

2020 年全国高中数学联赛（四川预赛）试题

参考答案及评分标准

说明：

1、本试卷满分 120，其中填空题 64 分，解答题 56 分。

2、评阅试卷时，请依据评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；第 9 题 4 分一个档次、第 10 题和第 11 题均为 5 分一个档次. 请严格按照评分标准规定的评分档次给分，不要再增加其它中间档次.

3、如果考生的解答题方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评阅时可参考本评分标准评分.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1、 $\frac{\pi}{4}$ 2、 $\frac{1}{4}$ 3、5 4、12 5、 $6060 + \sqrt{6}$ 6、 $\frac{3+2\sqrt{2}}{5}$ 7、3 8、53.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本题满分 16 分）

过点 $P(0,1)$ 作一直线 l ， l 与抛物线 $y = x^2$ 交于 A 、 B 两不同点，过点 A 、 B 分别作抛物线 $y = x^2$ 的切线，两切线交于点 Q .

求点 Q 到直线 AB 的距离的最小值.

解：显然直线 AB 的斜率存在，设为 k ，则直线 AB 的方程为 $y = kx + 1$.

联立直线 AB 和抛物线方程，消去 y ，得 $x^2 - kx - 1 = 0$.

设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，则 $x_1 + x_2 = k$ ， $x_1 x_2 = -1$4 分

过点 $A(x_1, y_1)$ 的抛物线 $y = x^2$ 的切线方程是 $y - y_1 = 2x_1(x - x_1)$ ，

由 $y_1 = x_1^2$ ，代入可得 $y = 2x_1 x - x_1^2$.

过点 $B(x_2, y_2)$ 的抛物线 $y = x^2$ 的切线方程是 $y = 2x_2 x - x_2^2$ ，

联立解方程组 $\begin{cases} y = 2x_1 x - x_1^2 \\ y = 2x_2 x - x_2^2 \end{cases}$ ，得 $\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = x_1 x_2 \end{cases}$.

即点 Q 的坐标为 $(\frac{x_1 + x_2}{2}, x_1 x_2)$ ，即 $(\frac{k}{2}, -1)$8 分

点 Q 到直线 AB 的距离 $d = \frac{|k \cdot \frac{k}{2} - (-1) + 1|}{\sqrt{k^2 + 1}}$ ，

令 $\sqrt{k^2+1}=t (t \geq 1)$, 则 $d = \frac{|\frac{t^2-1}{2}+2|}{t} = \frac{t}{2} + \frac{3}{2t} \geq 2\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$ 12 分

当且仅当 $\frac{t}{2} = \frac{3}{2t}$, 即 $t = \sqrt{3}$, $k = \pm\sqrt{2}$ 时, 等号成立.

所以, 点 Q 到直线 AB 的距离的最小值为 $\sqrt{3}$16 分

10. (本题满分 20 分)

设 λ 为正实数, 对任意两两不等的正实数 a 、 b 、 c , 都有

$$\frac{a^3}{(b-c)^2} + \frac{b^3}{(c-a)^2} + \frac{c^3}{(a-b)^2} \geq \lambda(a+b+c).$$

求 λ 的最大值.

解: 取 $a = \frac{1}{2} + \varepsilon, b = \frac{1}{2} - \varepsilon, c = 2\varepsilon$, 其中 $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}$.

$$\text{则 } \lambda \leq \frac{(\frac{1}{2}+\varepsilon)^3}{(\frac{1}{2}-3\varepsilon)^2} + \frac{(\frac{1}{2}-\varepsilon)^3}{(\varepsilon-\frac{1}{2})^2} + \frac{(2\varepsilon)^3}{(2\varepsilon)^2} = \frac{(\frac{1}{2}+\varepsilon)^3}{(\frac{1}{2}-3\varepsilon)^2} + \frac{1}{2} - \varepsilon + 2\varepsilon$$

对任意的 $\varepsilon (0 < \varepsilon < \frac{1}{6})$ 成立.

$$\text{注意到当 } \varepsilon \rightarrow 0+ \text{ 时, } \frac{(\frac{1}{2}+\varepsilon)^3}{(\frac{1}{2}-3\varepsilon)^2} + \frac{1}{2} - \varepsilon + 2\varepsilon \rightarrow 1,$$

所以, $\lambda \leq 1$5 分

另一方面, 下证: $\lambda=1$ 成立, 即证 $\frac{a^3}{(b-c)^2} + \frac{b^3}{(c-a)^2} + \frac{c^3}{(a-b)^2} \geq (a+b+c)$.

