_1,b_1)$ 是直线 $l{:}y=3x+1$ 与 y 轴的交点 $(0,1)$，

所以 $a_1=0$，$b_1=1$.

因为数列 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列，

所以 $a_n=n-1$.

因为点 $P_n(a_n,b_n)$ 在直线 $l{:}y=3x+1$ 上，

所以 $b_n=3a_n+1=3n-2$.

所以数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n=n-1$，$b_n=3n-2$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

（2）因为 $P_1(0,1)$，$P_n(n-1,3n-2)$，所以 $P_{n+1}(n,3n+1)$.

所以 $|P_1P_{n+1}|^2=n^2+(3n)^2=10n^2$.

所以 $\frac{1}{|P_1P_2|^2}+\frac{1}{|P_1P_3|^2}+\cdots+\frac{1}{|P_1P_{n+1}|^2}=\frac{1}{10}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)$.

因为 $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=\frac{4}{4n^2-1}=\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}=2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$,

所以，当 $n\ge 2$ 时，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|P_1P_2|^2}+\frac{1}{|P_1P_3|^2}+\cdots+\frac{1}{|P_1P_{n+1}|^2}\\<\ &\frac{1}{10}\left[1+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 11\text{ 分}\\=\ &\frac{1}{10}\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{2n+1}\right)\\<\ &\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

又当 $n=1$ 时，$\frac{1}{|P_1P_2|^2}=\frac{1}{10}<\frac{1}{6}$.

所以 $\frac{1}{|P_1P_2|^2}+\frac{1}{|P_1P_3|^2}+\cdots+\frac{1}{|P_1P_{n+1}|^2}<\frac{1}{6}$.

41.（1） 由已知 $f(1)=S_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,

$f(2)=S_4-S_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$,

$f(3)=S_6-S_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{19}{20}$.

（2） 由（1）知 $f(1)>1$，$f(2)>1$；下面用数学归纳法证明：

当 $n\geq 3$ 时，$f(n)<1$.

①由（1）当 $n=3$ 时，$f(n)<1$；

②假设 $n=k(k\geq 3)$ 时，$f(n)<1$，即

$f(k)=\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{2k}<1$，那么

$$\begin{aligned}f(k+1)\ &=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}\\&=\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k}\\&<1+\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k}\right)+\left(\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{2k}\right)\\&=1+\frac{2k-(2k+1)}{2k(2k+1)}+\frac{2k-(2k+2)}{2k(2k+2)}\\&=1-\frac{1}{2k(2k+1)}-\frac{1}{k(2k+2)}<1,\end{aligned}$$

所以当 $n=k+1$ 时，$f(n)<1$ 也成立.

由①和②知，当 $n\geq 3$ 时，$f(n)<1$.

所以当 $n=1$ 和 $n=2$ 时，$f(n)>1$；当 $n\geq 3$ 时，$f(n)<1$.

42.（1） 由 $S_n^2-(n^2+n-1)S_n-(n^2+n)=0$，

得 $[S_n-(n^2+n)](S_n+1)=0$.

由于 $\{a_n\}$ 是正项数列，所以 $S_n>0,S_n=n^2+n$. .

于是 $a_1=S_1=2$，

$n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n$.

综上，数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=2n$.

（2） 由于 $a_n=2n,b_n=\frac{n+1}{(n+2)^2a_n^2}$.

则 $b_n=\frac{n+1}{4n^2(n+2)^2}=\frac{1}{16}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]$.

$$
\begin{aligned}
T_n &= \frac{1}{16}\left[1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]\\
&= \frac{1}{16}\left[1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]\\
&< \frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)=\frac{5}{64}
\end{aligned}.
$$

43.（1） 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，满足 $a_{n+1}=a_n+ca_n^2$（$c>0$ 且为常数）.

所以 $a_2=a_1+ca_1^2$，$a_3=a_2+ca_2^2$.

因为 a_1，$2a_2$，$3a_3$ 依次成等比数列，

所以 $(2a_2)^2=a_1\cdot 3a_3$，

所以 $4a_2^2=a_1\cdot 3\left(a_2+ca_2^2\right)$，$a_2>0$，化为 $4a_2=3a_1(1+ca_2)$.

所以 $4\left(a_1+ca_1^2\right)=3a_1\left[1+c\left(a_1+ca_1^2\right)\right]$，$a_1>0$，化为：$3c^2a_1^2-ca_1-1=0$，解得 $a_1=\frac{1+\sqrt{13}}{6c}$ 或 $a_1=\frac{1-\sqrt{13}}{6c}$（舍去）.

（2）（ⅰ）由 $a_{n+1}=a_n+ca_n^2$（$c>0$ 且为常数），$a_n>0$.

所以

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n} &= \frac{1}{a_n+ca_n^2}-\frac{1}{a_n}\\
&= \frac{1}{a_n}\left(\frac{1}{1+ca_n}-1\right)\\
&= -\frac{c}{1+ca_n}.
\end{aligned}
$$

即 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=-\frac{c}{1+ca_n}$.

（ⅱ）由（ⅰ）可得：$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=-\frac{c}{1+ca_n}$.

所以 $b_n=\frac{1}{1+ca_n}=\frac{1}{c}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$,

所以

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{c}\left[\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right]\\
&= \frac{1}{c}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right).
\end{aligned}
$$

由 $a_{n+1}=a_n+ca_n^2>a_n>0$，可得 $-\frac{1}{a_{n+1}}<-\frac{1}{a_{n+2}}$.

所以 $S_n<\frac{1}{c}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)=S_{n+1}<\frac{1}{ca_1}$.

所以 $S_n<S_{n+1}<\frac{1}{ca_1}$.

44. 分别取 $x=\pm 1,0$，得

$$
\begin{aligned}
&|f(1)|=|a+b+c|\le 1,\\
&|f(-1)|=|a-b+c|\le 1,\\
&|f(0)|=|c|\le 1.
\end{aligned}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
|2b| &= |(a+b+c)-(a-b+c)|\\
&\le |a+b+c|+|a-b+c|\\
&\le 1+1=2,
\end{aligned}
$$

所以 $|b|\le 1$.

因为

$$\begin{aligned}|2(a+c)| &= |(a+b+c)+(a-b+c)| \\ &\le |a+b+c|+|a-b+c| \\ &\le 1+1=2,\end{aligned}$$

所以 $|a+c| \le 1$.

因为 $|a| = |a+c-c| \le |a+c| + |c| \le 1+1=2$，

所以 $|a| \le 2$.

45.（1） 函数 $f(x)$ 求导可得 $f'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x(x>0)$，令 $f'(x)=0$，得 $x = k\pi(k \in \mathbf{N}^*)$，

当 $x \in (2k\pi,(2k+1)\pi)(k \in \mathbf{N})$ 时，$\sin x > 0$，此时 $f'(x) < 0$；

当 $x \in ((2k+1)\pi,(2k+2)\pi)(k \in \mathbf{N})$ 时，$\sin x < 0$，此时 $f'(x) > 0$，

故函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(2k\pi,(2k+1)\pi)(k \in \mathbf{N})$，单调递增区间为 $((2k+1)\pi,(2k+2)\pi)(k \in \mathbf{N})$.

（2） 由（1）可知函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上单调递减，又 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，所以 $x_1 = \frac{\pi}{2}$.

当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时，因为 $f(n\pi)f((n+1)\pi) = [(-1)^n n\pi + 1]\cdot[(-1)^{n+1}(n+1)\pi+1] < 0$，且函数 $f(x)$ 的图象是连续不断的，所以 $f(x)$ 在区间 $(n\pi,(n+1)\pi)$ 内至少存在一个零点．又 $f(x)$ 在区间 $(n\pi,(n+1)\pi)$ 上是单调的，故 $n\pi < x_{n+1} < (n+1)\pi$，因此，

当 $n=1$ 时，$\frac{1}{x_1^2} = \frac{4}{\pi^2} < \frac{2}{3}$;

当 $n=2$ 时，$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2} < \frac{1}{\pi^2}(4+1) < \frac{2}{3}$;

当 $n \ge 3$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2} &< \frac{1}{\pi^2}\left[4+1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}\right] \\ &< \frac{1}{\pi^2}\left[5+\frac{1}{1\times2}+\cdots+\frac{1}{(n-2)(n-1)}\right] \\ &= \frac{1}{\pi^2}\left[5+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\pi^2}\left(6-\frac{1}{n-1}\right) < \frac{6}{\pi^2} < \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

综上所述，对一切的 $n \in \mathbf{N}^*$，$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2} < \frac{2}{3}$.

46.（1） 依题意，得

$$\begin{aligned}3a_3 &= (a_1+2a_2+3a_3)-(a_1+2a_2) \\ &= 4-\frac{3+2}{2^{3-1}}-\left(4-\frac{2+2}{2^{2-1}}\right) \\ &= \frac{3}{4},\end{aligned}$$

所以 $a_3 = \frac{1}{4}$.

（2） 依题意，当 $n>1$ 时，$na_n = (a_1+2a_2+\cdots+na_n)-[a_1+2a_2+\cdots+(n-1)a_{n-1}] = 4-\frac{n+2}{2^{n-1}}-\left(4-\frac{n+1}{2^{n-2}}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$,

所以 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

又 $a_1 = 4-\frac{1+2}{2^0} = 1$ 也适合此式，

所以 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(n \in \mathbf{N}^*)$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，

故 $T_n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

（3） 因为 $b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n}+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)a_n$，

所以 $b_1=a_1$，$b_2=\frac{a_1}{2}+\left(1+\frac{1}{2}\right)a_2$，$b_3=\frac{a_1+a_2}{3}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)a_3$，

所以 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)T_n=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)<2\times\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$

记 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1(x>1)$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数，又 $f(1)=0$，即 $f(x)>0$.

又 $k\geq 2$ 且 $k\in\mathbf{N}^*$ 时，$\frac{k}{k-1}>1$，

所以 $f\left(\frac{k}{k-1}\right)=\ln\frac{k}{k-1}+\frac{1}{\frac{k}{k-1}}-1>0$，即 $\ln\frac{k}{k-1}>\frac{1}{k}$,

所以 $\frac{1}{2}<\ln\frac{2}{1}$，$\frac{1}{3}<\ln\frac{3}{2}$，…，$\frac{1}{n}<\ln\frac{n}{n-1}$,

即有 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n}{n-1}=\ln n$，

所以 $2\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)<2+2\ln n$，即 $S_n<2+2\ln n$.

47. （1） $f'(x)=e^x-\frac{1}{x+m}$,

由 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，得 $f'(0)=0$，

解得 $m=1$.

于是 $f(x)=e^x-\ln(x+1)$，定义域为 $(-1,+\infty)$，$f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}$.

函数 $f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}$ 在 $(-1,+\infty)$ 单调递增，且 $f'(0)=0$，

因此当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

（2） 当 $m\leq 2$，$x\in(-m,+\infty)$ 时，$\ln(x+m)\leq\ln(x+2)$，

故只需证明当 $m=2$ 时，$f(x)>0$.

当 $m=2$ 时，函数 $f'(x)=e^x-\frac{1}{x+2}$ 在 $(-2,+\infty)$ 单调递增.

又 $f'(-1)<0$，$f'(0)>0$，

则 $f'(x)=0$ 在 $(-2,+\infty)$ 有唯一实根 x_0，且 $x_0\in(-1,0)$.

当 $x\in(-2,x_0)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

从而当 $x=x_0$ 时，$f(x)$ 取得最小值.

由 $f'(x_0)=0$，得 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0+2}$，$\ln(x_0+2)=-x_0$，

则 $f(x)\geq f(x_0)=\frac{1}{x_0+2}+x_0=\frac{(x_0+1)^2}{x_0+2}>0$.

综上，当 $m\leq 2$ 时，$f(x)>0$.

48. （1） $\lambda=2$ 时，$f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}(x\geq 1)$，求导可得 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2(x+1)-2(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\geq 0$，

所以，在 $f(x)(1,+\infty)$ 单调递增，故 $f(x)$ 的最小值是 $f(1)=0$.

（2） 依题意，$k_n=\frac{\ln(n+1)-\ln n}{n+1-n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

(1) 由（1）可知，若取 $\lambda=2$，则当 $x>1$ 时 $f(x)>0$，即 $\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$.

于是 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{2\left(1+\frac{1}{n}-1\right)}{1+\frac{1}{n}+1}=\frac{2}{2n+1}$，即知 $\frac{1}{k_n}<\frac{2n+1}{2}$.

所以 $S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i}<\sum_{i=1}^{n}\frac{2i+1}{2}=\frac{n(n+2)}{2}$.

(2) 取 $\lambda=3$，则 $f(x)=\ln x-\frac{3(x-1)}{x+2}(x\geq 1)$，求导可得 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{3(x+2)-3(x-1)}{(x+2)^2}=\frac{(x-1)(x-4)}{x(x+2)^2}$.

当 $x\in(1,2)$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 单调递减.

所以，$x\in(1,2]$ 时，$f(x)<f(1)=0$，即 $\ln x<\frac{3(x-1)}{x+2}$.

注意到，对任意正整数 n，$1+\frac{1}{n}\in(1,2]$，于是 $k_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{3\left(1+\frac{1}{n}-1\right)}{1+\frac{1}{n}+2}=\frac{3}{3n+1}$，

即知 $\frac{1}{k_n}>\frac{3n+1}{3}$.

所以 $S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i}>\sum_{i=1}^{n}\frac{3i+1}{3}=\frac{n(3n+5)}{6}$.

49.（1） 用数学归纳法证明：$x_n>0$，当 $n=1$ 时，$x_1=1>0$，成立，

假设当 $n=k$ 时成立，则 $x_k>0$，那么 $n=k+1$ 时，若 $x_{k+1}<0$，则 $0<x_k=x_{k+1}+\ln(1+x_{k+1})<0$，矛盾，故 $x_{n+1}>0$，因此 $x_n>0(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $x_n=x_{n+1}+\ln(1+x_{n+1})>x_{n+1}$，因此 $0<x_{n+1}<x_n(n\in\mathbf{N}^*)$.

（2） 由 $x_n=x_{n+1}+\ln(1+x_{n+1})$ 得 $x_nx_{n+1}-4x_{n+1}+2x_n=x_{n+1}^2-2x_{n+1}+(x_{n+1}+2)\ln(1+x_{n+1})$，

记函数 $f(x)=x^2-2x+(x+2)\ln(1+x)$，$x\geq 0$，

所以 $f'(x)=\frac{2x^2+x}{x+1}+\ln(1+x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)\geq f(0)=0$，

因此 $x_{n+1}^2-2x_{n+1}+(x_{n+1}+2)\ln(1+x_{n+1})\geq 0$，

故 $2x_{n+1}-x_n\leq\frac{x_nx_{n+1}}{2}$.

（3） 因为 $x_n=x_{n+1}+\ln(1+x_{n+1})\leq x_{n+1}+x_{n+1}=2x_{n+1}$，

所以 $x_n\geq\frac{1}{2^{n-1}}$，

由 $\frac{x_nx_{n+1}}{2}\geq 2x_{n+1}-x_n$ 得 $\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{2}\geq 2\left(\frac{1}{x_n}-\frac{1}{2}\right)>0$，

所以 $\frac{1}{x_n}-\frac{1}{2}\geq 2\left(\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{2}\right)\geq\cdots\geq 2^{n-1}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{2}\right)=2^{n-2}$，

所以 $x_n\leq\frac{1}{2^{n-2}}$，

综上所述 $\frac{1}{2^{n-1}}\leq x_n\leq\frac{1}{2^{n-2}}$.

50.（1） 由已知，得 $a_n-1=\left(\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{2}\right)-1=\frac{1}{2}(a_{n-1}-1)$，

又 $a_1-1=1\neq 0$，

则数列 $\{a_n-1\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列.

所以 $a_n-1=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，得 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1$.

（2） $b_n=n(a_n-1)=n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

设 $S_n=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-2}}+\frac{n}{2^{n-1}}$.……①

则 $\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$.……②

① − ②，得 $\frac{1}{2}S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}$,

所以 $S_n=4-\frac{2}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^{n-1}}=4-\frac{2+n}{2^{n-1}}$.

$S_n=4-\frac{2+n}{2^{n-1}}<4$，又 $b_n=n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}>0$，

所以数列 $\{S_n\}$ 是递增数列，则 $S_n\geq S_1=1$，

因此，$1\leq S_n<4$.

51.（1） 由题得 $(n+1)a_{n+1}^2-(n+1)=na_n^2-n+a_n-1$，

故 $(a_{n+1}-1)(a_{n+1}+1)(n+1)=(a_n-1)(na_n+n+1)$，

由 $a_n>0$，$n\in\mathbf{N}^*$，可知 $(a_{n+1}+1)(n+1)>0$，$na_n+n+1>0$，

所以 $a_{n+1}-1$ 与 a_n-1 同号，又 $a_1-1=1>0$，故 $a_n>1$.

（2） 由（Ⅰ）知 $a_n>1$，故 $(n+1)a_{n+1}^2=na_n^2+a_n<(n+1)a_n^2$，

所以 $a_{n+1}<a_n$，$1<a_n\leq 2$.

因为 $a_n=(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2$，所以，

$a_1=2a_2^2-a_1^2$，$a_2=3a_3^2-2a_2^2$，…，$a_n=(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2$，

相加得 $a_1+a_2+\cdots+a_n=(n+1)a_{n+1}^2-4\leq 2n$.

所以 $a_{n+1}^2\leq\frac{2n+4}{n+1}$，即 $a_n^2\leq\frac{2n+2}{n}(n\geq 2)$，

于是 $\frac{a_n^2}{n^2}\leq\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n^3}<2\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}\right)(n\geq 2)$.

