欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

2010 北京大学 香港大学 北京航空航天大学 自主招生（三校联招）

试题　数学部分

1．（仅文科做）$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，求证：$\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$．

2．AB 为边长为1的正五边形边上的点．证明：AB 最长为 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$．（25 分）

3．AB 为 $y=1-x^2$ 上在 y 轴两侧的点，求过 AB 的切线与 x 轴围成面积的最小值．(25 分)

4．向量 OA 与 OB 已知夹角，$|OA|=1$，$|OB|=2$，$OP=(1-t)OA$，$OQ=tOB$，$0\leqslant t\leqslant 1$．$|PQ|$ 在 t_0 时取得最小值，问当 $0<t_0<\frac{1}{5}$ 时，夹角的取值范围．（25 分）

5．（仅理科做）存不存在 $0<x<\frac{\pi}{2}$，使得 $\sin x,\cos x,\tan x,\cot x$ 为等差数列．（25 分）

微信公众号：学习资料库

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

2010 北京大学 香港大学 北京航空航天大学 自主招生（三校联招）

试题　数学部分解析

1．（仅文科做）$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，求证：$\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$．

【解析】　不妨设 $f(x)=x-\sin x$，则 $f(0)=0$，且当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f'(x)=1-\cos x>0$．于是 $f(x)$ 在 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 上单调增．∴ $f(x)>f(0)=0$．即有 $x>\sin x$．

同理可证 $g(x)=\tan x-x>0$．

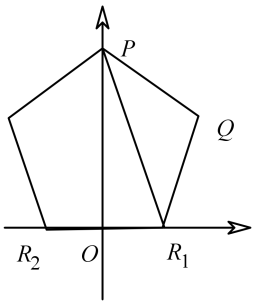
$g(0)=0$，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1>0$．于是 $g(x)$ 在 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 上单调增。

∴在 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 上有 $g(x)>g(0)=0$。即 $\tan x>x$。

注记：也可用三角函数线的方法求解.

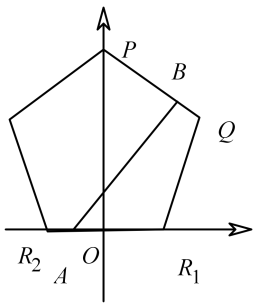
2．AB 为边长为1的正五边形边上的点．证明：AB 最长为 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$．（25 分）

【解析】　以正五边形一条边上的中点为原点，此边所在的直线为 x 轴，建立如图所示的平面直角坐标系．



⑴当 A,B 中有一点位于 P 点时，知另一点位于 R_1 或者 R_2 时有最大值为 $|PR_1|$；当有一点位于 O 点时，$|AB|_{\max}=|OP|<|PR_1|$；

⑵当 A,B 均不在 y 轴上时，知 A,B 必在 y 轴的异侧方可能取到最大值（否则取 A 点关于 y 轴的对称点 A'，有 $|AB|<|A'B|$）．不妨设 A 位于线段 OR_2 上（由正五边形的中心对称性，知这样的假设是合理的），则使 $|AB|$ 最大的 B 点必位于线段 PQ 上．

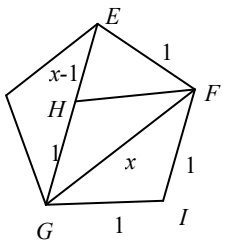


且当 B 从 P 向 Q 移动时，$|AB|$ 先减小后增大，于是 $|AB|_{\max}=|AP|$或$|AQ|$；

对于线段 PQ 上任意一点 B，都有 $|BR_2|\geqslant|BA|$．于是 $|AB|_{\max}=|R_2P|=|R_2Q|$

由⑴，⑵知 $|AB|_{\max}=|R_2P|$．不妨设为 x．

下面研究正五边形对角线的长．



欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

如右图．做$\angle EFG$的角平分线FH交EG于H．

易知$\angle EFH=\angle HFG=\angle GFI=\angle IGF=\angle FGH=\frac{\pi}{5}$．

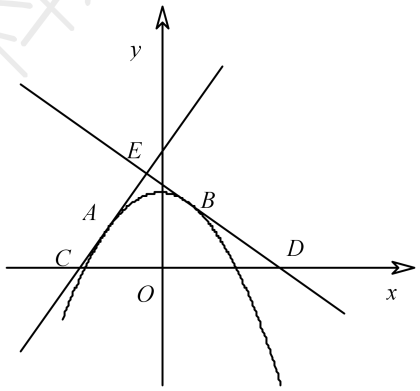
于是四边形$HGIF$为平行四边形．$\therefore |HG|=1$．

由角平分线定理知$\frac{|EF|}{|FG|}=\frac{x}{1}=\frac{1}{x-1}=\frac{|EH|}{|HG|}$．解得$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$．

3．AB为$y=1-x^2$上在y轴两侧的点，求过AB的切线与x轴围成面积的最小值．(25分)

【解析】　不妨设过A点的切线交x轴于点C，过B点的切线交x轴于点D，直线AC与直线BD相交于点E．如图．设

$B(x_1,y_1),A(x_2,y_2)$，



且有$y_2=1-x_2^2,y_1=1-x_1^2,x_1>0>x_2$．

由于$y'=-2x$，

于是AC的方程为$2x_2x=2-y_2-y$；①

BD的方程为$2x_1x=2-y_1-y$．②

联立AC,BD的方程，解得$E(\frac{y_1-y_2}{2(x_2-x_1)},1-x_1x_2)$．

对于①，令$y=0$，得$C(\frac{2-y_2}{2x_2},0)$；

对于②，令$y=0$，得$D(\frac{2-y_1}{2x_1},0)$．

于是$|CD|=\frac{2-y_1}{2x_1}-\frac{2-y_2}{2x_2}=\frac{1+x_1^2}{2x_1}-\frac{1+x_2^2}{2x_2}$．