不妨设 $a > b > c$, 则可令 $a=c+x, b=c+y$, 其中 $x > y > 0$.

$$\text{即需证: } \frac{(c+x)^3}{y^2} + \frac{(c+y)^3}{x^2} + \frac{c^3}{(x-y)^2} \geq 3c+x+y, \quad \text{.....10 分}$$

$$\Leftrightarrow (c+x)^3 x^2 (x-y)^2 + (c+y)^3 y^2 (x-y)^2 + c^3 x^2 y^2 \geq (3c+x+y) x^2 y^2 (x-y)^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - xy + y^2)^2 c^3 + 3(x^3 + y^3)(x-y)^2 c^2 + 3(x^4 - x^2 y^2 + y^4)(x-y)^2 c$$

$$+ (x+y)(x^2 + xy + y^2)(x-y)^4 \geq 0, \quad \text{①} \quad \text{.....15 分}$$

注意到①式中，关于 c 的多项式系数都是大于 0 的，从而①成立.

综上所述，所求 λ 的最大值为 1.

.....20 分

11. (本题满分 20 分)

设 m 是给定的正整数. 求证：对任意给定的正整数 $n(n \geq 2)$ ，都存在集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq \mathbf{N}^*$ ，使得对任意的正整数 $k (1 \leq k \leq n)$ ，都有 $a_k \mid m + \frac{P(A)}{a_k}$ ，其中 $P(A)$ 表示集合 A 中的元素之积.

证明：先证一个引理：数列 $\{x_n\}$ 满足： $x_1 = 2, x_{n+1} = 1 + x_1 x_2 \cdots x_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ，则对任意

正整数 $k (k \geq 2)$ ，都有 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_k} + \frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_k} = 1$5 分

引理的证明：对 k 进行归纳：

当 $k = 2$ 时，结论显然成立；

假设结论对 k 成立，即 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_k} + \frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_k} = 1$,

$$\begin{aligned} \text{于是 } & \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_k} + \frac{1}{x_{k+1}} + \frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_k x_{k+1}} \\ &= 1 - \frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_k} + \frac{1}{x_{k+1}} + \frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_k x_{k+1}} \\ &= 1 + \frac{1 + x_1 x_2 \cdots x_k - x_{k+1}}{x_1 x_2 \cdots x_k x_{k+1}} \\ &= 1, \end{aligned}$$

故结论对 $k+1$ 也成立.

由归纳原理知：

对任意正整数 $k (k \geq 2)$ ，都有 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_k} + \frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_k} = 1$10 分

回到原题：

只需证：存在 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq \mathbf{N}^*$ ，其中 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ ，满足

不定方程 $m + \frac{P(A)}{a_1} + \frac{P(A)}{a_2} + \cdots + \frac{P(A)}{a_n} = P(A)$ 即可.

$$\text{即 } \frac{m}{P(A)} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1. \quad (*)$$

$$\text{取 } a_i = x_i (i = 1, 2, \cdots, n-1), a_n = m + x_1 x_2 \cdots x_{n-1}.$$

$$\text{其中, } x_1 = 2, x_{n+1} = 1 + x_1 x_2 \cdots x_n (n \in \mathbf{N}^*).$$

.....15 分

则 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, 且

$$\begin{aligned} & \frac{m}{P(A)} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \\ &= \frac{m}{x_1 x_2 x_1 x_2 \cdots x_{n-1} a_n} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{a_n} \\ &= \frac{m}{x_1 x_2 x_1 x_2 \cdots x_{n-1} a_n} + 1 - \frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} + \frac{1}{a_n} \\ &= \frac{m + x_1 x_2 x_1 x_2 \cdots x_{n-1} - a_n}{x_1 x_2 x_1 x_2 \cdots x_{n-1} a_n} + 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

于是 (*) 成立.

所以, 问题得证.

.....20 分