当 $n=2$ 时，$\frac{a_2^2}{2^2}=\frac{3}{4}<\frac{9}{5}$;

当 $n=3$ 时，$\frac{a_2^2}{2^2}+\frac{a_3^2}{3^2}\leq\frac{3}{4}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}<\frac{3}{4}+\frac{1}{3}<\frac{9}{5}$;

当 $n\geq 4$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{a_2^2}{4}+\frac{a_3^2}{9}+\frac{a_4^2}{16}+\cdots+\frac{a_n^2}{n^2}<&\ \frac{3}{4}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right)+2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\\&\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right)+\cdots+2\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\\=&\ \frac{3}{4}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\\&\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\right]\\=&\ \frac{3}{4}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\\<&\ 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}\\<&\ \frac{9}{5}.\end{aligned}$$

综上，$\frac{a_2^2}{4}+\frac{a_3^2}{9}+\cdots+\frac{a_n^2}{n^2}<\frac{9}{5}(n\geq 2)$.

52.（1） 因为 $f(x)=\mathrm{e}^x-a(x+1)$，

所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x-a$，

因为 $a>0$，$f'(x)=\mathrm{e}^x-a=0$ 的解为 $x=\ln a$.

所以 $f(x)_{\min}=f(\ln a)=a-a(\ln a+1)=-a\ln a$，

因为 $f(x)\geq 0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

所以 $-a\ln a\geq 0$，

所以 $a\ln a\leq 0$，

所以 $a_{\max}=1$.

（2） 因为 $f(x)=\mathrm{e}^x-a(x+1)$，

所以 $g(x)=f(x)+\frac{a}{\mathrm{e}^x}=\mathrm{e}^x+\frac{a}{\mathrm{e}^x}-ax-a$.

因为 $a\leq-1$，直线 AB 的斜率恒大于常数 m，

所以

$$\begin{aligned} g'(x) &= \mathrm{e}^x-\frac{a}{\mathrm{e}^x}-a\geq 2\sqrt{\mathrm{e}^x\cdot\left(-\frac{a}{\mathrm{e}^x}\right)}-a \\ &=-a+2\sqrt{-a} \\ &=m,(a\leq-1), \end{aligned}$$

解得 $m\leq 3$，

所以 实数 m 的取值范围是 $(-\infty,3]$.

（3） 设 $t(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，则 $t'(x)=\mathrm{e}^x-1$，令 $t'(x)=0$ 得：$x=0$.

在 $x<0$ 时 $t'(x)<0$，$f(x)$ 递减；在 $x>0$ 时 $t'(x)>0$，$f(x)$ 递增.

所以 $t(x)$ 最小值为 $t(0)=0$，故 $\mathrm{e}^x\geq x+1$，取 $x=-\frac{i}{2n}$，$i=1,3,\cdots,2n-1$，得 $1-\frac{i}{2n}\leq\mathrm{e}^{-\frac{i}{2n}}$，即 $\left(\frac{2n-i}{2n}\right)^n\leq\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，累加得

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2n}\right)^n+\left(\frac{3}{2n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n \\ <\ & \mathrm{e}^{-\frac{2n-1}{2}}+\mathrm{e}^{-\frac{2n-3}{2}}+\cdots+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \\ =\ & \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}(1-\mathrm{e}^{-n})}{1-\mathrm{e}^{-1}} \\ <\ & \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}-1}. \end{aligned}$$

所以 $1^n+3^n+\cdots+(2n-1)^n<\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}-1}\cdot(2n)^n$，故存在正整数 $a=2$.

使得 $1^n+3^n+\cdots+(2n-1)^n<\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}-1}\cdot(an)^n$.

53.（1） $y'=(x^{2n+2}+1)'=(2n+2)x^{2n+1}$，曲线 $y=x^{2n+2}+1$ 在点 $(1,2)$ 处的切线斜率为 $2n+2$，从而切线方程为 $y-2=(2n+2)(x-1)$.

令 $y=0$，解得切线与 x 轴交点的横坐标 $x_n=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

（2） 由题设和（1）中的计算结果知

$T_n=x_1^2x_3^2\cdots x_{2n-1}^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdots\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2$.

当 $n=1$ 时，$T_1=\frac{1}{4}$.

当 $n\geq 2$ 时，因为 $x_{2n-1}^2=\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2=\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}>\frac{(2n-1)^2-1}{(2n)^2}=\frac{2n-2}{2n}=\frac{n-1}{n}$.

所以 $T_n > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{4n}$.

综上，对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$，均有 $T_n \geq \frac{1}{4n}$.

54.（1） 求得 $a_n = 3^n - 1$.

（2） 要证 $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{n}{3} - \frac{1}{8}$，先从 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{3^n-1}{3^{n+1}-1}$ 中分离出 $\frac{1}{3}$，

则只要证 $\frac{2}{3(3^2-1)} + \frac{2}{3(3^3-1)} + \cdots + \frac{2}{3(3^{n+1}-1)} < \frac{1}{8}$.

证一：

设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q(0 < q < 1)$，所以 $b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots = \frac{b_1}{1-q}$，

设 $\frac{b_1}{1-q} = \frac{b_1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{8}$，可得 $b_1 = \frac{1}{12}$，所以 $b_n = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{8} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$，

易证 $\frac{2}{3(3^{n+1}-1)} < \frac{2}{8} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

证二：

由于 $\left\{1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right\}$ 为递增数列，则 $\frac{2}{3(3^{n+1}-1)} = \frac{2}{3 \cdot 3^{n+1}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)} \leq \frac{2}{3 \cdot 3^{n+1}\left(1-\frac{1}{3^2}\right)} = \frac{1}{4 \cdot 3^n}$.

55.（1） 由已知，对 $n \geq 2$ 有：$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{n-a_n}{(n-1)a_n} = \frac{n}{(n-1)a_n} - \frac{1}{n-1}$，

两边同除以 n，得：$\frac{1}{na_{n+1}} = \frac{1}{(n-1)a_n} - \frac{1}{n(n-1)}$，

即 $\frac{1}{na_{n+1}} - \frac{1}{(n-1)a_n} = -\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$，

于是，

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n-1}\left[\frac{1}{ka_{k+1}} - \frac{1}{(k-1)a_k}\right] &= -\sum_{k=2}^{n-1}\left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right] \\ &= -\left(1 - \frac{1}{n-1}\right),\end{aligned}$$

即 $\frac{1}{(n-1)a_n} - \frac{1}{a_2} = -\left(1 - \frac{1}{n-1}\right)$，$n \geq 2$，

所以 $\frac{1}{(n-1)a_n} = \frac{1}{a_2} - \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) = \frac{3n-2}{n-1}$，即 $a_n = \frac{1}{3n-2}$，$n \geq 2$，

又 $n = 1$ 时也成立，故 $a_n = \frac{1}{3n-2}$，$n \in \mathbf{N}^*$；

（2） （ⅰ）由（1）可知

$\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} = [3(n+1) - 2]^2 - (3n-2)^2 = 18n - 3 > 0$，

所以 $\frac{1}{a_{n+1}^2} > \frac{1}{a_n^2}$，即对一切 $n \in \mathbf{N}^*$，都有 $\frac{1}{a_{n+1}^2} > \frac{1}{a_n^2}$；

（ⅱ）当 $k \geq 2$，有

$$\begin{aligned}a_k^2 &= \frac{1}{(3k-2)^2} < \frac{1}{(3k-4)(3k-1)} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-4} - \frac{1}{3k-1}\right),\end{aligned}$$

所以 $n \geq 2$ 时，有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 &= 1 + \sum_{k=2}^{n} a_k^2 < 1 + \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-4} - \frac{1}{3n-1}\right)\right] \\ &= 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n-1}\right) < 1 + \frac{1}{6} \\ &= \frac{7}{6},\end{aligned}$$

又 $n=1$ 时，$a_1^2=1<\frac{7}{6}$满足上式，

故对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2<\frac{7}{6}$.

56.（1） 当 $n=1$ 时，有 $4\times(1+1)(a_1+1)=(1+2)^2a_1$，解得 $a_1=8$.

当 $n=2$ 时，有 $4\times(2+1)(a_1+a_2+1)=(2+2)^2a_2$，解得 $a_2=27$.

（2） 法一：

当 $n\geq 2$ 时，有

$$\begin{aligned}4(S_n+1)&=\frac{(n+2)^2a_n}{n+1}, &\cdots\cdots①\\ 4(S_{n-1}+1)&=\frac{(n+1)^2a_{n-1}}{n}, &\cdots\cdots②\end{aligned}\quad ①-②$$

得

$$4a_n=\frac{(n+2)^2a_n}{n+1}-\frac{(n+1)^2a_{n-1}}{n},$$

即

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{(n+1)^3}{n^3}.$$

所以 $\frac{a_n}{(n+1)^3}=\frac{a_{n-1}}{n^3}=\frac{a_{n-2}}{(n-1)^3}=\cdots=\frac{a_2}{3^3}=1$.

所以 $a_n=(n+1)^3(n\geq 2)$.

另解：$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{(n+1)^3}{n^3}\cdot\frac{n^3}{(n-1)^3}\cdot\cdots\cdot\frac{3^3}{2^3}\cdot 2^3=(n+1)^3$.

又当 $n=1$ 时，有 $a_1=8$，

所以 $a_n=(n+1)^3$.

法二：

根据 $a_1=8$，$a_2=27$，猜想 $a_n=(n+1)^3$.

用数学归纳法证明如下：

（i）当 $n=1$ 时，有 $a_1=8=(1+1)^3$，猜想成立.

（ii）假设当 $n=k$ 时，猜想也成立，即：$a_k=(k+1)^3$.

那么当 $n=k+1$ 时，有 $4(k+1+1)(S_{k+1}+1)=(k+1+2)^2a_{k+1}$，即

$$4(S_{k+1}+1)=\frac{(k+1+2)^2a_{k+1}}{k+1+1},\quad\cdots\cdots①$$

又

$$4(S_k+1)=\frac{(k++2)^2a_k}{k+1},\quad\cdots\cdots②①-②$$

得

$$4a_{k+1}=\frac{(k+3)^2a_{k+1}}{k+2}-\frac{(k+2)^2a_k}{k+1}=\frac{(k+3)^2a_{k+1}}{k+2}-\frac{(k+2)^2(k+1)^3}{k+1},$$

解，得

$$a_{k+1}=(k+2)^3=(k+1+1)^3.$$

所以当 $n=k+1$ 时，猜想也成立.

因此，由数学归纳法证得 $a_n=(n+1)^3$ 成立.

（3）因为 $b_n=\frac{n+1}{a_n}=\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

$$
\begin{aligned}
T_n&=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}+b_n\\
&=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\\
&<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}\\
&=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}<\frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

57.（1）因为 $f(x)=\ln(x-1)-k(x-1)+1$，$(x>1)$

所以 $f'(x)=\frac{1}{x-1}-k$，

当 $k\le 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，故函数在 $(1,+\infty)$ 为增函数，

当 $k>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{k+1}{k}$.

当 $f'(x)<0$，即 $1<x<\frac{k+1}{k}$ 时，函数为增函数，

当 $f'(x)>0$，即 $x>\frac{k+1}{k}$ 时，函数为减函数，

综上所述，当 $k\le 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 为增函数，

当 $k>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(1,\frac{k+1}{k}\right)$ 为增函数，在 $\left(\frac{k+1}{k},+\infty\right)$ 为减函数.

（2）由（1）知，当 $k\le 0$ 时，$f'(x)>0$ 函数 $f(x)$ 在定义域内单调递增，$f(x)\le 0$ 不恒成立，

当 $k>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(1,\frac{k+1}{k}\right)$ 为增函数，在 $\left(\frac{k+1}{k},+\infty\right)$ 为减函数.

当 $x=\frac{k+1}{k}$ 时，$f(x)$ 取最大值，$f\left(\frac{k+1}{k}\right)=\ln\frac{1}{k}\le 0$.

所以 $k\ge 1$，即实数 k 的取值范围为 $[1,+\infty)$.

（3）由（2）知 $k=1$ 时，$f(x)\le 0$ 恒成立，即 $\ln(x-1)\le x-2$，

所以 $\frac{\ln(x-1)}{x}\le 1-\frac{2}{x}$，

因为 $\frac{\ln n}{n+1}=\frac{2\ln n}{2(n+1)}=\frac{\ln n^2}{2(n+1)}\le\frac{n^2-1}{2(n+1)}=\frac{n-1}{2}$，

取 $x=3,4,5,\cdots,n,n+1$ 累加得

所以 $\frac{\ln 2}{3}+\frac{\ln 3}{4}+\cdots+\frac{\ln n}{n+1}\le\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{n-1}{2}=\frac{n(n-1)}{4}$，$(n\in\mathbf{N},n>1)$.

58.（1）方法一：由 $na_{n+1}=2S_n$，……① 可得当 $n\ge 2$ 时，$(n-1)a_n=2S_{n-1}$ ……②，

由 ①－② 可得，

$$na_{n+1}-(n-1)a_n=2(S_n-S_{n-1})=2a_n,$$

所以

$$na_{n+1}=(n+1)a_n,$$

即当 $n\ge 2$ 时，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}$，所以 $\frac{a_3}{a_2}=\frac{3}{2}$，$\frac{a_4}{a_3}=\frac{4}{3}$，$\frac{a_5}{a_4}=\frac{5}{4}$，…，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n}{n-1}$，将上面各式两边分别相乘得，$\frac{a_n}{a_2}=\frac{n}{2}$，即

$$a_n=\frac{n}{2}\cdot a_2(n\ge 3),$$

又 $a_2=2S_1=2a_1=2$，所以 $a_n=n(n\ge 3)$，此结果也满足 a_1，a_2，故 $a_n=n$ 对任意 $n\in\mathbf{N}_+$ 都成立.

方法二：由 $na_{n+1}=(n+1)a_n$，得 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$，所以 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为常数列.

（2） 依题意可得

$$b_n=\frac{4a_{n+1}}{a_n^2a_{n+2}^2}=\frac{4n+4}{n^2(n+2)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}.$$

所以

$$\begin{aligned}T_n&=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\\&=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}<1+\frac{1}{4}\\&=\frac{5}{4}.\end{aligned}$$

59.（1） 由 $a_{n+1}=2a_n+2$ ，得 $a_{n+1}+2=2(a_n+2)$ ，

所以 $\{a_n+2\}$ 是首项为 5 ，公比为 2 的等比数列，

所以 $a_n+2=5\times 2^{n-1}$ ，即 $a_n=5\times 2^{n-1}-2$ ．

（2） 由（1）知 $b_n=\frac{n}{5\times 2^{n-1}}$ ，

所以 $S_n=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^0}+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}\right)\cdots①$ ，

$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}\right)\cdots②$ ，

所以① − ②得：

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}\right)\\&=\frac{2}{5}\left(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}\right)\\&=\frac{2}{5}\left(2-\frac{n+2}{2^n}\right)\\&=\frac{4}{5}-\frac{2}{5}\times\frac{n+2}{2^n}<\frac{4}{5},\end{aligned}$$

又因为 $S_{n+1}-S_n=\frac{2}{5}\left(\frac{n+2}{2^n}-\frac{n+3}{2^{n+1}}\right)=\frac{2}{5}\times\frac{n+1}{2^{n+1}}>0$ ，

所以数列 $\{S_n\}$ 为单调递增数列， 所以 $S_n\geq S_1=\frac{1}{5}$ ，

所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*,\frac{1}{5}\leq S_n<\frac{4}{5}$ ．

60.（1） 设点 P 的坐标为 (x_0,y_0)．由题意，有

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1.\quad\cdots\cdots①$$

由 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，得

$$k_{AP}=\frac{y_0}{x_0+a},k_{BP}=\frac{y_0}{x_0-a}.$$

由 $k_{AP}\cdot k_{BP}=-\frac{1}{2}$，可得 $x_0^2=a^2-2y_0^2$，代入 ① 并整理得

$$(a^2-2b^2)y_0^2=0.$$

由于 $y_0\neq 0$，故 $a^2=2b^2$．于是

$$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{2},$$

所以椭圆的离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（2） 证法一：依题意，直线 OP 的方程为 $y=kx$，设点 P 的坐标为 (x_0,y_0).

由条件得

$$\begin{cases}y_0=kx_0,\\ \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1,\end{cases}$$

消去 y_0 并整理得

$$x_0^2=\frac{a^2b^2}{k^2a^2+b^2}. \quad \cdots\cdots②$$

由 $|AP|=|OA|$，$A(-a,0)$ 及 $y_0=kx_0$，得

$$(x_0+a)^2+k^2x_0^2=a^2,$$

整理得

$$(1+k^2)x_0^2+2ax_0=0.$$

而 $x_0\neq 0$，于是 $x_0=\frac{-2a}{1+k^2}$，代入 ②，整理得

$$(1+k^2)^2=4k^2\left(\frac{a}{b}\right)^2+4.$$

由 $a>b>0$，故 $(1+k^2)^2>4k^2+4$，即 $k^2+1>4$，

因此 $k^2>3$，所以 $|k|>\sqrt{3}$.

证法二：依题意，直线 OP 的方程为 $y=kx$，

可设点 P 的坐标为 (x_0,kx_0)．由点 P 在椭圆上，有

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{k^2x_0^2}{b^2}=1.$$

因为 $a>b>0$，$kx_0\neq 0$，所以

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{k^2x_0^2}{a^2}<1,$$

即

$$(1+k^2)x_0^2<a^2. \quad \cdots\cdots③$$

由 $|AP|=|OA|$，$A(-a,0)$，得

$$(x_0+a)^2+k^2x_0^2=a^2,$$

整理得

$$(1+k^2)x_0^2+2ax_0=0,$$

于是 $x_0=\frac{-2a}{1+k^2}$，代入 ③，得

$$(1+k^2)\frac{4a^2}{(1+k^2)^2}<a^2,$$

解得 $k^2>3$，所以 $|k|>\sqrt{3}$.