$S_{\Delta ECD}=\frac{1}{2}|CD|(1-x_1x_2)$．不妨设$x_1=a>0$，$-x_2=b>0$，则

$S_{\Delta ECD}=\frac{1}{4}(\frac{1+a^2}{a}+\frac{1+b^2}{b})(1+ab)=\frac{1}{4}(2a+2b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+a^2b+ab^2)$

$=\frac{1}{4}(a+b)(2+ab+\frac{1}{ab})\geqslant\frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{ab}\cdot(2+ab+\frac{1}{ab})$　③

不妨设$\sqrt{ab}=s>0$，则有

$S_{\Delta ECD}=\frac{1}{2}(s^3+2s+\frac{1}{s})=\frac{1}{2}(s^3+\underbrace{\frac{1}{3}s+..+\frac{1}{3}s}_{6个}+\underbrace{\frac{1}{9s}+...+\frac{1}{9s}}_{9个})$

$\geqslant\frac{1}{2}\cdot 16\cdot[s^3\cdot(\frac{1}{3}s)^6\cdot(\frac{1}{9s})^9]^{\frac{1}{16}}=8\cdot(\frac{1}{3})^{\frac{24}{16}}=8\cdot(\frac{1}{3})^{\frac{3}{2}}=\frac{8}{9}\sqrt{3}$．　④

又由当$x_1=a=\frac{\sqrt{3}}{3},x_2=-b=-\frac{\sqrt{3}}{3},s=\frac{\sqrt{3}}{3}$时，③，④处的等号均可取到．

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

$\therefore (S_{\Delta ECD})_{\min}=\frac{8}{9}\sqrt{3}$.

注记：不妨设 $g(s)=\frac{1}{2}(s^3+2s+\frac{1}{s})$，事实上，其最小值也可用导函数的方法求解.

由 $g'(s)=\frac{1}{2}(3s^2+2-\frac{1}{s^2})$ 知当 $0<s^2<\frac{1}{3}$ 时 $g'(s)<0$；当 $\frac{1}{3}<s^2$ 时 $g'(s)>0$.

则 $g(s)$ 在 $(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$ 上单调减，在 $(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$ 上单调增. 于是当 $s=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时 $g(s)$ 取得最小值.

4．向量 OA 与 OB 已知夹角，$|OA|=1$，$|OB|=2$，$OP=(1-t)OA$，$OQ=tOB$，$0\leqslant t\leqslant 1$．$|PQ|$ 在 t_0 时取得最小值，问当 $0<t_0<\frac{1}{5}$ 时，夹角的取值范围．（25 分）

【解析】 不妨设 OA，OB 夹角为 α，则 $|OP|=1-t,|OQ|=2t$，令

$g(t)=|PQ|^2=(1-t)^2+4t^2-2\cdot(1-t)\cdot 2t\cos\alpha=(5+4\cos\alpha)t^2+(-2-4\cos\alpha)t+1$.

其对称轴为 $t=\frac{1+2\cos\alpha}{5+4\cos\alpha}$．而 $f(x)=\frac{1+2x}{5+4x}$ 在 $(-\frac{5}{4},+\infty)$ 上单调增，故 $-1\leqslant\frac{1+2\cos\alpha}{5+4\cos\alpha}\leqslant\frac{1}{3}$.

当 $0\leqslant\frac{1+2\cos\alpha}{5+4\cos\alpha}\leqslant\frac{1}{3}$ 时，$t_0=\frac{1+2\cos\alpha}{5+4\cos\alpha}\in(0,\frac{1}{5})$，解得 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{2\pi}{3}$.

当 $-1\leqslant\frac{1+2\cos\alpha}{5+4\cos\alpha}<0$ 时，$g(t)$ 在 $[0,1]$ 上单调增，于是 $t_0=0$．不合题意.

于是夹角的范围为 $[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}]$.

5．存不存在 $0<x<\frac{\pi}{2}$，使得 $\sin x,\cos x,\tan x,\cot x$ 为等差数列．（25 分）

【解析】 不存在；否则有 $\cos x-\sin x=\cot x-\tan x=\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\sin x\cos x}$，

则 $\cos x-\sin x=0$ 或者 $1=\frac{\cos x+\sin x}{\sin x\cos x}$.

若 $\cos x-\sin x=0$，有 $x=\frac{\pi}{4}$．而此时 $\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1,1$ 不成等差数列；

若 $1=\frac{\cos x+\sin x}{\sin x\cos x}$，有 $(\sin x\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$．解得有 $\sin x\cos x=1\pm\sqrt{2}$.

而 $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x\in(0,\frac{1}{2}]$，矛盾！

2011 年综合性大学（北约 13 校）自主选拔录取联合考试

数学试题

请注意：文科考生做 1 至 5 题，理科考生做 3 至 7 题。每题 20 分，共 100 分。

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

1.已知平行四边形两边长分别是 3 和 5，一条对角线是 6.求另一条对角线的长度。

2.求过抛物线 $y=2x^2-2x-1, y=-5x^2+2x+3$ 两交点的直线方程。

3.等差数列 $a_1,a_2,\cdots$ 满足 $a_3=-13, a_7=3$，这个数列的前n项和为 S_n. 数列 $S_1,S_2\cdots$ 中哪一项最小？并求出这个最小值。

4. 在 ΔABC 中，如果 $a+b\geq 2c$，证明 $\angle C\leq 60°$。

5.是否存在四个正实数，它们两两乘积分别是 2，3，5，6，10，16.