61.（1） 因为 $|f(-1)|=|1-b+c|\leq 1$，$|f(1)|=|1+b+c|\leq 1$，

所以 $|1-b+c+1+b+c|\leq|1-b+c|+|1+b+c|\leq 2$，

即 $|2+2c| \le 2$，

化简，得 $|1+c| \le 1$.

（2） 由 $b>2a>0$，得 $-\frac{b}{2a}<-1$，

则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上递增，

所以 $f(x) \in [a-b+c,a+b+c]$.

① 当 $a+c>0$ 时，$a+b+c>b>0$，

即 $f(1)>b>0$，

此时 $|f(1)| \ge b$，

即存在 $x=1$，使得 $|f(x)| \ge b$ 成立.

② 当 $a+c<0$ 时，$a-b+c<-b<0$，

即 $f(-1)<-b<0$，

此时 $|f(-1)|>b$，

即存在 $x=-1$，使得 $|f(x)| \ge b$ 成立.

③ 当 $a+c=0$ 时，$f(x) \in [-b,b]$，

存在 x 使得 $|f(x)| \ge b$ 成立，

综上，存在 $x=\pm 1$，使得 $|f(x)| \ge b$ 成立.

62.（1） $a_2=a_1+\frac{1}{a_1}=1+1=2$，$a_3=a_2+\frac{1}{a_2}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.

（2） 当 $k=2,3,4,5,\cdots$ 时，

$\because$ $a_k^2=\left(a_{k-1}+\frac{1}{a_{k-1}}\right)^2=a_{k-1}^2+\frac{1}{a_{k-1}^2}+2>a_{k-1}^2+2$，

$\therefore$ $a_k^2-a_{k-1}^2>2$，则 $a_n^2-a_1^2=\sum_{k=2}^{n}\left(a_k^2-a_{k-1}^2\right)>2(n-1)$.

$\therefore$ $a_n^2>a_1^2+2(n-1)=2n-1$，则 $a_n>\sqrt{2n-1}$.

又$\because$ $a_1=1$，$a_k=a_{k-1}+\frac{1}{a_{k-1}}(k=2,3,4,\ldots)$，$\therefore$ $a_{k-1}>0$.

$\therefore a_k>a_{k-1} \ge a_1=1$.

$$\begin{aligned}\therefore a_n^2-a_1^2 &= \sum_{k=2}^{n}\left(a_k^2-a_{k-1}^2\right)\\ &= 2(n-1)+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_{k-1}^2} \le 2(n-1)+(n-1)\times 1\\ &= 3n-3\end{aligned}$$

$\therefore$ $a_n^2 \le 3n-3+a_1^2=3n-2$，$\therefore$ $a_n \le \sqrt{3n-2}$.

$\therefore$ $\sqrt{2n-1}<a_n \le \sqrt{3n-2}(n=2,3,4,5,\cdots)$.

63.（1） 令 $n=1$，得

$$S_1^2+S_1-6=0,$$

即

$$(S_1+3)(S_1-2)=0,$$

$\because$ $S_1>0$，$\therefore$ $S_1=2$，$a_1=2$.

（2） $\because$ $[S_n-(n^2+n)](S_n+3)=0$，且数列的各项均为正数，

$\therefore\ S_n = n^2 + n$.

当 $n \geq 2$，且 $n \in \mathbf{N}^*$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n$，　…… ①

当 $n = 1$ 时，$a_1 = 2$ 满足 ①，

$\therefore\ a_n = 2n$，$n \in \mathbf{N}^*$.

（3） 因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n(a_n+1)} &= \frac{1}{2n(2n+1)}\\ &< \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a_1(a_1+1)} + \frac{1}{a_2(a_2+1)} + \cdots + \frac{1}{a_n(a_n+1)}\\ &< \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right)\\ &< \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

64.（1） 由已知，对 $n \geq 2$ 有 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{n-a_n}{(n-1)a_n} = \frac{n}{(n-1)a_n} - \frac{1}{n-1}$,

两边同除以 n，得 $\frac{1}{na_{n+1}} = \frac{1}{(n-1)a_n} - \frac{1}{n(n-1)}$，即

$$\frac{1}{na_{n+1}} - \frac{1}{(n-1)a_n} = -\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right),$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n-1}\left[\frac{1}{ka_{k+1}} - \frac{1}{(k-1)a_k}\right] &= -\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)\\ &= -\left(1 - \frac{1}{n-1}\right),\end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{(n-1)a_n} - \frac{1}{a_2} = -\left(1 - \frac{1}{n-1}\right), n \geq 2,$$

所以

$$\frac{1}{(n-1)a_n} = \frac{1}{a_2} - \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) = \frac{3n-2}{n-1},$$

所以

$$a_n = \frac{1}{3n-2}, n \geq 2.$$

又 $n = 1$ 时也成立，故 $a_n = \frac{1}{3n-2}, n \in \mathbf{N}^*$.

（2） 当 $k \geq 2$，有

$$a_k^2=\frac{1}{(3k-2)^2}<\frac{1}{(3k-4)(3k-1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-4}-\frac{1}{3k-1}\right),$$

所以 $n\geq 2$ 时，有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k^2&=1+\sum_{k=2}^{n}a_k^2<1+\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-4}-\frac{1}{3n-1}\right)\right]\\&=1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n-1}\right)<1+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}.\end{aligned}$$

又 $n=1$ 时，$a_1^2=1<\frac{7}{6}$，故对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $\sum_{k=1}^{n}a_k^2<\frac{7}{6}$.

65.（1） 由题意知，$a_n=2n$，$b_n=2\cdot q^{n-1}$，所以由 $S_3<a_{1003}+5b_2-2010$，得

$$\begin{aligned}b_1+b_2+b_3<a_{1003}+5b_2-2010\quad&\Rightarrow b_1-4b_2+b_3<2006-2010\\&\Rightarrow q^2-4q+3<0,\end{aligned}$$

解得

$$1<q<3,$$

又 q 为整数，所以 $q=2$.

（2） 假设数列 $\{b_n\}$ 中存在一项 b_k，满足 $b_k=b_m+b_{m+1}+b_{m+2}+\cdots+b_{m+p-1}$，

因为 $b_n=2^n$，所以

$$\begin{aligned}b_k>b_{m+p-1}\quad&\Rightarrow 2^k>2^{m+p-1}\\&\Rightarrow k>m+p-1\\&\Rightarrow k\geq m+p,(*)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}b_k&=2^k=b_m+b_{m+1}+b_{m+2}+\cdots+b_{m+p-1}\\&=2^m+2^{m+1}+\cdots+2^{m+p-1}\\&=\frac{2^m(2^p-1)}{2-1}\\&=2^{m+p}-2^m<2^{m+p},\end{aligned}$$

所以 $k<m+p$，此与（*）式矛盾，所以，这样的项 b_k 不存在.

（3） 由 $b_1=a_r$，得 $b_2=b_1q=a_rq=a_s=a_r+(s-r)d$，则 $d=\frac{a_r(q-1)}{s-r}$，

又 $b_3=b_1q^2=a_rq^2=a_t=a_r+(t-r)d\Rightarrow a_rq^2-a_r=(t-r)\cdot\frac{a_r(q-1)}{s-r}$，

从而 $a_r(q+1)(q-1)=a_r(q-1)\cdot\frac{t-r}{s-r}$，

因为 $a_s\neq a_r\Rightarrow b_1\neq b_2$，所以 $q\neq 1$，

又 $a_r\neq 0$，故 $q=\frac{t-r}{s-r}-1$.

又 $t>s>r$，且（$s-r$）是（$t-r$）的约数，所以 q 是整数，且 $q\geq 2$.

对于数列 $\{b_n\}$ 中任一项 b_i，由 $b_1=a_r$，$b_2=a_s$，

可设 $i>3$，此时有

$$\begin{aligned}b_i&=a_rq^{i-1}=a_r+a_r(q^{i-1}-1)\\&=a_r+a_r(q-1)(1+q+q^2+\cdots+q^{i-2})\\&=a_r+d(s-r)(1+q+q^2+\cdots+q^{i-2})\\&=a_r+[((s-r)(1+q+q^2+\cdots+q^{i-2})+1)-1]\cdot d.\end{aligned}$$

由于 $(s-r)(1+q+q^2+\cdots+q^{i-2})+1$ 是正整数，所以 b_i 一定是数列 $\{a_n\}$ 的项.

66.（1） 由已知得 $a_{n+1}+a_n=3(a_n+a_{n-1})$，$(n\geq 2,n\in\mathbf{N}^+)$，

则 $b_{n+1}=3b_n$，
又 $b_1=3$，则 $\{b_n\}$ 是以 3 为首项、3 为公比的等比数列.

（2）（i）解法 1：
由（I）得 $b_n=3^n$，即 $a_{n+1}+a_n=3^n$，
则 $a_n+a_{n-1}=3^{n-1}$，$(n\geq 2)$，
相减得 $a_{n+1}-a_{n-1}=2\times 3^{n-1}$，$(n\geq 2)$，
则 $a_3-a_1=2\times 3^1$，$a_5-a_3=2\times 3^3$，…，$a_{2n-1}-a_{2n-3}=2\times 3^{2n-3}$，
相加得 $a_{2n-1}-a_1=\frac{3\left(9^{n-1}-1\right)}{4}$,
则 $a_{2n-1}=\frac{3^{2n-1}+1}{4}$,
当 $n=1$ 时上式也成立
由 $a_{2n}+a_{2n-1}=3^{2n-1}$ 得 $a_{2n}=\frac{3^{2n}-1}{4}$,
故 $a_n=\frac{3^n-(-1)^n}{4}$.
解法 2：
由 $a_{n+1}+a_n=3^n$
得 $(-1)^{n+1}a_{n+1}-(-1)^n a_n=-(-3)^n$，
则 $(-1)^n a_n-(-1)^{n-1}a_{n-1}=-(-3)^{n-1}$，…，$(-1)^2a_2-(-1)^1a_1=-(-3)^1$，
相加得 $a_n=\frac{3^n-(-1)^n}{4}$.
解法 3：
由 $a_{n+1}+a_n=3^n$ 得 $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}$,
设 $c_n=\frac{a_n}{3^n}$,
则 $c_{n+1}+\frac{1}{3}c_n=\frac{1}{3}$,
可得 $c_{n+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(c_n-\frac{1}{4}\right)$,
又 $c_1=\frac{1}{3}$,
故 $c_n-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，
则 $a_n=\frac{3^n-(-1)^n}{4}$.
（ii）证法 1：
易证 $\frac{4}{3^{2n-1}+1}\leq\frac{1}{7^{n-1}}$.
则

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{2n-1}}&=\frac{4}{3^1+1}+\frac{4}{3^3+1}+\cdots\cdots+\frac{4}{3^{2n-1}+1}\\&<1+\frac{1}{7^1}+\cdots\cdots+\frac{1}{7^{n-1}}\\&=\frac{7}{6}\left(1-\frac{1}{7^n}\right)<\frac{7}{6}.\end{aligned}$$

同理可得 $\frac{4}{3^{2n}-1}\leq\frac{1}{2\times 7^{n-1}}$，

则

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_4}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{2n}} &= \frac{4}{3^2-1}+\frac{4}{3^4-1}+\cdots\cdots+\frac{4}{3^{2n}-1}\\ &< \frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 7^1}+\cdots\cdots+\frac{1}{2\cdot 7^{n-1}}\\ &= \frac{7}{12}\left(1-\frac{1}{7^n}\right)<\frac{7}{12}.\end{aligned}$$

故 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{2n-1}}+\frac{1}{a_{2n}}<\frac{7}{6}+\frac{7}{12}=\frac{7}{4}$.

证法 2：

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_{2n-1}}+\frac{1}{a_{2n}}=\frac{4}{3^{2n-1}+1}+\frac{4}{3^{2n}-1} &= \frac{4\left(3^{2n-1}+3^{2n}\right)}{\left(3^{2n-1}+1\right)\left(3^{2n}-1\right)}\\ &< \frac{4\left(3^{2n-1}+3^{2n}\right)}{3^{2n-1}.3^{2n}}\\ &= \frac{4}{3^{2n-1}}+\frac{4}{3^{2n}}.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{2n-1}}+\frac{1}{a_{2n}} &< 1+\frac{1}{2}+\frac{4}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\cdots\cdots+\frac{4}{3^{2n-1}}+\frac{4}{3^{2n}}\\ &= \frac{3}{2}+\frac{2}{9}\left(1-\frac{1}{3^{2n-2}}\right)\\ &< \frac{3}{2}+\frac{2}{9}=\frac{31}{18}\\ &= \frac{62}{36}<\frac{63}{36}=\frac{7}{4}.\end{aligned}$$

证法 3：

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{2n-1}} &= \frac{4}{3^1+1}+\frac{4}{3^3+1}+\cdots\cdots+\frac{4}{3^{2n-1}+1}\\ &< 1+\frac{4}{3^3}+\frac{4}{3^5}+\cdots\cdots+\frac{4}{3^{2n-1}}\\ &= 1+\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3^{2n-2}}\right)<\frac{7}{6}.\end{aligned}$$

易证 $\frac{4}{3^{2n}-1}<\frac{4+1}{3^{2n}-1+1}=\frac{5}{3^{2n}}$.

则

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_4}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{2n}} &= \frac{4}{3^2-1}+\frac{4}{3^4-1}+\cdots\cdots+\frac{4}{3^{2n}-1}\\ &< \frac{1}{2}+\frac{5}{3^4}+\frac{5}{3^6}+\cdots\cdots+\frac{5}{3^{2n}}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{5}{72}\left(1-\frac{1}{3^{2n-2}}\right)<\frac{41}{72}.\end{aligned}$$

故 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{2n-1}}+\frac{1}{a_{2n}}<\frac{7}{6}+\frac{41}{72}=\frac{125}{72}<\frac{126}{72}=\frac{7}{4}$.

67.（1） 答案不唯一．如 3 项子列：$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$.

（2） 由题意，知

$$1\geq b_1>b_2>b_3>b_4>b_5>0,$$

所以 $d=b_2-b_1<0$.

因为 $b_5=b_1+4d$，$b_1\leq 1$，　$b_5>0$，

所以 $4d=b_5-b_1>0-1=-1$，解得 $d>-\frac{1}{4}$.

所以 $-\frac{1}{4}<d<0$.

（3） 由题意，设 $\{c_n\}$ 的公比为 q，则

$$c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6=c_1\left(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5\right).$$

因为 $\{c_n\}$ 为 $\{a_n\}$ 的一个 6 项子列，

所以 q 为正有理数，且 $q<1$，$c_1=\frac{1}{a}\le 1$ $(a\in\mathbf{N}^*)$.

设 $q=\frac{K}{L}$（$K,L\in\mathbf{N}^*$，且 K，L 互质，$L\ge 2$）.

当 $K=1$ 时，因为 $q=\frac{1}{L}\le\frac{1}{2}$，所以

$$\begin{aligned}c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6&=c_1\left(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5\right)\\&\le 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5,\end{aligned}$$

所以

$$c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6\le\frac{63}{32}.$$

当 $K\ne 1$ 时，因为 $c_6=c_1q^5=\frac{1}{a}\times\frac{K^5}{L^5}$ 是 $\{a_n\}$ 中的项，且 K，L 互质，所以 $a=K^5\times M(M\in\mathbf{N}^*)$，所以

$$\begin{aligned}c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6&=c_1\left(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5\right)\\&=\frac{1}{M}\left(\frac{1}{K^5}+\frac{1}{K^4L}+\frac{1}{K^3L^2}+\frac{1}{K^2L^3}+\frac{1}{KL^4}+\frac{1}{L^5}\right).\end{aligned}$$

因为 $L\ge 2$，$K,M\in\mathbf{N}^*$，所以

$$c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6\le 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{63}{32}.$$

综上，$c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6\le\frac{63}{32}$.

68.（1） 由题意 $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{x^2-ax+1}{x^2}$，

由于 $f(x)$ 无极值点，故 $x^2-ax+1\ge 0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，

即 $a\le x+\frac{1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

又 $x+\frac{1}{x}\ge 2$（$x=1$ 取等号），故 $\left(x+\frac{1}{x}\right)_{\min}=2$，

所以 a 的取值范围是 $a\le 2$.

（2） 当 $a=2$，$g(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2$，

$$g'(x)=1-\frac{1}{x^2}-2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{x^2-2x\ln x-1}{x^2},$$

设 $k(x)=x^2-2x\ln x-1$，

$$k'(x)=2x-2\ln x-2=2(x-1-\ln x),$$

下证：$\ln x\le x-1$，

设 $m(x)=\ln x-x+1$，$m'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，

$x\in(0,1)$ 时，$m'(x)>0$，$m(x)$ 单调递增，

$x\in(1,+\infty)$ 时，$m'(x)<0$，$m(x)$ 单调递减，

所以 $m(x)\le m(1)=0$，即 $\ln x\le x-1$，

所以 $k'(x)\geq 0$，故 $k(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

又 $k(1)=0$，所以：

$x\in(0,1)$ 时，$k(x)<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

$x\in(1,+\infty)$ 时，$k(x)>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

$g(x)\geq g(1)=2$，

故 $g(x)$ 的最小值为 2；

（3）由 (2) 知当 $x>1$ 时，$x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2>2$，

$x+\frac{1}{x}-2>(\ln x)^2$，$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2>(\ln x)^2$，$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}>\ln x$，取 $x=\frac{2^i+1}{2^i}$，$i\in\mathbf{N}^*$，

$\sqrt{\frac{2^i+1}{2^i}}-\sqrt{\frac{2^i}{2^i+1}}>\ln\frac{2^i+1}{2^i}$，即 $\frac{1}{\sqrt{2^i(2^i+1)}}>\ln\frac{2^i+1}{2^i}>\ln\frac{2^i+2}{2^i+1}$

故

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2^i(2^i+1)}} &>\ln\frac{2^1+2}{2^1+1}+\ln\frac{2^2+2}{2^2+1}+\cdots+\ln\frac{2^n+2}{2^n+1}\\ &=\ln\left(\frac{2^1+2}{2^1+1}\cdot\frac{2^2+2}{2^2+1}\cdot\frac{2^3+2}{2^3+1}\cdots\frac{2^n+2}{2^n+1}\right)\\ &=\ln\left(2^n\cdot\frac{2^0+1}{2^1+1}\cdot\frac{2^1+1}{2^2+1}\cdot\frac{2^2+1}{2^3+1}\cdots\frac{2^{n-1}+1}{2^n+1}\right)\\ &=\ln\left(2^n\cdot 2\cdot\frac{1}{2^n+1}\right)\\ &=\ln\frac{2^{n+1}}{2^n+1},\end{aligned}$$

故结论成立.

69.（1）当 $T=\{2,4\}$ 时，$S_T=a_2+a_4=a_2+9a_2=30$，

解得 $a_2=3$，从而 $a_1=\frac{a_2}{3}=1$，$a_n=3^{n-1}$.

（2）

$$\begin{aligned}S_T &\leq a_1+a_2+\cdots+a_k\\ &=1+3+3^2+\cdots+3^{k-1}\\ &=\frac{3^k-1}{2}<3^k=a_{k+1}.\end{aligned}$$

（3）设 $A=\complement_C(C\cap D)$，$B=\complement_D(C\cap D)$，则 $A\cap B=\emptyset$，

$S_C=S_A+S_{C\cap D}$，$S_D=S_B+S_{C\cap D}$，

$S_C+S_{C\cap D}-2S_D=S_A-2S_B$，因此原题就等价于证明 $S_A\geq 2S_B$.

由条件 $S_C\geq S_D$，可知 $S_A\geq S_B$.

① 若 $B=\emptyset$，则 $S_B=0$，所以 $S_A\geq 2S_B$.

② 若 $B\neq\emptyset$，由 $S_A\geq S_B$ 可知 $A\neq\emptyset$.

设 A 中最大元素为 l，B 中最大元素为 m.

若 $m\geq l+1$，则由第（2）小题，$S_A<a_{l+1}\leq a_m\leq S_B$，矛盾.

因为 $A\cap B=\emptyset$，所以 $l\neq m$，所以 $l\geq m+1$，

$$\begin{aligned} S_B &\le a_1+a_2+\cdots+a_m \\ &=1+3+3^2+\cdots+3^{m-1} \\ &=\frac{3^m-1}{2}<\frac{a_{m+1}}{2} \\ &\le\frac{a_l}{2}\le\frac{S_A}{2}, \end{aligned}$$

即 $S_A>2S_B$.

综上所述，$S_A\ge 2S_B$，因此 $S_C+S_{C\cap D}\ge 2S_D$.

70.（1） 由 $f(x)=x^3-ax-b$，得 $f'(x)=3x^2-a$．下面分两种情况讨论：

① 当 $a\le 0$ 时，$f'(x)=3x^2-a\ge 0$ 恒成立，则 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty,\infty)$.

② 当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\frac{\sqrt{3a}}{3}$ 或 $x=-\frac{\sqrt{3a}}{3}$.

当 x 变化时，$f'(x)$ 、 $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3a}}{3}$	$\left(-\frac{\sqrt{3a}}{3},\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3a}}{3}$	$\left(\frac{\sqrt{3a}}{3},+\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以 $f(x)$ 的减区间为 $\left(-\frac{\sqrt{3a}}{3},\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)$，增区间为 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)$，$\left(\frac{\sqrt{3a}}{3},+\infty\right)$.

（2） 由 $f(x)$ 存在极值点 x_0 及（1），得 $a>0$ 且 $x_0\ne 0$.

由题意，得 $f'(x_0)=3x_0^2-a=0$，即 $x_0^2=\frac{a}{3}$.

$f(x_0)=x_0^3-ax_0-b=-\frac{2a}{3}x_0-b$.

$f(-2x_0)=-8x_0^3+2ax_0-b=-\frac{8a}{3}x_0+2ax_0-b=-\frac{2a}{3}x_0-b$，

则有 $f(x_0)=f(-2x_0)$，且 $-2x_0\ne x_0$.

由题意及（1）知，存在唯一实数 x_1 满足 $f(x_1)=f(x_0)$，且 $x_1\ne x_0$，

因此 $x_1=-2x_0$，

所以 $x_1+2x_0=0$.

（3） 设 $g(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值为 M，$\max\{x,y\}$ 表示 x，y 两数的最大值．下面分三种情况讨论：

① 当 $a\ge 3$ 时，$-\frac{\sqrt{3a}}{3}\le -1<1\le\frac{\sqrt{3a}}{3}$.

由（1）知 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的取值范围为 $[f(1),f(-1)]$，因此，

$$\begin{aligned} M &=\max\{|f(1)|,|f(-1)|\} \\ &=\max\{|1-a-b|,|-1+a-b|\} \\ &=\max\{|a-1+b|,|a-1-b|\} \\ &=\begin{cases} a-1+b, & b\ge 0, \\ a-1-b, & b<0, \end{cases} \end{aligned}$$

所以 $M=a-1+|b|\ge 2$.

② 当 $\frac{3}{4}\le a<3$ 时，$-\frac{2\sqrt{3a}}{3}\le -1<-\frac{\sqrt{3a}}{3}<\frac{\sqrt{3a}}{3}<1\le\frac{2\sqrt{3a}}{3}$.

由（1）和（2），得

$$f(-1) \geq f\left(-\frac{2\sqrt{3a}}{3}\right) = f\left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right),$$

$$f(1) \leq f\left(\frac{2\sqrt{3a}}{3}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{3a}}{3}\right).$$

则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的范围为 $\left[f\left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right), f\left(-\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)\right]$，所以

$$\begin{aligned} M &= \max\left\{\left|f\left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)\right|, \left|f\left(-\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)\right|\right\} \\ &= \max\left\{\left|-\frac{2a}{9}\sqrt{3a}-b\right|, \left|\frac{2a}{9}\sqrt{3a}-b\right|\right\} \\ &= \max\left\{\left|\frac{2a}{9}\sqrt{3a}+b\right|, \left|\frac{2a}{9}\sqrt{3a}-b\right|\right\} \\ &= \frac{2a}{9}\sqrt{3a}+|b| \\ &\geq \frac{2}{9}\times\frac{3}{4}\times\sqrt{3\times\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

③ 当 $0 < a < \frac{3}{4}$ 时，$-1 < -\frac{2\sqrt{3a}}{3} < \frac{2\sqrt{3a}}{3} < 1$.

由（1）和（2），得

$$f(-1) < f\left(-\frac{2\sqrt{3a}}{3}\right) = f\left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right),$$

$$f(1) > f\left(\frac{2\sqrt{3a}}{3}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{3a}}{3}\right).$$

所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的范围为 $[f(-1), f(1)]$，因此，

$$\begin{aligned} M &= \max\{|f(1)|, |f(-1)|\} \\ &= \max\{|-1+a-b|, |1-a-b|\} \\ &= \max\{|1-a+b|, |1-a-b|\} \\ &= 1-a+|b| > \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

综上所述，当 $a > 0$ 时，$g(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.

71.（1） 由 $f(x) = me^x\ln x$，可得 $f'(x) = m\left(e^x\ln x + \frac{e^x}{x}\right)$，

因为函数 $f(x)$ 是 J 函数，所以 $m\left(e^x\ln x + \frac{e^x}{x}\right) > me^x\ln x$，即 $\frac{me^x}{x} > 0$，

因为 $\frac{e^x}{x} > 0$，所以 $m > 0$，即 m 的取值范围为 $(0, +\infty)$.

（2） ①构造函数 $h(x) = \frac{g(x)}{e^x}$，$x \in (0, +\infty)$，

则 $h'(x) = \frac{g'(x)-g(x)}{e^x} > 0$，可得 $h(x)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的增函数，

当 $a > 1$ 时，$h(a) > h(1)$，即 $\frac{g(a)}{e^a} > \frac{g(1)}{e}$，得 $g(a) > e^{a-1}g(1)$；

当 $0 < a < 1$ 时，$h(a) < h(1)$，即 $\frac{g(a)}{e^a} < \frac{g(1)}{e}$，得 $g(a) < e^{a-1}g(1)$；

当 $a = 1$ 时，$h(a) = h(1)$，即 $\frac{g(a)}{e^a} = \frac{g(1)}{e}$，得 $g(a) = e^{a-1}g(1)$.

②因为 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n > x_1$，所以 $\ln(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) > \ln x_1$，

由①可知 $h(\ln(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)) > h(\ln x_1)$，

所以

$$\frac{g(\ln(x_1+x_2+\cdots x_n))}{e^{\ln(x_1+x_2+\cdots x_n)}}>\frac{g(\ln x_1)}{e^{\ln x_1}},$$

整理得

$$\frac{x_1 g(\ln(x_1+x_2+\cdots+x_n))}{x_1+x_2+\cdots+x_n}>g(\ln x_1),$$

同理可得

$$\frac{x_2 g(\ln(x_1+x_2+\cdots+x_n))}{x_1+x_2+\cdots+x_n}>g(\ln x_2),\cdots,\frac{x_n g(\ln(x_1+x_2+\cdots+x_n))}{x_1+x_2+\cdots+x_n}>g(\ln x_n).$$

把上面 n 个不等式同向累加可得 $g(\ln(x_1+x_2+\cdots+x_n))>g(\ln x_1)+g(\ln x_2)+\cdots+g(\ln x_n)$.

72.（1） 将 $x=-1$ 代入 $-3x^2-1\le f(x)\le 6x+2$，

得 $-4\le f(-1)\le -4$，

即 $f(-1)=-4$，亦即 $a=b-4$.

由题意，得 $(b-4)x^2+bx\le 6x+2$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

即 $(b-4)x^2+(b-6)x-2\le 0$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

只需 $\begin{cases}b-4<0,\\ \Delta=(b-6)^2+8(b-4)\le 0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}b<4,\\ \Delta=(b-2)^2\le 0,\end{cases}$ 解得 $b=2$，从而 $a=-2$.

故 $f(x)=-2x^2+2x$.

（2） 由（1） 及 $a_{n+1}=f(a_n)$，得

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=-2a_n^2+2a_n\\&=-2\left(a_n-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

因为 $a_1=\frac{1}{3}$，所以 $a_n\ne\frac{1}{2}$，

因此 $a_n<\frac{1}{2}$;

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=2a_n(1-a_n)\\&=2^2a_{n-1}(1-a_{n-1})(1-a_n)\\&=\cdots\\&=2^na_1(1-a_1)\cdots(1-a_{n-1})(1-a_n),\end{aligned}$$

再由 $a_n<\frac{1}{2}$，$1-a_n>0$，得 $a_{n+1}>0$.

综上，$0<a_n<\frac{1}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$，从而

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=-2a_n^2+a_n\\&=-2\left(a_n-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}\in\left(0,\frac{1}{8}\right],\end{aligned}$$

从而 $a_{n+1}>a_n$，即 $\{a_n\}$ 为递增数列，

所以 $\frac{1}{3}=a_1\le a_n<\frac{1}{2}$.

（3）

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}-a_n &= 2\left(\frac{1}{2}-a_{n-1}\right)^2 = 2^{1+2}\left(\frac{1}{2}-a_{n-2}\right)^{2^2} \\
&= \cdots = 2^{1+2+\cdots+2^{n-2}}\left(\frac{1}{2}-a_1\right)^{2^{n-1}} \\
&= 2^{2^{n-1}-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^{2^{n-1}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n-1}}.
\end{aligned}
$$

由 $2^{n-1}\ge n$，得

$$
\frac{1}{2}-a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n-1}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n,
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\frac{n}{2}-S_n &\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right),
\end{aligned}
$$

整理，即得 $4S_n\ge 2n-1+\frac{1}{3^n}$.

73.（1） 由 $|a_n-\frac{a_{n+1}}{2}|\le 1$ 得 $|a_n|-\frac{1}{2}|a_{n+1}|\le 1$，

故 $\frac{|a_n|}{2^n}-\frac{|a_{n+1}|}{2^{n+1}}\le\frac{1}{2^n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

所以

$$
\begin{aligned}
\frac{|a_1|}{2^1}-\frac{|a_n|}{2^n} &= \left(\frac{|a_1|}{2^1}-\frac{|a_2|}{2^2}\right)+\left(\frac{|a_2|}{2^2}-\frac{|a_3|}{2^3}\right)+\cdots+\left(\frac{|a_{n-1}|}{2^{n-1}}-\frac{|a_n|}{2^n}\right) \\
&\le \frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 1-\frac{1}{2^{n-1}} \\
&< 1,
\end{aligned}
$$

因此 $|a_n|\ge 2^{n-1}(|a_1|-2)$.

（2） 任取 $n\in\mathbf{N}^*$，由（1）知，对于任意 $m>n$，

$$
\begin{aligned}
\frac{|a_n|}{2^n}-\frac{|a_m|}{2^m} &= \left(\frac{|a_n|}{2^n}-\frac{|a_{n+1}|}{2^{n+1}}\right)+\left(\frac{|a_{n+1}|}{2^{n+1}}-\frac{|a_{n+2}|}{2^{n+2}}\right)+\cdots+\left(\frac{|a_{m-1}|}{2^{m-1}}-\frac{|a_m|}{2^m}\right) \\
&\le \frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{m-1}} \\
&< \frac{1}{2^{n-1}},
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
|a_n| &< \left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{|a_m|}{2^m}\right)\cdot 2^n \\
&\le \left[\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^m}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^m\right]\cdot 2^n \\
&= 2+\left(\frac{3}{4}\right)^m\cdot 2^n.
\end{aligned}
$$

从而对于任意 $m>n$，均有 $|a_n|<2+\left(\frac{3}{4}\right)^m\cdot 2^n$.

由 m 的任意性得 $|a_n|\le 2$． ……①

否则存在 $n_0\in\mathbf{N}^*$，有 $|a_{n_0}|>2$，

取正整数 $m_0>\log_{\frac{3}{4}}\frac{|a_{n_0}|-2}{2^{n_0}}$ 且 $m_0>n_0$，

则 $2^{m_0}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{m_0}<2^{n_0}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_{\frac{3}{4}}\frac{|a_{m_0}|-2}{2^{m_0}}}=|a_{n_0}|-2$，

与 ① 式矛盾.

综上对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$，均有 $|a_n|\le 2$.

74.（1） $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=1-\mathrm{e}^x$.

当 $f'(x)>0$，即 $x<0$ 时，$f(x)$ 单调递增；

当 $f'(x)<0$，即 $x>0$ 时，$f(x)$ 单调递减.

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$，单调递减区间为 $(0,+\infty)$.

当 $x>0$ 时，$f(x)<f(0)=0$，即 $1+x<\mathrm{e}^x$.

令 $x=\frac{1}{n}$，得 $1+\frac{1}{n}<\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$，即 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$. ……①

（2）$\frac{b_1}{a_1}=1\times\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=1+1=2$；

$\frac{b_1b_2}{a_1a_2}=\frac{b_1}{a_1}\times\frac{b_2}{a_2}=2\times 2\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=(2+1)^2=3^2$；

$\frac{b_1b_2b_3}{a_1a_2a_3}=\frac{b_1b_2}{a_1a_2}\times\frac{b_3}{a_3}=3^2\times 3\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=(3+1)^3=4^3$.

由此推测：$\frac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n}=(n+1)^n$. ……②

下面用数学归纳法证明 ②.

（i）当 $n=1$ 时，左边 $=$ 右边 $=2$，② 成立.

（ii）假设当 $n=k$（$k\ge 1$，$k\in\mathbf{N}_+$）时，② 成立，即 $\frac{b_1b_2\cdots b_k}{a_1a_2\cdots a_k}=(k+1)^k$.

当 $n=k+1$ 时，$b_{k+1}=(k+1)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}a_{k+1}$，

由归纳假设可得

$$
\begin{aligned}
\frac{b_1b_2\cdots b_kb_{k+1}}{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}} &= \frac{b_1b_2\cdots b_k}{a_1a_2\cdots a_k}\cdot\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} \\
&= (k+1)^k\cdot(k+1)\cdot\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \\
&= (k+2)^{k+1},
\end{aligned}
$$

所以当 $n=k+1$ 时，② 也成立.

根据（i）（ii），可知 ② 对一切正整数 n 都成立.