6.设 C_1 和 C_2 是平面上两个不重合的固定圆周。设 C 是该平面上的一个动园，它与 C_1 和 C_2 均相切。问：C 的圆心轨迹是何种曲线？证明你的结论。

7. 求 $|x-1|+|2x-1|+\cdots+|2011x-1|$ 的最小值。

【试题解答】

1.已知平行四边形的其中两条边长为 3 和 5，一条对角线长为 6，求另一条对角线长。

解析：平行四边形的对角线的平方和等于它四边的平方和，设另一条对角线长为 x，所以 $x^2+6^2=2\left(3^2+5^2\right)$，所以 $x=4\sqrt{2}$。

2.求过抛物线 $y=2x^2-2x-1$ 和 $y=-5x^2+2x+3$ 的交点的直线方程。

解析：

解法一：由 $\begin{cases} y=2x^2-2x-1\cdots(1) \\ y=-5x^2+2x+3\cdots(2) \end{cases}$，$(1)\times 5+(2)$ 得 $6x+7y-1=0$，所以过抛物线 $y=2x^2-2x-1$ 和 $y=-5x^2+2x+3$ 的交点的直线方程 $6x+7y-1=0$。

解法二： 由$\begin{cases} y=2x^2-2x-1\cdots(1) \\ y=-5x^2+2x+3\cdots(2) \end{cases}$得$\begin{cases} x=\dfrac{2+4\sqrt{2}}{7} \\ y=\dfrac{-5-24\sqrt{2}}{49} \end{cases}$或$\begin{cases} x=\dfrac{2-4\sqrt{2}}{7} \\ y=\dfrac{-5+24\sqrt{2}}{49} \end{cases}$，所以过抛物线$y=2x^2-2x-1$和$y=-5x^2+2x+3$的交点的直线方程$6x+7y-1=0$。

3.在等差数列$\{a_n\}$中，$a_3=-13, a_7=3$，数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，求数列$\{S_n\}$的最小项，并指出其值为何？

解析： 因为$a_3=-13, a_7=3,$所以$d=4$，所以$a_n=4n-25$，

法一： 由$\begin{cases} a_n=4n-25\le 0 \\ a_{n+1}=4(n+1)-25>0 \end{cases}$得$\dfrac{21}{4}<n\le\dfrac{25}{4}$，又$n\in N$，所以$n=6$，所以

$(S_n)_{\min}=S_6=\dfrac{6(a_1+a_6)}{2}=-66$。

法二： 由$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=2n^2-23n=2\left(n-\dfrac{23}{4}\right)^2-\dfrac{529}{8}$，所以当$n=6$，

$(S_n)_{\min}=S_6=-66$。

4.在ΔABC中，$a+b\ge 2c$，求证：$\angle C\le 60^0$.

解析： 因为$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\ge\dfrac{a^2+b^2-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2}{2ab}=\dfrac{\dfrac{3}{4}(a^2+b^2)-\dfrac{1}{2}ab}{2ab}$

$\ge\dfrac{\dfrac{3}{4}\bullet 2ab-\dfrac{1}{2}ab}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，当且仅当$a=b$时，"="成立，又因为$C\in(0,\pi)$，所以$\angle C\le 60^0$。

5.是否存在四个正实数，使得他们的两两乘积为2，3，5，6，10，16？

解析：设存在四个正实数a,b,c,d使得他们两两乘积为2，3，5，6，10，16，因为四个正实数a,b,c,d的两两乘积为ab,ac,ad,bc,bd,cd，把这些乘积乘起来，所以$(abcd)^3=2\times3\times5\times6\times10\times16$，又$a,b,c,d$为正实数，所以$abcd=4\sqrt[3]{450}$，所以在2，3，5，6，10，16中应存在两个数之积等于$4\sqrt[3]{450}$，显然这是不可能的，所以假设不成立，所以不存在四个正实数，使得他们的两两乘积为2，3，5，6，10，16。

6.C_1和C_2是平面上两个不重合的固定圆，C是平面上的一个动圆，C与C_1，C_2都相切，则C的圆心的轨迹是何种曲线？说明理由.

解析：不妨设C_1，C_2和C的半径分别为r_1,r_2,r（$r_1>r_2$），

（1）当C_1和C_2相离时，即$|C_1C_2|>r_1+r_2$，

（ⅰ）若C与C_1，C_2都外切，则$|CC_1|=r_1+r$，$|CC_2|=r_2+r$，所以$|CC_1|-|CC_2|=r_1-r_2$；

若C与C_1，C_2都内切，则$|CC_1|=r-r_1$，$|CC_2|=r-r_2$，所以$|CC_2|-|CC_1|=r_1-r_2$；

所以$\big||CC_2|-|CC_1|\big|=r_1-r_2<|C_1C_2|$，由双曲线的定义，$C$的圆心的轨迹是以$C_1$，$C_2$为焦点、实轴长为$r_1-r_2$的双曲线；

（ⅱ）若C与C_1内切，C_2外切，则$|CC_1|=r-r_1$，$|CC_2|=r_2+r$，所以$|CC_2|-|CC_1|=r_1+r_2$；

若C与C_1外切，C_2内切，则$|CC_1|=r+r_1$，$|CC_2|=r-r_2$，所以$|CC_1|-|CC_2|=r_1+r_2$；

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

所以$\left||CC_2|-|CC_1|\right|=r_1+r_2<|C_1C_2|$，由双曲线的定义，$C$的圆心的轨迹是以$C_1$，$C_2$为焦点、实轴长为$r_1+r_2$的双曲线；

（2）当C_1和C_2外切时，即$|C_1C_2|=r_1+r_2$，

（ⅰ）若C与C_1，C_2都外切，则$|CC_1|=r_1+r$，$|CC_2|=r_2+r$，所以$|CC_1|-|CC_2|=r_1-r_2$；

若C与C_1，C_2都内切，则$|CC_1|=r-r_1$，$|CC_2|=r-r_2$，所以$|CC_2|-|CC_1|=r_1-r_2$；

所以$\left||CC_2|-|CC_1|\right|=r_1-r_2<|C_1C_2|$，由双曲线的定义，$C$的圆心的轨迹是以$C_1$，$C_2$为焦点、实轴长为$r_1-r_2$的双曲线；