（3）由 c_n 的定义，②，均值不等式（推广），b_n 的定义及 ① 得

$$\begin{aligned}
T_n &= c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n \\
&= (a_1)^{\frac{1}{1}}+(a_1a_2)^{\frac{1}{2}}+(a_1a_2a_3)^{\frac{1}{3}}+\cdots(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{(b_1)^{\frac{1}{1}}}{2}+\frac{(b_1b_2)^{\frac{1}{2}}}{3}+\frac{(b_1b_2b_3)^{\frac{1}{3}}}{4}+\cdots+\frac{(b_1b_2\cdots b_n)^{\frac{1}{n}}}{n+1} \\
&\le \frac{b_1}{1\times 2}+\frac{b_1+b_2}{2\times 3}+\frac{b_1+b_2+b_3}{3\times 4}+\cdots+\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n(n+1)} \\
&= b_1\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]+b_2\left[\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]+\cdots+b_n\cdot\frac{1}{n(n+1)} \\
&= b_1\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+b_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+b_n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\
&< \frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\cdots+\frac{b_n}{n} \\
&= \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 a_1+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 a_2+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n a_n \\
&< \mathrm{e}a_1+\mathrm{e}a_2+\cdots+\mathrm{e}a_n=\mathrm{e}S_n,
\end{aligned}$$

即 $T_n<\mathrm{e}S_n$.

75.（1）由 $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$，得 $f'(x)=\frac{x+1+\ln x}{(x+1)^2}$，

所以 $f'(1)=\frac{1}{2}$，于是 $m=-2$，直线 l 的方程为 $2x+y-2=0$.

原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{|-2|}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

（2）对于任意的 $x\in[1,+\infty)$，$f(x)\le m(x-1)$ 恒成立，即 $\frac{x\ln x}{x+1}\le m(x-1)$，也就是 $\ln x\le m\left(x-\frac{1}{x}\right)$，

设 $g(x)=\ln x-m\left(x-\frac{1}{x}\right)$，即 $\forall x\in[1,+\infty)$，$g(x)\le 0$ 成立.

$g'(x)=\frac{1}{x}-m\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-mx^2+x-m}{x^2}$.

①若 $m\le 0$，$\exists x$ 使 $g'(x)>0$，$g(x)\ge g(1)=0$，这与题设 $g(x)\le 0$ 矛盾；

②若 $m>0$，方程 $-mx^2+x-m=0$ 的判别式 $\Delta=1-4m^2$，

当 $\Delta\le 0$，即 $m\ge\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)\le 0$，

所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $g(x)\le g(1)=0$，即不等式成立.

当 $0<m<\frac{1}{2}$ 时，方程 $-mx^2+x-m=0$ 的两根为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，

$x_1=\frac{1-\sqrt{1-4m^2}}{2m}\in(0,1)$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1-4m^2}}{2m}\in(1,+\infty)$，

当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，$g(x)>g(1)=0$ 与题设矛盾.

综上所述，$m\ge\frac{1}{2}$.

（3）由（2）知，当 $x>1$，$m=\frac{1}{2}$ 时，$\ln x<\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$ 成立.

不妨令 $x=\frac{2k+1}{2k-1}$，$(k\in\mathbf{N}^+)$.

所以 $\ln\left(\frac{2k+1}{2k-1}\right)<\frac{1}{2}\left(\frac{2k+1}{2k-1}-\frac{2k-1}{2k+1}\right)=\frac{4k}{4k^2-1}$，

$\frac{1}{4}[\ln(2k+1)-\ln(2k-1)]<\frac{k}{4k^2-1}$，$(k\in\mathbf{N}^+)$.

所以 $\frac{1}{4}(\ln3-\ln1)<\frac{1}{4\times1^2-1}$.

$\frac{1}{4}(\ln5-\ln3)<\frac{2}{4\times2^2-1}$.

…

$\frac{1}{4}(\ln(2n+1)-\ln(2n-1))<\frac{n}{4n^2-1}$.

累加可得：$\frac{1}{4}\ln(2n+1)<\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{4i^2-1}$，$(n\in\mathbf{N}^+)$.

即 $\ln\sqrt[4]{2n+1}<\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{4i^2-1}(n\in\mathbf{N}^+)$.

76.（1） 由 $x_1=\frac{1}{2}$ 及 $x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$ 得

$$x_2=\frac{2}{3},x_4=\frac{5}{8},x_6=\frac{13}{21},$$

由 $x_2>x_4>x_6$ 猜想：数列 $\{x_{2n}\}$ 是递减数列.

下面用数学归纳法证明 $x_{2n}>x_{2n+2}$：

① 当 $n=1$ 时，已证命题成立.

② 假设当 $n=k$ 时命题成立，即 $x_{2k}>x_{2k+2}$，

易知 $x_n>0$，那么

$$\begin{aligned}x_{2k+2}-x_{2k+4}&=\frac{1}{1+x_{2k+1}}-\frac{1}{1+x_{2k+3}}=\frac{x_{2k+3}-x_{2k+1}}{(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+3})}\\&=\frac{x_{2k}-x_{2k+2}}{(1+x_{2k})(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+2})(1+x_{2k+3})}>0.\end{aligned}$$

即 $x_{2(k+1)}>x_{2(k+1)+2}$.

也就是说，当 $n=k+1$ 时命题也成立.

结合 ① 和 ② 知，命题成立.

（2） 当 $n=1$ 时，$|x_{n+1}-x_n|=|x_2-x_1|=\frac{1}{6}$，结论成立；

当 $n\geq2$ 时，易知 $0<x_{n-1}<1$，所以

$$1+x_{n-1}<2,x_n=\frac{1}{1+x_{n-1}}>\frac{1}{2},$$

所以

$$(1+x_n)(1+x_{n-1})=\left(1+\frac{1}{1+x_{n-1}}\right)(1+x_{n-1})=2+x_{n-1}\geq\frac{5}{2},$$

所以

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-x_n|&=\left|\frac{1}{1+x_n}-\frac{1}{1+x_{n-1}}\right|=\frac{|x_n-x_{n-1}|}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}\\&\leq\frac{2}{5}|x_n-x_{n-1}|\leq\left(\frac{2}{5}\right)^2|x_{n-1}-x_{n-2}|\\&\leq\cdots\leq\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}|x_2-x_1|=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

77.（1） 当 x 为奇数时，\（ 0=x \bmod x\），$t=x$，所以 $g(x)=x$；

当 x 为偶数时，$x=2^nx_0$，其中 x_0 为奇数，\（ 0=x \bmod x_0 \），$t=x_0$，所以 $g(x)=x_0$.

若 $s=2t$，$t=2^n x_0$，其中 x_0 为奇数，$s=2^{n+1}x_0$，$g(t)=g(s)=x_0$.

所以 $g(1)+g(3)+g(5)+g(7)=1+3+5+7=16$；

$g(1)+g(2)+g(3)+g(4)=1+1+3+1=6$；

$g(2)+g(4)+g(6)+g(8)=(1)+g(2)+g(3)+g(4)=6$.

（2） $g(1)+g(3)+g(5)+\cdots+g(2k-1)=1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$；

证明：

$$\begin{aligned} g(2)+g(4)+g(6)+\cdots+g(2^n) &= (2\times 1)+g(2\times 2)+g(2\times 3)+\cdots+g(2\times 2^{n-1}) \\ &= g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(2^{n-1}). \end{aligned}$$

（3） $a_1=g(1)+g(2)=2$，

$$\begin{aligned} a_n &= g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(2^n) \\ &= g(1)+g(3)+g(5)+\cdots+g(2^n-1)+g(2)+g(4)+g(6)+\cdots+g(2^n) \\ &= 1+3+5+\cdots+(2^n-1)+g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(2^{n-1}) \\ &= 2^{2n-2}+a_{n-1} \\ &= 4^{n-1}+a_{n-1}. \end{aligned}$$

可得

$a_n-a_{n-1}=4^{n-1}$，

$a_{n-1}-a_{n-2}=4^{n-2}$，

$\cdots$

$a_2-a_1=4$.

上述 $n-1$ 个式子相加得 $a_n-a_1=4+4^2+\cdots+4^{n-1}=\frac{4(4^{n-1}-1)}{3}$,

整理得 $a_n=\frac{4^n+2}{3}$.

所以 $b_n=\frac{2^n}{3a_n-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\begin{aligned} b_1+b_2+b_4+\cdots+b_{2^{n-1}} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{2^{n-1}}} \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16^2}+\cdots+\frac{1}{16^{2^{n-3}}}. \end{aligned}$$

当 $n>2$ 时，$\frac{1}{16^{2^{n-3}}}<\frac{1}{16^{n-3}}$，所以

$$\begin{aligned} b_1+b_2+b_4+\cdots+b_{2^{n-1}} &< \frac{3}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16^2}+\cdots+\frac{1}{16^{n-3}} \\ &= \frac{3}{4}+\frac{1-\frac{1}{16^{n-3}}}{15} \\ &< \frac{3}{4}+\frac{1}{15} \\ &< \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

78.（1） （ⅰ）设等差数列 a_1，a_2，$\cdots$，a_{2015} 的公差为 d，则 $a_1+a_2+\cdots+a_{2015}=2015a_1+\frac{2015\times 2014d}{2}$.

由题意得 $2015a_1+\frac{2015\times 2014d}{2}=0$，

所以 $a_1+1007d=0$，即 $a_{1008}=0$.

当 $d=0$ 时，$a_1=a_2=\cdots=a_{2015}=0$，
所以 $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{2015}|=0$ 与性质 P 矛盾；
当 $d>0$ 时，由 $a_1+a_2+\cdots+a_{2015}=\frac{1}{2}$，$a_{1008}=0$，
得 $d=\frac{1}{1007\times1008}$，$a_1=\frac{1}{1008}$.
所以 $a_n=\frac{1}{1008}+\frac{n-1}{1007\times1008}=\frac{n-1008}{1007\times1008}(n=1,2,\cdots,2015)$.
当 $d<0$ 时，由 $a_1+a_2+\cdots+a_{2017}=\frac{1}{2}$，$a_{1008}=0$，
得 $d=-\frac{1}{1007\times1008}$，$a_1=\frac{1}{1008}$.
所以 $a_n=\frac{1}{1008}+\frac{-n+1}{1007\times1008}=\frac{1008-n}{1007\times1008}(n=1,2,\cdots,2015)$.
综上所述，$a_n=\frac{n-1008}{1007\times1008}$ 或 $\frac{1008-n}{1007\times1008}(n=1,2,\cdots,2015)$.
（ⅱ）设 a_1，a_2，…，a_{2015} 是公比为 q 的等比数列，
则当 $q=1$ 时，$a_1=a_2=\cdots=a_{2015}$，则 $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots+|a_{2015}|=|a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2015}|=0$，
与性质 P 矛盾.
当 $q\neq1$ 时 $a_1+a_2+\cdots+a_{2015}=\frac{a_1(1-q^{1005})}{1-q}\neq0$.
与性质 P 矛盾.
因此不存在满足性质 P 的等比数列 a_1，a_2，…，a_{2015}.

（2）由条件知，必有 $a_i>0$，也必有 $a_j<0$ $\left(i,j\in\{1,2,\cdots,2015\},且\ i\neq j\right)$.
设 a_{i_1}，a_{i_2}，…，a_{i_l} 为所有 a_i 中大于 0 的数，a_{j_1}，a_{j_2}，…，a_{j_m} 为所有 a_i 中小于 0 的数.
由条件得 $a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_l}=\frac{1}{2}$，$a_{j_1}+a_{j_2}+\cdots+a_{j_m}=-\frac{1}{2}$.
所以

$$\begin{aligned}a_1+\frac{1}{2}a_2+\cdots+\frac{1}{n}a_n&=\left(\frac{a_{i_1}}{i_1}+\frac{a_{i_2}}{i_2}+\cdots+\frac{a_{i_l}}{i_l}\right)+\left(\frac{a_{j_1}}{j_1}+\frac{a_{j_2}}{j_2}+\cdots+\frac{a_{j_m}}{j_m}\right)\\&\leq\left(a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_l}\right)+\frac{1}{2015}\left(a_{j_1}+a_{j_2}+\cdots+a_{j_m}\right)\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{3010}\\&=\frac{1007}{2015}.\end{aligned}$$

所以 $a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{2015}a_{2015}\leq\frac{1007}{2015}$.
79.（1）①当 $n=1$ 时，$a_1=\frac{1}{4}$，有 $0<a_1<\frac{1}{3}$.
所以 $n=1$ 时，不等式成立.
②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，不等式成立，即 $0<a_k<\frac{1}{3}$.
则当 $n=k+1$ 时，

$$a_{k+1}=f(a_k)=-3\left({a_k}^2-\frac{2}{3}a_k\right)=-3\left(a_k-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3},$$

于是 $\frac{1}{3}-a_{k+1}=3\left(\frac{1}{3}-a_k\right)^2$.
因为 $0<a_k<\frac{1}{3}$，

所以 $0<3\left(\frac{1}{3}-a_k\right)^2<\frac{1}{3}$，即 $0<\frac{1}{3}-a_{k+1}<\frac{1}{3}$，可得 $0<a_{k+1}<\frac{1}{3}$.

所以当 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

由①②，可知，对任意的正整数 n，都有 $0<a_n<\frac{1}{3}$.

（2）由（1）可得 $\frac{1}{3}-a_{n+1}=3\left(\frac{1}{3}-a_n\right)^2$.

两边同时取 3 为底的对数，可得 $\log_3\left(\frac{1}{3}-a_{n+1}\right)=1+2\log_3\left(\frac{1}{3}-a_n\right)$，

化简为 $1+\log_3\left(\frac{1}{3}-a_{n+1}\right)=2\left[1+\log_3\left(\frac{1}{3}-a_n\right)\right]$.

所以数列 $\left\{1+\log_3\left(\frac{1}{3}-a_n\right)\right\}$ 是以 $\log_3\frac{1}{4}$ 为首项，2 为公比的等比数列.

所以 $1+\log_3\left(\frac{1}{3}-a_n\right)=2^{n-1}\log_3\frac{1}{4}$,

化简求得：$\frac{1}{3}-a_n=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{2^{n-1}}$，

所以 $\frac{1}{\frac{1}{3}-a_n}=3\cdot 4^{2^{n-1}}$.

因为 $n\geq 2$ 时，$2^{n-1}=\mathrm{C}_{n-1}^0+\mathrm{C}_{n-1}^1+\mathrm{C}_{n-1}^2+\cdots+\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}\geq 1+n-1=n$，

$n=1$ 时，$2^{n-1}=1$.

所以 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$2^{n-1}\geq n$，

所以 $\frac{1}{\frac{1}{3}-a_n}=3\cdot 4^{2^{n-1}}\geq 3\cdot 4^n$.

$\frac{1}{\frac{1}{3}-a_1}+\frac{1}{\frac{1}{3}-a_2}+\cdots+\frac{1}{\frac{1}{3}-a_n}=3\left[4^{2^0}+4^{2^1}+\cdots+4^{2^{n-1}}\right]\geq 3\left[4^1+4^2+\cdots+4^n\right]=4^{n+1}-4$，

所以 $\frac{3}{1-3a_1}+\frac{3}{1-3a_2}+\cdots+\frac{3}{1-3a_n}\geq 4^{n+1}-4$.

80.（1）因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(0)=0$.

当 $x\in[-2,0)$ 时，$-x\in(0,2]$，

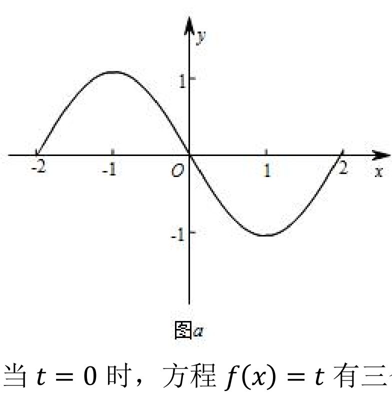
则 $f(x)=-f(-x)=-(-x)(-x-2)=-x(x+2)$，

所以 $f(x)=\begin{cases}x(x-2), & x\in[0,2],\\ -x(x+2), & x\in[-2,0).\end{cases}$

因为 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)\in[-1,0]$，$x\in[-2,0)$，$f(x)\in[0,1]$，

所以 $f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$.

（2）①函数 $f(x)$ 的图象如图 a 所示，



图a

当 $t=0$ 时，方程 $f(x)=t$ 有三个实根，

当 $t=1$ 或 $t=-1$ 时，方程 $f(x)=t$ 只有一个实根，

当 $t\in(0,1)$ 或 $t\in(-1,0)$ 时，方程 $f(x)=t$ 有两个实根.

由 $g(x)=0$，解得 $a=\frac{\ln(x+2)}{x+2}$，

因为 $f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$，

所以只需研究函数 $y=\frac{\ln(x+2)}{x+2}$ 在 $[-1,1]$ 上的图象特征.

设 $h(x)=\frac{\ln(x+2)}{x+2}$，$x\in[-1,1]$，$h(-1)=0$，

$h'(x)=\frac{1-\ln(x+2)}{(x+2)^2}$，

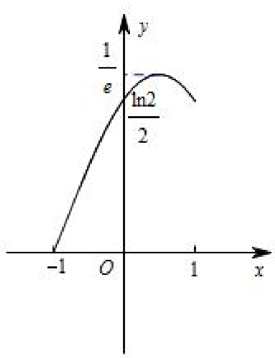
令 $h'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}-2\in(0,1)$，$h(\mathrm{e}-2)=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

因为当 $-1<x<\mathrm{e}-2$ 时，$h'(x)>0$，当 $\mathrm{e}-2<x<1$ 时，$h'(x)<0$，

又因为 $\ln2^3<\ln3^2$，即 $\frac{\ln2}{2}<\frac{\ln3}{3}$，

由 $h(0)=\frac{\ln2}{2}$，$h(1)=\frac{\ln3}{3}$，得 $h(0)<h(1)$，

所以 $h(x)$ 的大致图象如图 b 所示.



图b

根据图象 b 可知，当 $0<a<\frac{\ln2}{2}$、$\frac{\ln2}{2}<a<\frac{\ln3}{3}$、$a=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，

直线 $y=a$ 与函数 $y=h(x)$ 的图象仅有一个交点，

则函数 $g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上仅有一个零点，记零点为 t，

则 t 分别在区间 $(-1,0)$，$(0,1)$ 上，根据图象 a，

方程 $f(x)=t$ 有两个交点，

因此函数 $F(x)=g(f(x))$ 有两个零点.

类似地，当 $a=\frac{\ln2}{2}$ 时，函数 $g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上仅有零点 0，

因此函数 $F(x)$ 有 -1、0、1 这三个零点.

当 $a=\frac{\ln3}{3}$ 时，函数 $g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有两个零点，一个零点是 1，

另一个零点在 $(0,1)$ 内，因此函数 $y(x)$ 有三个零点.

当 $\frac{\ln3}{3}<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，函数 $g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有两个零点，

且这两个零点均在 $(0,1)$ 内，因此函数 $F(x)$ 有四个零点.

当 $a>\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，函数 $g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上没有零点，因此函数 $F(x)$ 没有零点.

②证明：因为 $1+\frac{1}{k}$ 是函数 $F(x)=g(f(x))$ 的一个零点，

所以有 $g\left(f\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)=0$，因为 $1+\frac{1}{k}\in(0,2)$，所以 $f\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k^2}-1$，

所以

$$g\left(f\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)=g\left(\frac{1}{k^2}-1\right)=\ln\left(\frac{1}{k^2}+1\right)-a_k\left(\frac{1}{k^2}+1\right)=0,$$

所以 $a_k=\frac{\ln\left(\frac{1}{k^2}+1\right)}{\frac{1}{k^2}+1},k=1,2,\cdots,n.$

记 $m(x)=\ln(x+1)-x$，$m'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}$,

因为当 $x\in(0,1]$ 时，$m'(x)<0$，

所以当 $x\in(0,1]$ 时，$m(x)<m(0)=0$，即 $\ln(x+1)<x$.

故有 $\ln\left(\frac{1}{k^2}+1\right)<\frac{1}{k^2}$，则

$$a_k=\frac{\ln\left(\frac{1}{k^2}\right)+1}{\frac{1}{k^2}+1}<\frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2}+1}=\frac{1}{k^2+1},k=1,2,\cdots,n.$$

当 $n=1$ 时，$a_1<\frac{1}{2}<\frac{7}{6}$.

当 $n\geq 2$ 时，因为 $\frac{1}{k^2+1}<\frac{1}{k^2-\frac{1}{4}}=\frac{2}{2k-1}-\frac{2}{2k+1}$,

所以

$$\begin{aligned}a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n &<\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^2+1}\\ &<\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}\right)\\ &=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{2}{2n+1}=\frac{7}{6}-\frac{2}{2n+1}<\frac{7}{6}.\end{aligned}$$

综上，有 $a_1+a_2+\cdots+a_n<\frac{7}{6}(n\in\mathbf{N}^*)$.

81.（1） 令 $n=1$ 可得 $a_1=S_1=0$，即 $a=0$．所以 $S_n=\frac{na_n}{2}$.

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{na_n}{2}-\frac{(n-1)a_{n-1}}{2}$，可得 $(n-2)a_n=(n-1)a_{n-1}$，

当 $n\geq 3$ 时，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n-2}$，所以 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\cdots\times\frac{a_3}{a_2}\times a_2=2(n-1)$.

显然当 $n=1,2$ 时，满足上式，所以 $a_n=2(n-1)$，$n\in\mathbf{N}^*$.

所以 $a_{n+1}-a_n=2$，所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，其通项公式是 $a_n=2(n-1)$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（2） 设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，所以 $b_n=b_1q^{n-1}=2q^{n-1}$.

因为 a_4 恰为 S_4 与 b_2-1 的等比中项，而 $a_4=6$，$S_4=12$，$b_2=2q$，

所以 $6^2=12\times(2q-1)$，解得 $q=2$，所以 $b_n=2^n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（3） $n\geq 2$ 时，有

$$\begin{aligned}T_n &=c_1+c_2+\cdots+c_n\\ &=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2^1+1}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^2+2}+\frac{1}{2^2+3}+\frac{1}{2^3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right),\end{aligned}$$

而 $n\geq 2$ 时，有

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n} \\
&> \frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n} \\
&= \frac{2^n-(2^{n-1}+1)+1}{2^n} \\
&= \frac{2^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

所以当 $n=2$ 时，$T_2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}=\frac{6\times2+13}{12}$.

当 $n\geq3$ 时，$T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{n-2\text{ 个}}=\frac{6n+13}{12}$.

所以对任意 $n\geq2$，都有 $12T_n\geq6n+13$.

82.（1） 因为等比数列 $\{a_n\}$ 的 $a_1=14$，$q=\frac{1}{2}$,

所以 $a_1=14$，$a_2=7$，$a_3=3.5$.

所以 $b_1=14$，$b_2=7$，$b_3=3$．则 $T_3=b_1+b_2+b_3=24$.

（2）（充分性）因为 $a_n\in\mathbf{N}^*$，

所以 $b_n=[a_n]=a_n$ 对一切正整数 n 都成立.

因为 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，

所以 $S_n=T_n$.

（必要性）因为对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$S_n=T_n$，

当 $n=1$ 时，由 $a_1=S_1$，$b_1=T_1$，得 $a_1=b_1$；

当 $n\geq2$ 时，由 $a_n=S_n-S_{n-1}$，$b_n=T_n-T_{n-1}$，得 $a_n=b_n$.

所以对一切正整数 n 都有 $a_n=b_n$.

因为 $b_n=[a_n]\in\mathbf{Z}$，$a_n>0$，所以对一切正整数 n 都有 $a_n\in\mathbf{N}^*$.

（3） 因为 $T_n=2n+1(n\leq2014)$，

所以 $b_1=T_1=3$，$b_n=T_n-T_{n-1}=2(2\leq n\leq2014)$.

因为 $b_n=[a_n]$，

所以 $a_1\in[3,4)$，$a_n\in[2,3)(2\leq n\leq2014)$.

由 $q=\frac{a_2}{a_1}$，得 $q<1$.

因为 $a_{2014}=a_2q^{2012}\in[2,3)$，

所以 $q^{2012}\geq\frac{2}{a_2}>\frac{2}{3}$,

所以 $\frac{2}{3}<q^{2012}<1$，即 $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2012}}<q<1$.

83.（1） 由已知，$P_n\left(a_n,\frac{2a_n}{a_n+1}\right)$，从而有 $Q_n\left(a_{n+1},\frac{2a_n}{a_n+1}\right)$.

因为 Q_n 在 $y=\frac{1}{3x}$ 上，所以有 $\frac{2a_n}{a_n+1}=\frac{1}{3a_{n+1}}$，解得

$$a_{n+1}=\frac{a_n+1}{6a_n},$$

由 $a_1>0$ 及 $a_{n+1}=\frac{a_n+1}{6a_n}$，知 $a_n>0$，下证：$a_{2n-1}<\frac{1}{2}<a_{2n}$.

解法一：因为 $a_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{-2\left(a_n-\frac{1}{2}\right)}{6a_n}$，所以 $a_{n+1}-\frac{1}{2}$ 与 $a_n-\frac{1}{2}$ 异号.

注意到 $a_1-\frac{1}{2}<0$，知 $a_{2n-1}-\frac{1}{2}<0$，$a_{2n}-\frac{1}{2}>0$，即 $a_{2n-1}<\frac{1}{2}<a_{2n}$.

解法二：

由 $a_{n+1}=\frac{a_n+1}{6a_n}$，可得 $a_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{-2\left(a_n-\frac{1}{2}\right)}{6a_n}$，$a_{n+1}+\frac{1}{3}=\frac{3\left(a_n+\frac{1}{3}\right)}{6a_n}$，

所以有 $\frac{a_{n+1}-\frac{1}{2}}{a_{n+1}+\frac{1}{3}}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{a_n-\frac{1}{2}}{a_n+\frac{1}{3}}$，即 $\left\{\frac{a_n-\frac{1}{2}}{a_n+\frac{1}{3}}\right\}$ 是以 $-\frac{2}{3}$ 为公比的等比数列；

设 $t=\frac{a_1-\frac{1}{2}}{a_1+\frac{1}{3}}$，则 $\frac{a_n-\frac{1}{2}}{a_n+\frac{1}{3}}=t\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，解得

$$a_n=\frac{\frac{1}{2}+\frac{t}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-t\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}},$$

从而有

$$\begin{aligned}a_n-\frac{1}{2}&=\frac{\frac{1}{2}+\frac{t}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-t\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}\\&=\frac{\frac{5}{6}t}{\left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}-t},\end{aligned}$$

由 $0<a_1<\frac{1}{2}$ 可得 $-\frac{3}{2}<t<0$，所以

$$\begin{aligned}a_{2n-1}-\frac{1}{2}&=\frac{\frac{5}{6}t}{\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}-t}<0,\\a_{2n}-\frac{1}{2}&=\frac{\frac{5}{6}t}{-\left(\frac{3}{2}\right)^{2n-1}-t}>0,\end{aligned}$$

所以 $a_{2n-1}<\frac{1}{2}<a_{2n}$.

（2）因为 $a_{2n+1}=\frac{a_{2n}+1}{6a_{2n}}=\frac{\frac{a_{2n-1}+1}{6a_{2n-1}}+1}{6\frac{a_{2n-1}+1}{6a_{2n-1}}}=\frac{7a_{2n-1}+1}{6(a_{2n-1}+1)}$，所以

$$\begin{aligned}a_{2n+1}-a_{2n-1}&=\frac{7a_{2n-1}+1}{6(a_{2n-1}+1)}-a_{2n-1}\\&=\frac{-2\left(a_{2n-1}-\frac{1}{2}\right)(3a_{2n-1}+1)}{6(a_{2n-1}+1)},\end{aligned}$$

因为 $0<a_{2n-1}<\frac{1}{2}$，所以 $a_{2n+1}>a_{2n-1}$，所以有

$$a_{2n}>\frac{1}{2}>a_{2n-1}>a_{2n-3}>\cdots>a_1,$$

从而可知 $a_n\geq a_1$，故

$$\begin{aligned}|a_{n+2}-a_{n+1}| &= |\frac{a_{n+1}+1}{6a_{n+1}}-\frac{a_n+1}{6a_n}| \\ &= \frac{|a_{n+1}-a_n|}{6a_na_{n+1}} \\ &= \frac{|a_{n+1}-a_n|}{a_n+1} \\ &\le \frac{|a_{n+1}-a_n|}{a_1+1} \\ &= \frac{3}{4}|a_{n+1}-a_n|.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}|a_{n+1}-a_n| &\le \frac{3}{4}|a_n-a_{n-1}| \\ &\le \left(\frac{3}{4}\right)^2|a_{n-1}-a_{n-2}| \\ &\le \cdots \le \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}|a_2-a_1| \\ &= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+|a_4-a_3|+\cdots+|a_{n+1}-a_n| &\le \frac{1}{3}\left[1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right] \\ &= \frac{1}{3}\times\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}} \\ &= \frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] \\ &< \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

84.（1） 因为 $a_2a_4=a_1^2q^4=q^4=16$，$q^2=4$，

因为 $a_n>0$，所以 $q=2$，

所以 $a_n=2^{n-1}$，

所以 $b_3=a_4=8$.

因为 $6S_n=b_n^2+3b_n+2$①

当 $n\ge 2$ 时，$6S_{n-1}=b_{n-1}^2+3b_{n-1}+2$②

①−② 得 $6b_n=b_n^2-b_{n-1}^2+3b_n-3b_{n-1}$.

即 $(b_n+b_{n-1})(b_n-b_{n-1})=3(b_n+b_{n-1})$，

因为 $b_n>0$，所以 $b_n-b_{n-1}=3$，

所以 $\{b_n\}$ 是公差为 3 的等差数列.

当 $n=1$ 时，$6b_1=b_1^2+3b_1+2$，解得 $b_1=1$ 或 $b_1=2$，

当 $b_1=1$ 时，$b_n=3n-2$，此时 $b_3=7$，与 $b_3=8$ 矛盾；

当 $b_1=2$ 时 $b_n=3n-1$，此时 $b_3=8=a_4$，

所以 $b_n=3n-1$.

（2）（1）

因为 $b_n=3n-1$，所以 $c_n=\frac{b_n}{a_n}=\frac{3n-1}{2^{n-1}}$,

$T_n=2\times 1+5\times\frac{1}{2}+8\times\frac{1}{4}\cdots+(3n-4)\times\frac{1}{2^{n-2}}+(3n-1)\times\frac{1}{2^{n-1}}$①

$\frac{1}{2}T_n=2\times\frac{1}{2}+5\times\frac{1}{4}+8\times\frac{1}{8}\cdots+(3n-4)\times\frac{1}{2^{n-1}}+(3n-1)\times\frac{1}{2^n}$②

①－② 得 $\frac{1}{2}T_n=2+3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-(3n-1)\times\frac{1}{2^n}$,

$T_n=10-\frac{3n+5}{2^{n-1}}$.

（2）

$$d_n=\frac{1}{3}[a_n+2(-1)^{n-1}]=\frac{2}{3}[2^{n-2}+(-1)^{n-1}]$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{d_4}+\frac{1}{d_5}+\cdots+\frac{1}{d_m}\\
=\ &\frac{3}{2}\left[\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{2^3+1}+\cdots+\frac{1}{2^{m-2}-(-1)^{m-1}}\right]\\
=\ &\frac{3}{2}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{33}+\frac{1}{63}+\cdots+\frac{1}{2^{m-2}-(-1)^{m-1}}\right]\\
=\ &\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\cdots\right]\\
<\ &\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\cdots\right]\\
=\ &\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}+\frac{\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{2^{m-5}}\right)}{1-\frac{1}{2}}\right]\\
=\ &\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}+\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2^{m-5}}\right]\\
=\ &\frac{13}{15}-\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{m-5}<\frac{13}{15}\\
=\ &\frac{104}{120}<\frac{105}{120}=\frac{7}{8}.
\end{aligned}$$

故 $\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\cdots+\frac{1}{a_m}<\frac{7}{8}(m>4)$.

85.（1）$\begin{cases}x_1+x_2=0, & \cdots\cdots① \\ |x_1|+|x_2|=1. & \cdots\cdots②\end{cases}$

由 ① 得 $x_2=-x_1$，再由 ② 知 $x_1\neq 0$ 且 $x_2\neq 0$.

当 $x_1>0$ 时，$x_2<0$，得 $2x_1=1$，所以

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2},\\ x_2=-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

当 $x_1<0$ 时，同理得

$$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2},\\ x_2=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

（2）当 $n=3$ 时，由已知 $x_1+x_2+x_3=0$，$|x_1|+|x_2|+|x_3|=1$.

所以

$$\begin{aligned}|3x_1+2x_2+x_3| &= |x_1+2(x_1+x_2+x_3)-x_3| \\ &= |x_1-x_3| \le |x_1|+|x_3| \le 1.\end{aligned}$$

（3） 因为 $a_1 \ge a_i \ge a_n$，且 $a_1 > a_n$（$i=1,2,3,\cdots,n$）.

所以

$$|(a_1-a_i)-(a_i-a_n)| \le |(a_1-a_i)+(a_i-a_n)| = |a_1-a_n|,$$

即 $|a_1+a_n-2a_i| \le |a_1-a_n|$（$i=1,2,3,\cdots,n$），则

$$\begin{aligned}|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i| &= |\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \frac{1}{2}a_1\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{2}a_n\sum_{i=1}^{n} x_i| \\ &= \frac{1}{2}|\sum_{i=1}^{n}(2a_i-a_1-a_n)x_i| \\ &\le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(|a_1+a_n-2a_i||x_i|) \\ &\le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(|a_1-a_n||x_i|) \\ &= \frac{1}{2}|a_1-a_n|\sum_{i=1}^{n}|x_i| \\ &= \frac{1}{2}(a_1-a_n).\end{aligned}$$

86.（1） 由 $b_n=\frac{3+(-1)^n}{2},n\in\mathbf{N}^*$，可得

$$b_n=\begin{cases}1, n\ \text{为奇数}, \\ 2, n\ \text{为偶数}.\end{cases}$$

又 $b_n a_n + a_{n+1} + b_{n+1}a_{n+2} = 0$，

当 $n=1$ 时，

$$a_1+a_2+2a_3=0,$$

由 $a_1=2$，$a_2=4$，可得

$$a_3=-3;$$

当 $n=2$ 时，

$$2a_2+a_3+a_4=0,$$

可得

$$a_4=-5;$$

当 $n=3$ 时，

$$a_3+a_4+2a_5=0,$$

可得

$$a_5=4.$$

（2） 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，

$$a_{2n-1}+a_{2n}+2a_{2n+1}=0, \qquad \cdots\cdots①$$
$$2a_{2n}+a_{2n+1}+a_{2n+2}=0, \qquad \cdots\cdots②$$
$$a_{2n+1}+a_{2n+2}+2a_{2n+3}=0, \qquad \cdots\cdots③$$

②－③，得

$$a_{2n}=a_{2n+3}. \quad \cdots\cdots④$$

将④代入①，可得

$$a_{2n+1}+a_{2n+3}=-(a_{2n-1}+a_{2n+1}),$$

即

$$c_{n+1}=-c_n(n\in\mathbf{N}^*).$$

又 $c_1=a_1+a_3=-1$，故 $c_n\neq 0$，因此

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=-1,$$

所以 $\{c_n\}$ 是等比数列.