（ⅱ）若C与C_1内切，C_2外切，则$|CC_1|=r-r_1$，$|CC_2|=r_2+r$（或$|CC_1|=r_1-r$，$|CC_2|=r_2+r$），所以$|CC_2|-|CC_1|=r_1+r_2$（或$|CC_2|+|CC_1|=r_1+r_2$）；

若C与C_1外切，C_2内切，则$|CC_1|=r+r_1$，$|CC_2|=r-r_2$（或$|CC_1|=r+r_1$，$|CC_2|=r_2-r$），所以$|CC_1|-|CC_2|=r_1+r_2$（或$|CC_2|+|CC_1|=r_1+r_2$）；

所以$\left||CC_2|-|CC_1|\right|=r_1+r_2=|C_1C_2|$或$|CC_2|+|CC_1|=r_1+r_2=|C_1C_2|$，所以$C$的圆心的轨迹是过$C_1$，$C_2$的直线（除直线与圆$C_1$、$C_2$的交点外）；

（3）当C_1和C_2相交时，即$r_1-r_2<|C_1C_2|<r_1+r_2$，

（ⅰ）若C与C_1，C_2都外切，则$|CC_1|=r_1+r$，$|CC_2|=r_2+r$，所以$|CC_1|-|CC_2|=r_1-r_2$；

若C与C_1，C_2都内切，则$|CC_1|=r-r_1$，$|CC_2|=r-r_2$（或$|CC_1|=r_1-r$，$|CC_2|=r_2-r$），所以$||CC_2|-|CC_1||=r_1-r_2$；

所以$||CC_2|-|CC_1||=r_1-r_2<|C_1C_2|$，由双曲线的定义，$C$的圆心的轨迹是以$C_1$，$C_2$为焦点、实轴长为$r_1-r_2$的双曲线（圆$C_1$、$C_2$的交点除外）；

（ii）若C与C_1内切，C_2外切，则$|CC_1|=r_1-r$，$|CC_2|=r_2+r$，所以$|CC_2|+|CC_1|=r_1+r_2$；

若C与C_1外切，C_2内切，则$|CC_1|=r+r_1$，$|CC_2|=r_2-r$，所以$|CC_2|+|CC_1|=r_1+r_2$；

所以$|CC_2|+|CC_1|=r_1+r_2>|C_1C_2|$，由椭圆的定义，$C$的圆心的轨迹是以$C_1$，$C_2$为焦点、实轴长为$r_1+r_2$的椭圆（圆$C_1$、$C_2$的交点除外）；

（4）当C_1和C_2内切时，即$|C_1C_2|=r_1-r_2$，

（ i ）若C与C_1，C_2都外切，则$|CC_1|=r_1+r$，$|CC_2|=r_2+r$，所以$|CC_1|-|CC_2|=r_1-r_2$；

若C与C_1，C_2都内切，则$|CC_1|=r-r_1$，$|CC_2|=r-r_2$（或$|CC_1|=r_1-r$，$|CC_2|=r-r_2$或$|CC_1|=r_1-r$，$|CC_2|=r_2-r$），所以$|CC_2|-|CC_1|=r_1-r_2$（或$|CC_2|+|CC_1|=r_1-r_2$或$|CC_2|-|CC_1|=r_2-r_1$）；

所以$||CC_2|-|CC_1||=r_1-r_2=|C_1C_2|$或$|CC_2|+|CC_1|=r_1-r_2$，所以$C$的圆心的轨迹是过$C_1$，$C_2$的直线（除直线与圆$C_1$、$C_2$的交点外）；

（ ii ）若C与C_1内切，C_2外切，则$|CC_1|=r_1-r$，$|CC_2|=r_2+r$，所以

$|CC_2|+|CC_1|=r_1+r_2>|C_1C_2|$，所以$C$的圆心的轨迹是以$C_1$，$C_2$为焦点、实轴长为$r_1+r_2$的椭圆（两圆$C_1$、$C_2$的交点除外）；

（5）当C_1和C_2内含时，即$|C_1C_2|<r_1-r_2$，

（ⅰ）若C与C_1，C_2都内切，则$|CC_1|=r_1-r$，$|CC_2|=r-r_2$，所以$|CC_2|+|CC_1|=r_1-r_2>|C_1C_2|$，所以$C$的圆心的轨迹是以$C_1$，$C_2$为焦点、实轴长为$r_1-r_2$的椭圆；

（ⅱ）若C与C_1内切，C_2外切，则$|CC_1|=r_1-r$，$|CC_2|=r_2+r$，所以$|CC_2|+|CC_1|=r_1+r_2>|C_1C_2|$，所以$C$的圆心的轨迹是以$C_1$，$C_2$为焦点、实轴长为$r_1+r_2$的椭圆。

7.求$f(x)=|x-1|+|2x-1|+.....+|2011x-1|$的最小值。

第7题解答：由绝对值的几何意义联想到求距离的最小值，如$|x-a|+|x-b|$的最小值应该是在数轴上a,b两点之间取得，为$|a-b|$。所以将$f(x)$整理为

$$|x-1|+|x-\frac{1}{2}|+|x-\frac{1}{2}|+|x-\frac{1}{3}|+|x-\frac{1}{3}|+|x-\frac{1}{3}|+$$
$$\cdots+|x-\frac{1}{2011}|+|x-\frac{1}{2011}|+\cdots+|x-\frac{1}{2011}|$$