（3）由（2）可得

$$a_{2k-1}+a_{2k+1}=(-1)^k,$$

于是，对任意 $k\in\mathbf{N}^*$ 且 $k\geq 2$，有

$$\begin{aligned} a_1+a_3&=-1,\\ -(a_3+a_5)&=-1,\\ a_5+a_7&=-1,\\ &\vdots\\ (-1)^k(a_{2k-3}+a_{2k-1})&=-1. \end{aligned}$$

将以上各式相加，得

$$a_1+(-1)^k a_{2k-1}=-(k-1),$$

即

$$a_{2k-1}=(-1)^{k+1}(k+1),$$

此式当 $k=1$ 时也成立．由④式得

$$a_{2k}=(-1)^{k+1}(k+3).$$

从而

$$\begin{aligned} S_{2k}&=(a_2+a_4)+(a_6+a_8)+\cdots+(a_{4k-2}+a_{4k})=-k,\\ S_{2k-1}&=S_{2k}-a_{4k}=k+3. \end{aligned}$$

所以，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geq 2$，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4n}\frac{S_k}{a_k} &= \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{S_{4m-3}}{a_{4m-3}}+\frac{S_{4m-2}}{a_{4m-2}}+\frac{S_{4m-1}}{a_{4m-1}}+\frac{S_{4m}}{a_{4m}}\right)\\ &= \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{2m+2}{2m}-\frac{2m-1}{2m+2}-\frac{2m+3}{2m+1}+\frac{2m}{2m+3}\right)\\ &= \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{2}{2m(2m+1)}+\frac{3}{(2m+2)(2m+3)}\right)\\ &= \frac{2}{2\times 3}+\sum_{m=2}^{n}\frac{5}{2m(2m+1)}+\frac{3}{(2n+2)(2n+3)}\\ &< \frac{1}{3}+\sum_{m=2}^{n}\frac{5}{(2m-1)(2m+1)}+\frac{3}{(2n+2)(2n+3)}\\ &= \frac{1}{3}+\frac{5}{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]+\frac{3}{(2n+2)(2n+3)}\\ &= \frac{1}{3}+\frac{5}{6}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2n+1}+\frac{3}{(2n+2)(2n+3)}\\ &< \frac{7}{6}.\end{aligned}$$

对于 $n=1$，不等式显然成立．

87.（1） 由题意知，$a_n>0$．

因为 $2a_{n+1}^2-2a_n^2=a_n+1-2a_n^2=(1-a_n)(1+2a_n)$，

故要证 $a_{n+1}>a_n$，

只需证明 $a_n<1$．

下面用数学归纳法证明：

当 $n=1$ 时，$a_1=\frac{1}{2}<1$ 成立，

假设 $n=k$ 时，$a_k<1$ 成立．

那么当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}=\sqrt{\frac{a_k+1}{2}}<\sqrt{\frac{1+1}{2}}=1$，

综上所述，对任意 $n\in N^*$，$a_n<1$．

所以 $a_{n+1}>a_n$．

（2） 用数学归纳法证明：$a_n=\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$，

当 $n=1$ 时，$a_1=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$ 成立；

假设 $n=k$ 时，$a_k=\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{k-1}}$ 成立，

那么当 $n=k+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= \sqrt{\frac{a_k+1}{2}}\\
&= \sqrt{\frac{\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{k-1}}+1}{2}}\\
&= \sqrt{\frac{\cos\frac{2\pi}{3\cdot 2^{k}}+1}{2}}\\
&= \sqrt{\frac{2\cos^2\frac{\pi}{3\cdot 2^{k}}}{2}}\\
&= \cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{k}},
\end{aligned}
$$

综上所述，对任意 $n\in N^*$，$a_n=\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$.

（3） 当 $n=1$ 时，$S_1=\frac{1}{2}>1-\frac{27+\pi^2}{54}$,

当 $n\geq 2$ 时，$\frac{1-a_{n-1}}{2}=1-\frac{a_{n-1}+1}{2}=1-a_n^2=\sin^2\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}<\left(\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}\right)^2$,

得 $a_{n-1}>1-\frac{2\pi^2}{9\cdot 4^{n-1}}$,

故

$$
\begin{aligned}
S_n &> \sum_{i=2}^{n}\left(1-\frac{2\pi^2}{9\cdot 4^{i}}\right)+\frac{1}{2}\\
&= n-\frac{1}{2}-\frac{2\pi^2}{9}\times\frac{4}{3}\times\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{4^{n-1}}\right)\\
&> n-\frac{27+\pi^2}{54}, n\geq 2,
\end{aligned}
$$

即 $S_n>n-\frac{27+\pi^2}{54}$.

88.（1） 因为 $f(x)=\ln(1+x)+\frac{a}{2}x^2-x$，其定义域为 $(-1,+\infty)$，

所以 $f'(x)=\frac{1}{1+x}+ax-1=\frac{x(ax+a-1)}{1+x}$.

①当 $a=0$ 时，$f'(x)=-\frac{x}{1+x}$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，此时，$f(x)<f(0)=0$，不符合题意.

②当 $0<a<1$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x_1=0$，$x_2=\frac{1-a}{a}>0$，当 $x\in\left(0,\frac{1-a}{a}\right)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1-a}{a}\right)$ 上单调递减，此时，$f(x)<f(0)=0$，不符合题意.

③ 当 $a=1$ 时，$f'(x)=\frac{x^2}{1+x}$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，此时 $f(x)>f(0)=0$，符合题意.

④当 $a>1$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x_1=0$，$x_2=\frac{1-a}{a}<0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，此时 $f(x)>f(0)=0$，符合题意.

综上所述，a 的取值范围为 $[1,+\infty)$.

（2） 由（1）可知，当 $a=0$ 时，$f(x)<0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 都成立，即 $\ln(1+x)<x$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 都成立.

所以 $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)<\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}$

即 $\ln\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right]<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\frac{n+1}{2n}$.

由于 $n\in\mathbf{N}^*$，则 $\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 1}=1$.

所以 $\ln\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right]<1$.

所以 $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)<\mathrm{e}$.

由（1）可知，当 $a=1$ 时，$f(x)>0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 都成立，即 $x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x)$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 都成立.

所以 $\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1^2}{n^4}+\frac{2^2}{n^4}+\cdots+\frac{n^2}{n^4}\right)<\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

即 $\frac{n(n+1)}{2n^2}-\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^4}\right]<\ln\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right]$.

得 $\frac{6n^3+4n^2-3n-1}{12n^3}<\ln\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right]$

由于 $n\in\mathbf{N}^*$，则 $\frac{6n^3+4n^2-3n-1}{12n^3}=\frac{6n^3+\left(3n^2-3n\right)+\left(n^2-1\right)}{12n^3}\geq\frac{6n^3}{12n^3}=\frac{1}{2}$.

所以 $\frac{1}{2}<\ln\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right]$.

所以 $\sqrt{\mathrm{e}}<\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

所以 $\sqrt{\mathrm{e}}<\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)<\mathrm{e}$.

89.（1） 因为 $y=nx^2$，所以 $y'=2nx$.

又 $P_n\left(x_n,nx_n^2\right)$，所以曲线 C_n 在点 $P_n\left(x_n,nx_n^2\right)$ 处的切线 l_n 为

$$y-nx_n^2=2nx_n(x-x_n),$$

即

$$y=2nx_nx-nx_n^2.$$

令 $x=0$，得 $Q_n\left(0,-nx_n^2\right)$.

（2） 直线 l_n 的一般式方程为

$$y-2nx_nx+nx_n^2=0,$$

原点到 l_n 的距离为

$$d_1=\frac{nx_n^2}{\sqrt{1+4n^2x_n^2}},$$

线段 P_nQ_n 的长度为

$$d_2=\sqrt{x_n^2+4n^2x_n^4}=x_n\sqrt{1+4n^2x_n^2}.$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{d_1}{d_2}&=\frac{nx_n^2}{x_n\left(1+4n^2x_n^2\right)}=\frac{nx_n}{1+4n^2x_n^2}\\&=\frac{n}{\frac{1}{x_n}+4n^2x_n}\leq\frac{n}{4n}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{1}{x_n}=4n^2x_n$，即 $x_n=\frac{1}{2n}$ 时取等号，此时 $P_n\left(\frac{1}{2n},\frac{1}{4n}\right)$.

（3） 由（2）知 $x_n=\frac{1}{2n}$，$y_n=\frac{1}{4n}$，于是

$$\sum_{n=1}^{s}\left|\sqrt{\frac{(m+1)x_n}{2}}-\sqrt{(k+1)y_n}\right| =\sum_{n=1}^{s}\left|\frac{\sqrt{m+1}-\sqrt{k+1}}{2\sqrt{n}}\right|$$

$$=\sum_{n=1}^{s}\frac{|m-k|}{2\sqrt{n}\left(\sqrt{m+1}+\sqrt{k+1}\right)}$$

$$<\sum_{n=1}^{s}\frac{|m-k|}{2\sqrt{n}\left(\sqrt{m}+\sqrt{k}\right)}$$

$$=|\sqrt{m}-\sqrt{k}|\sum_{n=1}^{s}\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

现证明：$\sum_{n=1}^{s}\frac{1}{2\sqrt{n}}<\sqrt{s}(s=1,2,3,\cdots)$．因为

$$\sum_{n=1}^{s}\frac{1}{2\sqrt{n}} <\sum_{n=1}^{s}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\sum_{n=1}^{s}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$$

$$=1+\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\cdots+\left(\sqrt{s}-\sqrt{s-1}\right)$$

$$=\sqrt{s},$$

故问题得证．

90.（1） 展开式中二项式系数最大的项是第 4 项，这项是

$$\mathrm{C}_6^3 1^3\left(\frac{1}{n}\right)^3=\frac{20}{n^3}.$$

（2） 证法一：

$$f(2x)+f(2) =\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2x}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}$$

$$\geq 2\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2x}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}}$$

$$=2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$>2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}$$

$$>2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$\geq 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=2f'(x).$$

证法二：

因

$$\begin{aligned} f(2x)+f(2) &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2x}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2} \\ &\geq 2\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2x}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}} \\ &= 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

而 $2f'(x)=2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，故只需对 $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 和 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 进行比较.

令 $g(x)=x-\ln x(x\geq 1)$，有

$$g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}.$$

由 $\frac{x-1}{x}=0$，得

$$x=1.$$

因为当 $0<x<1$ 时，

$$g'(x)<0,$$

$g(x)$ 单调递减；

当 $x>1$ 时，

$$g'(x)>0,$$

$g(x)$ 单调递增，

所以在 $x=1$ 处 $g(x)$ 有极小值 1.

故当 $x>1$ 时，

$$g(x)>g(1)=1,$$

从而有 $x-\ln x>1$，亦即

$$x>\ln x+1>\ln x,$$

故有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 恒成立．所以

$$\begin{aligned} f(2x)+f(2) &\geq 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &> 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= 2f'(x), \end{aligned}$$

原不等式成立.

（3） 对 $m\in\mathbf{N}$，且 $m>1$，有

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{m}\right)^m &= \mathrm{C}_m^0+\mathrm{C}_m^1\left(\frac{1}{m}\right)+\mathrm{C}_m^2\left(\frac{1}{m}\right)^2+\cdots+\mathrm{C}_m^k\left(\frac{1}{m}\right)^k+\cdots+\mathrm{C}_m^m\left(\frac{1}{m}\right)^m \\
&= 1+1+\frac{m(m-1)}{2!}\left(\frac{1}{m}\right)^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}\left(\frac{1}{m}\right)^k \\
&\quad+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots 2\cdot 1}{m!}\left(\frac{1}{m}\right)^m \\
&= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right) \\
&\quad+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right) \\
&< 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots+\frac{1}{m!} \\
&< 2+\frac{1}{2\times 1}+\frac{1}{3\times 2}+\cdots+\frac{1}{k(k-1)}+\cdots+\frac{1}{m(m-1)} \\
&= 2+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right) \\
&= 3-\frac{1}{m}<3.
\end{aligned}
$$

又因 $\mathrm{C}_m^k\left(\frac{1}{m}\right)^k>0(k=2,3,4,\cdots,m)$，故

$$2<\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<3.$$

又因为当 $k=1$ 时，有 $2\le\left(1+\frac{1}{1}\right)^1<3$，从而有 $2n<\sum_{k=1}^n\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<3n$ 成立，

即存在 $a=2$，使得 $2n<\sum_{k=1}^n\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<3n$ 恒成立.

91.（1） 直线方程 $y=k_n(x+1)$ 代入 $x^2-2nx+y^2=0$ 整理得

$$(1+k_n^2)x^2+(2k_n^2-2n)x+k_n^2=0,$$

则

$$\Delta=(2k_n^2-2n)^2-4(1+k_n^2)k_n^2=0,$$

解得

$$
\begin{aligned}
k_n &= \frac{n}{\sqrt{2n+1}}\left(-\frac{n}{\sqrt{2n+1}}\text{舍去}\right), \\
x_n^2 &= \frac{k_n^2}{1+k_n^2}=\frac{n^2}{(n+1)^2},
\end{aligned}
$$

即

$$x_n=\frac{n}{n+1},$$

因此

$$y_n=k_n(x_n+1)=\frac{n\sqrt{2n+1}}{n+1}.$$

本小问也可以用圆心到直线的距离等于半径求解.

（2） 因为

$$\sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}}=\sqrt{\frac{1-\frac{n}{n+1}}{1+\frac{n}{n+1}}}=\sqrt{\frac{1}{2n+1}}$$

而

$$\begin{aligned}x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot\cdots\cdot x_{2n-1}&=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}\\&<\sqrt{\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\cdots\times\frac{2n}{2n+1}\right)}\\&=\sqrt{\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n+1}}\\&=\sqrt{\frac{1}{2n+1}},\end{aligned}$$

所以

$$x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdots\cdots x_{2n-1}<\sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}},$$

由于

$$\frac{x_n}{y_n}=\sqrt{\frac{1}{2n+1}}=\sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}},$$

可令函数 $f(x)=x-\sqrt{2}\sin x$，则

$$f'(x)=1-\sqrt{2}\cos x,$$

令 $f'(x)=0$，得 $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，给定区间 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，

则有 $f'(x)<0$，则函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减，所以

$$f(x)<f(0)=0,$$

即 $x<\sqrt{2}\sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上恒成立，又

$$0<\sqrt{\frac{1}{2n+1}}\leq\sqrt{\frac{1}{3}}<\frac{\pi}{4},$$

则有

$$\sqrt{\frac{1}{2n+1}}<\sqrt{2}\sin\sqrt{\frac{1}{2n+1}},$$

即

$$\sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}}<\sqrt{2}\sin\frac{x_n}{y_n}.$$

92.（1） 因为 $f'(x)=3x^2+2x$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_{n+1},f(x_{n+1}))$ 处的切线斜率 $k_{n+1}=3x^2_{n+1}+2x_{n+1}$.

因为过 $(0,0)$ 和 $(x_n,f(x_n))$ 两点的直线斜率是 $x_n^2+x_n$，

所以 $x_n^2+x_n=3x_{n+1}^2+2x_{n+1}$ 成立.

（2） 因为函数 $h(x)=x^2+x$ 当 $x>0$ 时单调递增，而

$$x_n^2+x_n=3x_{n+1}^2+2x_{n+1}\le 4x_{n+1}^2+2x_{n+1}=(2x_{n+1})^2+2x_{n+1}.$$

所以 $x_n\le 2x_{n+1}$，即 $\frac{x_{n+1}}{x_n}\ge\frac{1}{2}$,

因此

$$x_n=\frac{x_n}{x_{n-1}}\cdot\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{x_2}{x_1}\ge\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

又因为

$$x_n^2+x_n\ge 2\left(x_{n+1}^2+x_{n+1}\right),$$

令 $y_n=x_n^2+x_n$，则

$$\frac{y_{n+1}}{y_n}\le\frac{1}{2}.$$

因为 $y_1=x_1^2+x_1=2$，所以

$$y_n\le y_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

因此

$$x_n\le x_n^2+x_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2},$$

故

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\le x_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

93.（1） 对任意的 $x\in[1,2]$，则

$$2x\in[2,4],\varphi(2x)=\sqrt[3]{1+2x},$$

从而

$$1<\sqrt[3]{3}\le\varphi(2x)\le\sqrt[3]{5}<2,$$

即满足

$$\varphi(2x)\in(1,2).$$

对任意的 $x_1,x_2\in[1,2]$，由分子有理化，得

$$\begin{aligned}&|\varphi(2x_1)-\varphi(2x_2)|\\&=|\sqrt[3]{1+2x_1}-\sqrt[3]{1+2x_2}|\\&=\frac{2|x_1-x_2|}{\sqrt[3]{(1+2x_1)^2}+\sqrt[3]{(1+2x_1)(1+2x_2)}+\sqrt[3]{(1+2x_2)^2}}.\end{aligned}$$

记

$$\frac{2}{\sqrt[3]{(1+2x_1)^2}+\sqrt[3]{(1+2x_1)(1+2x_2)}+\sqrt[3]{(1+2x_2)^2}}=L,$$

且 $0<L<\frac{2}{3}<1$，满足

$$|\varphi(2x_1)-\varphi(2x_2)|\le L|x_1-x_2|,$$

综上，$\varphi(x)$ 同时满足①、② 两个条件，因此，$\varphi(x)\in A$ 成立.

（2） 反证法：

设存在 $x_0,x'_0\in(1,2)$，且 $x_0\ne x'_0$ 使得

$$x_0=\varphi(2x_0),x'_0=\varphi(2x'_0),$$

则由条件②，得

$$|\varphi(2x_0)-\varphi(2x'_0)|\le L|x_0-x'_0|,$$

即

$$|x_0-x'_0|\le L|x_0-x'_0|,$$

所以 $L\ge 1$，这与 $0<L<1$ 矛盾.