共有$1+2+3+\cdots+2011=1006\times2011$项，则$f(x)$可以理解为$x$到这$1006\times2011$个点的距离之和。从两端开始向中间靠拢，每两个绝对值和的最小值都是在相应的零点之间取得，而且范围是包含关系，比如$|x-1|+|x-\frac{1}{2011}|$的最小值是在$x\in[\frac{1}{2011},1]$上取得，$|x-\frac{1}{2}|+|x-\frac{1}{2011}|$的最小值是在$x\in[\frac{1}{2011},\frac{1}{2}]$，所以$f(x)$的最小值应该在正中间的某个零点或相邻两个零点之间取得。由$\frac{1006\times2011}{2}=503\times2011$可知取得最小值的范围在第$503\times2011$个零点和第$503\times2011+1$个零点之间（这两个零点也肯相等）

由$\frac{(1+n)n}{2}<503\times2011$算得$n\le1421$，所以第$503\times2011$个零点和第$503\times2011+1$个零点均为$\frac{1}{1422}$，则$f(x)_{min}=f(\frac{1}{1422})=\frac{592043}{711}$.

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

解：由零点分区间法讨论去绝对值：

当$x\in(-\infty,\frac{1}{2011}]$时，$f(x)=(1-x)+(1-2x)+\cdots+(1-2011x)$，

斜率$k_1=-1-2-\cdots\cdots-2011$.

当$x\in(\frac{1}{2011},\frac{1}{2010}]$时，

$f(x)=(1-x)+(1-2x)+\cdots+(1-2010x)+(2011x-1)$，

斜率$k_2=-1-2-\cdots\cdots-2010+2011$.

当$x\in(\frac{1}{2010},\frac{1}{2009}]$时，

$f(x)=(1-x)+\cdots+(1-2009x)+(2010x-1)+(2011x-1)$，

斜率$k_3=-1-2-\cdots\cdots-2009+2010+2011$.

……

当$x\in(\frac{1}{m+1},\frac{1}{m}]$时，

$f(x)=(1-x)+\cdots+(1-mx)+[(m+1)x-1]+\cdots+(2011x-1)$

斜率$k_{2012-m}=-1-2-m+(m+1)+\cdots\cdots+2011$.

当$x\in(\frac{1}{m},\frac{1}{m-1}]$时，

$f(x)=(1-x)+\cdots+[1-(m-1)x]+(mx-1)+\cdots+(2011x-1)$

斜率$k_{2013-m}=-1-2-(m-1)+m+\cdots\cdots+2011$.

$\begin{cases}k_{2012-m}\le 0\\ k_{2013-m}\ge 0\end{cases}$，即$\begin{cases}-1-2-m+(m+1)+\cdots\cdots+2011\le 0\\ -1-2-(m-1)+m+\cdots\cdots+2011\ge 0\end{cases}$，

即$\begin{cases}(m-1)m\le 1006\times 2011\\ m(m+1)\ge 1006\times 2011\end{cases}$，由于$m\in N^*$，解得$m=1422$.

所以当$x\in(\frac{1}{1423},\frac{1}{1422}]$时，

$f(x)=(1-x)+\cdots+(1-1422x)+(1423x-1)+\cdots+(2011x-1)$

$=833-1422\times 1423x+2011\times 1006x$

$f(x)_{\min}=f(\frac{1}{1422})=\frac{592043}{711}$.

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

2012 年北约自主招生数学试题

1、求 x 的取值范围使得 $f(x)=|x+2|+|x|+|x-1|$ 是增函数；

2、求 $\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}}=1$ 的实数根的个数；

3、已知 $(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$ 的 4 个根组成首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列，求 $|m-n|$；

4、如果锐角 ΔABC 的外接圆的圆心为 O，求 O 到三角形三边的距离之比；

5、已知点 $A(-2,0),B(2,0)$，若点 C 是圆 $x^2-2x+y^2=0$ 上的动点，求 ΔABC 面积的最小值。

微信公众号：学习资料杂货铺

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

6、在$1,2,\cdots,2012$中取一组数，使得任意两数之和不能被其差整除，最多能取多少个数？

7、求使得$\sin 4x\sin 2x-\sin x\sin 3x=a$在$[0,\pi)$有唯一解的$a$；

8、求证：若圆内接五边形的每个角都相等，则它为正五边形；

9、求证：对于任意的正整数n，$(1+\sqrt{2})^n$必可表示成$\sqrt{s}+\sqrt{s-1}$的形式，其中$s\in N_+$

微信公众号：学习资料杂货铺

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

2012 年自主招生北约联考数学试题解答

1. 求 x 的范围使得 $|x+2|+|x|+|x-1|$ 是增函数.

解答. 分别讨论 x 在 $(-\infty,-2),[-2,0),[0,1),[1,\infty)$ 中时，去掉绝对值. 易知 $x\geqslant 0$ 即可.

2. 求 $\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}}=1$ 的实根的个数.

解答. 注意到

$$\begin{aligned}\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}}&=\sqrt{(x+2)-2\cdot 3\cdot\sqrt{x+2}+3^2}\\&=\sqrt{(\sqrt{x+2}-3)^2}\\&=|3-\sqrt{x+2}|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}}&=\sqrt{(x+2)-2\cdot 5\cdot\sqrt{x+2}+5^2}\\&=\sqrt{(\sqrt{x+2}+5)^2}\\&=|5-\sqrt{x+2}|\end{aligned}$$

而 $|5-\sqrt{x+2}|+|3-\sqrt{x+2}|\geqslant 2>1$，所以原方程无实数解.

3. 已知 $(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$ 的 4 个根组成首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列，求 $|m-n|$.

解答. 注意到两个方程的一次项系数相同，所以由韦达定理有首项与末项之和为 2. 因此末项为 $2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$，这样可算得公差为 $d=\frac{1}{2}$. 于是 4 个根为 $\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{5}{4},\frac{7}{4}$，这样

$$|m-n|=\left|\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right|=\frac{1}{2}.$$

4. 如果锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O，求 O 到三角形三边的距离比.

解答. 很容易计算比例为 $\cos A:\cos B:\cos C$，如果是钝角三角形应该加上绝对值.

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

5. 已知点 $A(-2,0), B(0,2)$，若点 C 是圆 $x^2-2x+y^2=0$ 上的动点，求 $\triangle ABC$ 面积的最小值.

解答. 由数形结合知当 OC 垂直 AB 时(否则利用斜边大于直角边,两点之间线段最短推矛盾). 因为直线 AB 的方程为 $x-y+2=0$，所以 O 到 AB 的距离为 $\dfrac{|1-0+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$，于是 $\triangle ABC$ 面积的最小值为 $\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2^2+2^2}\cdot\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}-1\right)=3-\sqrt{2}$.

6. 在 $1,2,\cdots,2012$ 中取一组数，使得任意两数之和不能被其差整除，最多能取多少个数？

解答. 将 $1,2,\cdots,2012$ 分成 $(1,2,3),(4,5,6),\cdots,(2008,2009,2010),(2011,2012)$ 这 671 组. 如果取至少 672 个数，则有抽屉原理必然有 2 个数属于同一组，不妨设为 $a>b$，则 $a-b=1,2$.

当 $a-b=1$ 时，此时 $a-b$ 整除 $a+b$，不合要求；

当 $a-b=2$ 时，此时 a,b 同奇偶，所以 $a+b$ 为偶数，从而 $a-b$ 整除 $a+b$，不合要求.

因此最多取 671 个数，现在取 $1,4,7,\cdots,2011$ 这 671 个数，此时任两数之和除以 3 的余数为 2，而两数之差是 3 的倍数，所以任意两数之和不能被其差整除.

综上所述，最多能取 671 个数.

7. 求使得 $\sin 4x\sin 2x-\sin x\sin 3x=a$ 在 $[0,\pi)$ 有唯一解的 a.

解答. 设 $f(x)=\sin 4x\sin 2x-\sin x\sin 3x=\dfrac{1}{2}(\cos 4x-\cos 6x)$ 显然关于 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称，因此 $f(x)=a$ 在 $[0,\pi)$ 有唯一解的话，必然只能在 $x=0,\dfrac{\pi}{2}$ 时.

当 $x=0$ 为解时，此时 $a=0$，方程化为 $\sin x\sin 5x=0$ 在 $[0,\pi)$ 不止一解，故舍去.

当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 为解时，此时 $a=1$，方程化为 $\sin x\sin 5x=1$. 因为在 $[0,\pi)$ 上 $\sin x\geqslant 0$，所以只能是 $\sin x=1,\sin 5x=1$，即 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 为唯一解.

综上所述，$a=1$.

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

8. 求证：若圆内接五边形的每个角都相等，则它为正五边形．

证明. 设这个五边形为 $ABCDE$，令直线 AE, CD 交于点 G，连结 AC．因为 $\angle AED = \angle EDC$，所以 $\angle GED = \angle GDE$．又因为 A, C, D, E 四点共圆，所以

$$\angle GAC = \angle EDG = \angle GED,$$ 所以 DE 平行于 CD，

$AE = BC, BC = DE, DE = AB$，于是 $AB = BC = CD = DE = DA$，即五边形 $ABCDE$ 为正五边形．

注记. 插上图后最后一页出现颜色退化问题，不明原因，图比较简单，索性不插图了．

9. 求证：对任意的正整数 n，$(1+\sqrt{2})^n$ 必可表示成 $\sqrt{s}+\sqrt{s-1}$ 的形式，其中 $s \in \mathbb{N}^+$．

证明. 构造数列 $a_n = \dfrac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2}$，则逆用特征根法知

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n,\ a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

于是 $\{a_n\}$ 为正整数列．另外，注意到

$$\begin{aligned} a_{2n}^2 - 1 &= \left(\frac{(1+\sqrt{2})^{2n} + (1-\sqrt{2})^{2n}}{2}\right)^2 - 1 \\ &= \left(\frac{(1+\sqrt{2})^{2n} - (1-\sqrt{2})^{2n}}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

所以 $\sqrt{a_{2n}^2 - 1} = \dfrac{(1+\sqrt{2})^{2n} - (1-\sqrt{2})^{2n}}{2}$．

于是

$$(1+\sqrt{2})^{2n} = a_{2n} + \sqrt{a_{2n}^2 - 1};$$

同理可证

$$(1+\sqrt{2})^{2n+1} = a_{2n+1} + \sqrt{a_{2n+1}^2 + 1}$$

综上所述，命题得证．

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

2013 年北约自主招生数学试题

2013-3-16

（时间 90 分钟，满分 120 分）

一 选择题（每题 8 分，共 48 分）

1．以 $\sqrt{2}$ 和 $1-\sqrt[3]{2}$ 为两根的有理系数多项式的次数最小是多少　　（　　）

A．2　　B．3　　C．5　　D．6

2．在 6×6 的棋盘中停放着 3 个红色車和 3 个黑色車，每一行、每一列都只有一个車，共有多少种停放方法　　（　　）

A．720　　B．20　　C．518400　　D．14400

3．已知 $x^2=2y+5$，$y^2=2x+5$，则 $x^3-2x^2y^2+y^3$ 的值为　　（　　）．

A．-10　　B．-12　　C．-14　　D．-16

4．如图，在△ABC 中，D 为 BC 中点，DM 平分∠ADB 交 AB 于点 M，DN 平分∠ADC 交 AC 于 N，则 BM+CN 与 MN 的关系为

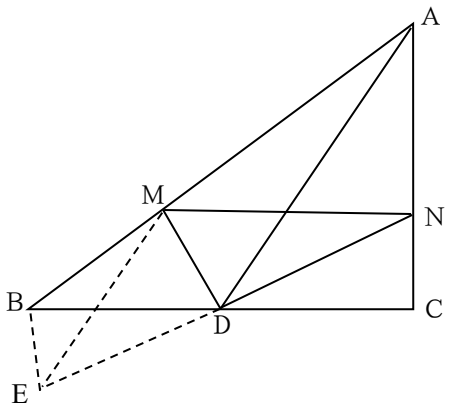
（　）

A.BM+CN＞MN

B.MN+CN <MN

C.BM+CN =MN

D.无法确定



5．设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，前 n 项和为 S_n，$S_{n+1}=4a_n+2$，求 a_{2013}．