因此，所证结论成立.

（3）

$$\begin{aligned}|x_3-x_2| &= |\varphi(2x_2)-\varphi(2x_1)|\\ &\le L|x_2-x_1|,\\ |x_4-x_3| &= |\varphi(2x_3)-\varphi(2x_2)|\\ &\le L|x_3-x_2|\\ &\le L^2|x_2-x_1|,\end{aligned}$$

依此类推，得

$$|x_{n+1}-x_n|\le L^{n-1}|x_2-x_1|.$$

因此

$$\begin{aligned}&|x_{k+p}-x_k|\\ &=|(x_{k+p}-x_{k+p-1})+(x_{k+p-1}-x_{k+p-2})+\cdots+(x_{k+1}-x_k)|\\ &\le|x_{k+p}-x_{k+p-1}|+|x_{k+p-1}-x_{k+p-2}|+\cdots+|x_{k+1}-x_k|\\ &\le L^{k+p-2}|x_2-x_1|+L^{k+p-3}|x_2-x_1|+\cdots+L^{k-1}|x_2-x_1|\\ &\le\frac{L^{k-1}}{1-L}|x_2-x_1|.\end{aligned}$$

94.（1） 令 $n=1\Rightarrow a_1=1$；

令 $n=2\Rightarrow a_1+2a_2=2\Rightarrow a_2=\frac{1}{2}$;

令 $n=3\Rightarrow a_1+2a_2+3a_3=4-\frac{5}{4}\Rightarrow a_3=\frac{1}{4}$.

（2） 当 $n\ge 2$ 时，$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=4-\frac{n+1}{2^{n-2}}$，……①

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$. ……②

②$-$①，得 $na_n=\frac{n+1}{2^{n-2}}-\frac{n+2}{2^{n-1}}=\frac{n}{2^{n-1}}$,

$\therefore a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$.

又当 $n=1$ 时，$a_1=1$ 也适合 $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$,

$\therefore a_n=\frac{1}{2^{n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$，易证数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，首项 $a_1=1$，公比 $q=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$.

（3） $\because b_1=a_1=1$，$\therefore S_1<2+2\ln1$ 成立.

又 $b_2=\frac{a_1}{2}+\left(1+\frac{1}{2}\right)a_2$，

$b_3=\frac{a_1+a_2}{3}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)a_3$，

$\cdots$,

$b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n}+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)a_n$，

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$$\begin{aligned} S_n &= b_1+b_2+\cdots+b_n \\ &= \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)a_1+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)a_2+\cdots+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)a_n \\ &= \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(a_1+a_2+\cdots+a_n) \\ &= \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &< 2\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

构造函数 $h(x)=\ln\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+1,x>0,h'(x)=\frac{1-x}{x^2}$，

令 $h'(x)>0$，解得 $0<x<1$；

令 $h'(x)<0$，解得 $x>1$，

$\therefore h(x)=\ln\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+1$，$x>0$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore h(x)<h(1)=0$，

$\therefore \ln\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+1\le 0$，$x>0$（仅当 $x=1$ 时取等号），

即 $\ln x\ge 1-\frac{1}{x}$，又

$$\begin{aligned} \ln n &= \ln\frac{n}{n-1}+\ln\frac{n-1}{n-2}+\cdots+\ln 2 \\ &> \left(1-\frac{n-1}{n}\right)+\left(1-\frac{n-2}{n-1}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}, \end{aligned}$$

$\therefore 2\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)<2+2\ln n$，

$\therefore S_n<2+2\ln n$.

95.（1） 当 $x\neq 1$ 时，$f_n(x)=\frac{x-x^{n+1}}{1-x}-1$，则

$$f'_n(x)=\frac{[1-(n+1)x^n](1-x)+(x-x^{n+1})}{(1-x)^2},$$

可得

$$f'_n(2)=\frac{-[1-(n+1)2^n]+2-2^{n+1}}{(1-2)^2}=(n-1)2^n+1.$$

（2） 因为 $f_n(0)=-1<0$，

$$f_n\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}}-1=1-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n\ge 1-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2>0,$$

所以 $f_n(x)$ 在 $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ 内至少存在一个零点.

又 $f'_n(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}>0$，

所以 $f_n(x)$ 在 $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ 内单调递增，

因此，$f_n(x)$ 在 $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ 内有且仅有一个零点 a_n.

由于 $f_n(x)=\frac{x-x^{n+1}}{1-x}-1$，

所以 $0=f_n(a_n)=\frac{a_n-a_n^{n+1}}{1-a_n}-1$，

由此可得 $a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a_n^{n+1}>\frac{1}{2}$，故 $\frac{1}{2}<a_n<\frac{2}{3}$，

所以 $0<a_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a_n^{n+1}<\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

96.（1） 先用数学归纳法证明 $1<a_n<2$，

当 $n=1$ 时，$1<a_1=\frac{3}{2}<2$，

假设 $n=k$ 时 $1<a_k<2$ 成立.

当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}=a_k^2-2a_k+2=(a_k-1)^2+1\in(1,2)$.

综上所述，$1<a_n<2$，$n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立.

$a_{n+1}-a_n=a_n^2-3a_n+2=(a_n-1)(a_n-2)<0$.

所以 $1<a_{n+1}<a_n<2$ 成立.

（2） $a_1=\frac{3}{2}=\frac{6}{3+2^{1-1}}$，$a_2=\frac{5}{4}>\frac{6}{3+2^{2-1}}$，

当 $n\ge 3$ 时，$\frac{6}{2^{n-1}+3}<1$，且 $1<a_n<2$，

所以 $a_n>\frac{6}{2^{n-1}+3}$.

所以 $a_n\ge\frac{6}{2^{n-1}+3}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

由 $a_{n+1}=a_n^2-2a_n+2$ 得 $2-a_{n+1}=2a_n-a_n^2$，

$\Rightarrow\frac{1}{2-a_{n+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-a_n}+\frac{1}{a_n}\right)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-a_n}+1\right)$

$\Rightarrow\frac{1}{2-a_{n+1}}-1<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-a_n}-1\right)$，

所以，当 $n\ge 2$ 时，$\frac{1}{2-a_n}-1<\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2-a_1}-1\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\Rightarrow a_n<\frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1}$，当 $n=1$ 时，$a_1=\frac{3}{2}=\frac{2^{1-1}+2}{2^{1-1}+1}$，

所以 $a_n\le\frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

综上所述，$\frac{6}{2^{n-1}+3}\le a_n\le\frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1}$.

（3） 由（1）中的结果 $1<a_n<2$ 得 $S_n>n$，

由（2）得 $a_n\le\frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1}=1+\frac{1}{2^{n-1}+1}<1+\frac{1}{2^{n-1}}$，

$$\begin{aligned}S_n &< \left(1+\frac{1}{2^{1-1}}\right)+\left(1+\frac{1}{2^{2-1}}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\\ &= n+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\\ &= n+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\\ &< n+2.\end{aligned}$$

97.（1）

$$F_n(x)=f_n(x)-2=1+x+x^2+\cdots+x^n-2,$$

则 $F_n(1)=n-1>0$.

$$F_n\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n-2=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}-2=-\frac{1}{2^n}<0,$$

所以 $F_n(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内至少存在一个零点.

又 $F'_n(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}>0$，故 $F_n(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内单调递增，

所以 $F_n(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个零点 x_n.

因为 x_n 是 $F_n(x)$ 的零点，所以 $F_n(x_n)=0$，即

$$\frac{1-x_n^{n+1}}{1-x_n}-2=0,$$

故 $x_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_n^{n+1}$.

（2） 方法一：

由题设，$g_n(x)=\frac{(n+1)(1+x^n)}{2}$.

设

$$\begin{aligned}h(x)&=f_n(x)-g_n(x)\\&=1+x+x^2+\cdots+x^n-\frac{(n+1)(1+x^n)}{2},x>0.\end{aligned}$$

当 $x=1$ 时，$f_n(x)=g_n(x)$.

当 $x\neq1$ 时，

$$h'(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}-\frac{n(n+1)}{2}\cdot x^{n-1}.$$

当 $x>1$ 时，

$$\begin{aligned}h'(x)&<x^{n-1}+2x^{n-1}+\cdots+nx^{n-1}-\frac{n(n+1)}{2}\cdot x^{n-1}\\&=\frac{n(n+1)}{2}\cdot x^{n-1}-\frac{n(n+1)}{2}\cdot x^{n-1}=0.\end{aligned}$$

当 $0<x<1$ 时，

$$\begin{aligned}h'(x)&>x^{n-1}+2x^{n-1}+\cdots+nx^{n-1}-\frac{n(n+1)}{2}\cdot x^{n-1}\\&=\frac{n(n+1)}{2}\cdot x^{n-1}-\frac{n(n+1)}{2}\cdot x^{n-1}=0.\end{aligned}$$

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，在 $(1,+\infty)$ 上递减.

所以 $h(x)<h(1)=0$，即 $f_n(x)<g_n(x)$.

综上所述，当 $x=1$ 时，$f_n(x)=g_n(x)$；当 $x\neq1$ 时，$f_n(x)<g_n(x)$.

方法二：

由题设，$f_n(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n$，$g_n(x)=\frac{(n+1)(1+x^n)}{2},x>0$.

当 $x=1$ 时，$f_n(x)=g_n(x)$.

当 $x\neq1$ 时，用数学归纳法可以证明 $f_n(x)<g_n(x)$.

① 当 $n=2$ 时，$f_2(x)-g_2(x)=-\frac{1}{2}(1-x)^2<0$，

所以 $f_2(x)<g_2(x)$ 成立.

② 假设 $n=k(k\geq 2)$ 时，不等式成立，即 $f_k(x)<g_k(x)$.

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= f_k(x)+x^{k+1} \\ &< g_k(x)+x^{k+1} \\ &= \frac{(k+1)\left(1+x^k\right)}{2}+x^{k+1} \\ &= \frac{2x^{k+1}+(k+1)x^k+k+1}{2}. \end{aligned}$$

又

$$g_{k+1}(x)-\frac{2x^{k+1}+(k+1)x^k+k+1}{2}=\frac{kx^{k+1}-(k+1)x^k+1}{2}.$$

令 $h_k(x)=kx^{k+1}-(k+1)x^k+1(x>0)$，则

$$\begin{aligned} h'_k(x) &= k(k+1)x^k-k(k+1)x^{k-1} \\ &= k(k+1)x^{k-1}(x-1). \end{aligned}$$

所以当 $0<x<1$ 时，$h'_k(x)<0$，$h_k(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减；

当 $x>1$ 时，$h'_k(x)>0$，$h_k(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增.

所以 $h_k(x)>h_k(1)=0$，

从而 $g_{k+1}(x)>\frac{2x^{k+1}+(k+1)x^k+k+1}{2}$.

故 $f_{k+1}(x)<g_{k+1}(x)$，即 $n=k+1$ 时不等式也成立.

由 ① 和 ② 知，对一切 $n\geq 2$ 的整数，都有 $f_n(x)<g_n(x)$.

综上所述，当 $x=1$ 时，$f_n(x)=g_n(x)$；当 $x\neq 1$ 时，$f_n(x)<g_n(x)$.

98.（1） 邮递员从该城市西北角的邮局 A 到达东南角 B 地，要求所走路程最短共有 C_{2n+2}^{n+1} 种不同的走法，其中途径 C 地的走法有 $2\mathrm{C}_{2n}^{n}$ 种走法，

所以邮递员途径 C 地的概率 $f(n)=\frac{2\mathrm{C}_{2n}^{n}}{\mathrm{C}_{2n+2}^{n+1}}=2\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}=\frac{n+1}{2n+1}$.

（2） 由 $2f(n)=\frac{2(n+1)}{2n+1}=\frac{(2n+1)+1}{2n+1}=1+\frac{1}{2n+1}$，得 $[2f(n)]^{2n+1}=\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}$，

要证 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$2<[2f(n)]^{2n+1}<3$，

只要证 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$2<\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}<3$，

因为 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$(2n+1)\in\mathbf{N}^*$，且 $2n+1\geq 3$，

所以只要证 $n\in\mathbf{N}^*$，且 $n\geq 3$ 时，$2\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq 3$.

由于 $n\geq 3$ 时

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1\frac{1}{n}+\mathrm{C}_n^2\frac{1}{n^2}+\cdots>\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1\frac{1}{n}=2$，且

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= C_n^0+C_n^1\frac{1}{n}+C_n^2\frac{1}{n^2}+C_n^3\frac{1}{n^3}+\cdots+C_n^n\frac{1}{n^n}\\ &=2+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots2\cdot1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\\ &=2+\frac{1}{2!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}\\ &<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\ &<2+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}\\ &=2+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\ &=3-\frac{1}{n}<3.\end{aligned}$$

所以 $2<[g(n)]^n<3$ 成立，所以 $2<[2f(n)]^{2n+1}<3$．

99.（1） 因为 $f(-x)=-f(x)$，所以 $\ln(e^{-x}+a)=-\ln(e^x+a)$，

所以 $e^{-x}+a=\frac{1}{e^x+a}\Rightarrow a(e^{-x}+e^x+a)=0$，所以 $a=0$．

（2） 由（1）知 $f(x)=x$，所以 $\ln x=x(x^2-2ex+m)\Leftarrow\frac{\ln x}{x}=(x-e)^2+m-e^2$，

令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$，$\varphi(x)=(x-e)^2+m-e^2$，

$h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，所以 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上递增，$(e,+\infty)$ 上递减，所以 $h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}$，

$\varphi(x)$ 为二次函数，在 $(0,e)$ 上递减，$(e,+\infty)$ 上递增，所以 $\varphi(x)_{\min}=m-e^2$，

当 $m-e^2>\frac{1}{e}$时，即 $m>e^2+\frac{1}{e}$时，无解；

当 $m-e^2=\frac{1}{e}$时，即 $m=e^2+\frac{1}{e}$时，有一解；

当 $m-e^2<\frac{1}{e}$时，即 $m<e^2+\frac{1}{e}$，有二解．

（3） 证明：由（2）知当 $m=e^2+1$ 时 $\varphi(x)=(x-e)^2+1$，$\varphi(x)_{\min}=m-e^2=1$，此时 $\varphi(x)_{\min}>h(x)_{\max}$ 恒成立，

所以 $h(x)<\varphi(x)_{\min}=1$，即 $\frac{\ln x}{x}<1$，$\ln x<x$ 恒成立，

所以当 $n\geq2$ 时有 $\ln(n^2-1)<n^2-1$，所以 $\frac{\ln(n^2-1)}{n^2}<\frac{n^2-1}{n^2}=1-\frac{1}{n^2}$，

$$\begin{aligned}&\frac{\ln(2^2-1)}{2^2}+\frac{\ln(3^2-1)}{3^2}+\cdots+\frac{\ln(n^2-1)}{n^2}<(n-1)-\left(\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\\ &<(n-1)-\left(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{(n+1)n}\right)=(n-1)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)}\right)\\ &=\frac{2n^2-n-1}{2(n+1)}.\end{aligned}$$

100.（1） 由已知，点 (a_n+1,S_{n+1}) 在直线 $y=4x-2$ 上，所以 $S_{n+1}=4(a_n+1)-2$，即

$$S_{n+1}=4a_n+2.(n=1,2,3,\cdots).\quad\cdots\cdots①$$

所以

$$S_{n+2}=4a_{n+1}+2.\quad\cdots\cdots②$$

②−①，得 $S_{n+2}-S_{n+1}=4a_{n+1}-4a_n$，即 $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$，亦即

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n).$$

因为 $b_n=a_{n+1}-2a_n,(n=1,2,3,\cdots)$，所以 $b_{n+1}=2b_n$．由

$$S_2=a_1+a_2=4a_1+2,a_1=1,$$

得

$$a_2=5, b_1=a_2-2a_1=3.$$

所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 3，公比为 2 的等比数列.

（2） 由（I）知 $b_n=3\cdot 2^{n-1}$，因为 $f(x)=b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n$，所以

$$f'(x)=b_1+2b_2x+\cdots+nb_nx^{n-1}.$$

从而

$$\begin{aligned} f'(1) &= b_1+2b_2+\cdots+nb_n \\ &= 3+2\cdot 3\cdot 2+3\cdot 3\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 3\cdot 2^{n-1} \\ &= 3(1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}). \end{aligned}$$

设

$$T_n=1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}, \quad \cdots\cdots①$$

则

$$2T_n=2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n, \quad \cdots\cdots②$$

①－②，得

$$-T_n=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}-n\cdot 2^n=\frac{1-2^n}{1-2}-n\cdot 2^n.$$

所以 $T_n=(n-1)\cdot 2^n+1$，所以 $f'(1)=3(n-1)\cdot 2^n+3$.

由于

$$\begin{aligned} f'(1)-(6n^2-3n) &= 3[(n-1)\cdot 2^n+1-2n^2+n] \\ &= 3(n-1)[2^n-(2n+1)]. \end{aligned}$$

设 $g(n)=f'(1)-(6n^2-3n)$.

当 $n=1$ 时，$g(1)=0$，所以

$$f'(1)=6n^2-3n;$$

当 $n=2$ 时，$g(2)=-3<0$，所以

$$f'(1)<6n^2-3n;$$

当 $n\geq 3$ 时，$n-1>0$，又

$$2^n=(1+1)^n=\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}+\mathrm{C}_n^n\geq 2n+2>2n+1,$$

所以 $(n-1)[2^n-(2n+1)]>0$，即 $g(n)>0$，从而 $f'(1)>6n^2-3n$.