A．3019×2^{2012}　　B．3019×2^{2013}　　C．3018×2^{2012}　　D．无法确定

6．模长为 1 的复数 x,y,z 满足 $x+y+z\neq 0$，求 $\left|\dfrac{xy+yz+zx}{x+y+z}\right|$．

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

A．-1/2　　B．1　　C．2　　D．无法确定

二、解答题(每题 18 分,共 72 分)

7．最多有多少个两两不等的正整数，满足其中任意三数之和都为素数．

8．已知 a_i，$i=1,2,3,\cdots,2013$ 为 2013 个实数，满足 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2013}=0$，且 $|a_1-2a_2|=|a_2-2a_3|=\cdots=|a_{2013}-2a_1|$，求证 $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_{2013}=0$．

9．对于任意的 θ，求 $32\cos^6\theta-\cos 6\theta-6\cos 4\theta-15\cos 2\theta$ 的值．

10．已知有 mn 个实数，排列成 $m\times n$ 阶数阵，记作 $\{a_{ij}\}_{m\times n}$ 使得数阵的每一行从左到右都是递增的，即对任意的 $i=1,2,3,\cdots,m$，当 $j_1<j_2$ 时，有 $a_{ij_1}<a_{ij_2}$；现将 $\{a_{ij}\}_{m\times n}$ 的每一列原有的各数按照从上到下递增的顺序排列，形成一个新的 $m\times n$ 阶数阵，记作 $\{a'_{ij}\}_{m\times n}$，即对任意的 $j=1,2,3,\cdots,n$，当 $i_1<i_2$ 时，有 $a'_{i_1j}<a'_{i_2j}$，试判断 $\{a'_{ij}\}_{m\times n}$ 中每一行的各数的大小关系，并加以证明．

微信公众号：学习资料共享铺

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

2013 年北约自主招生数学试题解析

2013-3-16

（时间 90 分钟，满分 120 分）

一 选择题（每题 8 分，共 48 分）

1．以 $\sqrt{2}$ 和 $1-\sqrt[3]{2}$ 为两根的有理系数多项式的次数最小是多少　　（　　）

A．2　　B．3　　C．5　　D．6

【解析】 显然 $(x^2-2)((x-1)^3+2)$ 为满足要求的多项式，其次数为 5.

若存在 n 次有理系数多项式 $f(x)$ 以 $\sqrt{2}$ 和 $1-\sqrt[3]{2}$ 为两根，则 $f(x)$ 必含有因式 $(x^2-2)((x-1)^3+2)$，$\therefore n\geq 5$，即最小次数为 5．故选 C.

2．在 6×6 的棋盘中停放着 3 个红色車和 3 个黑色車，每一行、每一列都只有一个車，共有多少种停放方法　　（　　）

A．720　　B．20　　C．518400　　D．14400

【解析】 先排 3 个红色車，从 6 行中任取 3 行，有 $C_6^3=20$ 种取法；在选定的 3 行中第一行有 6 种停法，第一行选定后第二行有 5 种停法，第二行选定后第三行有 4 种停法；红車放定后，黑車只有 6 种停法．故停放方法共 $20\times 6\times 5\times 4\times 6=14400$ 种．故选 D.

3．已知 $x^2=2y+5$，$y^2=2x+5$，则 $x^3-2x^2y^2+y^3$ 的值为　　（　　）.

A．-10　　B．-12　　C．-14　　D．-16

【解析】 $\because x^3-2x^2y^2+y^3=x(2y+5)-2(2y+5)(2x+5)+y(2x+5)$

$=-4xy-15(x+y)-50$，

又由 $x^2=2y+5$，$y^2=2x+5$，有 $x^2-y^2=-2(x-y)$

$\therefore x=y$ 或 $x+y=-2$.

当 $x=y$ 时，有 $x^2=2x+5$，$x=1\pm\sqrt{6}$，

微信公众号：学习资料发布

$-4xy-15(x+y)-50=-4x^2-30x-50=-38x-70=-38x-70=-108\pm38\sqrt{6}$；

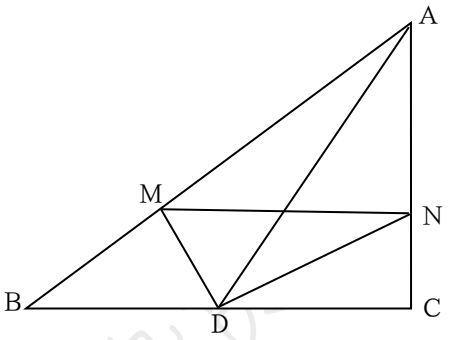
当$x+y=-2$时，$x^2=-2(x+2)+5$，$x(x+2)=1$

$-4xy-15(x+y)-50$ $=-4x(-2-x)-20$

$=4x(x+2)-80=-16$.

故选 D.

4. 如图，在△ABC 中，D 为 BC 中点，DM 平分∠ADB 交 AB 于点 M，DN 平分∠ADC 交 AC 于 N，则 BM+CN 与 MN 的关系为



（　）

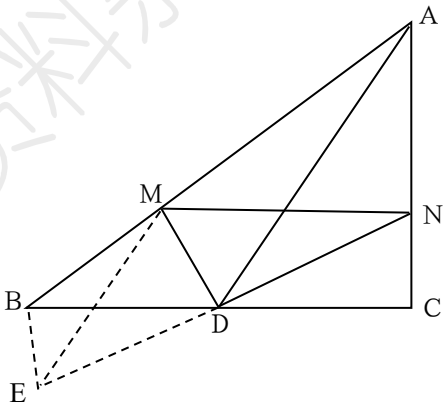
A.BM+CN＞MN

B.MN+CN <MN

C.BM+CN =MN

D.无法确定

【解析】　延长 ND 至 E，使 ND＝ED，连结 BE、ME，则△BED≌△CND，△MED≌△MND，ME＝MN，由 BM＋BE＞EM，得 BM＋CN＞MN.



5．设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，前n项和为S_n，$S_{n+1}=4a_n+2$，求a_{2013}.

A. 3019×2^{2012}　B. 3019×2^{2013}　C. 3018×2^{2012}　D. 无法确定

【解析】　$\because a_1=1$，$a_1+a_2=4a_1+2$，$\therefore a_2=5$；

由 $S_{n+1}=4a_n+2$，有$n\geq2$时，$S_n=4a_{n-1}+2$，于是$a_{n+1}=4a_n-4a_{n-1}$，

特征方程$x^2=4x-4$有重根 2，可设$a_n=(c_1+c_2)\times2^n$，

将$a_1=1$，$a_2=5$代入上式，得$c_1=-\frac{1}{4}$，$c_2=\frac{3}{4}$，

于是$a_n=(\frac{3n}{4}-\frac{1}{4})\times2^n=(3n-1)\times2^{n-2}$，$\therefore a_{2013}=6038\times2^{2011}=3019\times2^{2012}$.

故选 A

微信公众号：学习资料杂

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

6．模长为 1 的复数 x,y,z 满足 $x+y+z\neq 0$，求 $\left|\dfrac{xy+yz+zx}{x+y+z}\right|$.

A．-1/2　　B．1　　C．2　　D．无法确定

【解析】　取 $x=y=z=1$，便能得到 $\left|\dfrac{xy+yz+zx}{x+y+z}\right|=1$.

下面给出证明，$x\bar{x}=y\bar{y}=z\bar{z}=1$，

于是 $\left|\dfrac{xy+yz+zx}{x+y+z}\right|^2=\dfrac{xy+yz+zx}{x+y+z}\overline{\left(\dfrac{xy+yz+zx}{x+y+z}\right)}=\dfrac{xy+yz+zx}{x+y+z}\times\dfrac{\bar{x}\bar{y}+\bar{y}\bar{z}+\bar{z}\bar{x}}{\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}}$

$=\dfrac{1+1+1+x\bar{z}+y\bar{z}+y\bar{x}+z\bar{x}+z\bar{x}+y\bar{x}}{1+1+1+x\bar{z}+y\bar{z}+y\bar{x}+z\bar{x}+z\bar{x}+y\bar{x}}=1$.　∴ $\left|\dfrac{xy+yz+zx}{x+y+z}\right|=1$.

二、解答题(每题 18 分,共 72 分)

7．最多有多少个两两不等的正整数，满足其中任意三数之和都为素数.

【解析】　设满足条件的正整数为 n 个．考虑模 3 的同余类，共三类，记为 $\bar{0}$，$\bar{1}$，$\bar{2}$.

则这 n 个正整数需同时满足①不能三类都有；②同一类中不能有 3 个和超过 3 个．否则都会出现三数之和为 3 的倍数．故 $n\leq 4$.

当 $n=4$ 时，取 1，3，7，9，其任意三数之和为 11，13，17，19 均为素数，满足题意，所以满足要求的正整数最多有 4 个.

8．已知 a_i，$i=1,2,3,\cdots,2013$ 为 2013 个实数，满足 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2013}=0$，且 $|a_1-2a_2|=|a_2-2a_3|=\cdots=|a_{2013}-2a_1|$，求证 $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_{2013}=0$.

【解析】　设 $|a_1-2a_2|=|a_2-2a_3|=\cdots=|a_{2013}-2a_1|=k$，

若 $k=0$，则 $a_1=2a_2$，$a_2=2a_3$，…，$a_{2012}=2a_{2013}$，$a_{2013}=2a_1$，

于是 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2013}=a_1+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_1}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_1}{2^{2011}}+2a_1=0$，

∴ $a_1=0$，进而 $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_{2013}=0$.

若 $k>0$，则 $|a_1-2a_2|$，$|a_2-2a_3|$，…，$|a_{2013}-2a_1|$ 这 2013 个数去掉绝对值号后

只能取 k 和 $-k$ 两值，

又 $a_1-2a_2+a_2-2a_3+\cdots+a_{2012}-2a_{2013}+a_{2013}-2a_1=0$，

即这 2013 个数去掉绝对值号后取 k 和 $-k$ 两值的个数相同，这不可能.

9．对于任意的 θ，求 $32\cos^6\theta-\cos 6\theta-6\cos 4\theta-15\cos 2\theta$ 的值.

【解析】 $32\cos^6\theta=32(\dfrac{1+\cos 2\theta}{2})^3=4\cos^3 2\theta+12\cos^2 2\theta+12\cos 2\theta+4$，

$-\cos 6\theta=-4\cos^3 2\theta+3\cos 2\theta$，

$-6\cos 4\theta=-12\cos^2 2\theta+6$，

$-15\cos 2\theta=-15\cos 2\theta$，

各式相加，得 $32\cos^6\theta-\cos 6\theta-6\cos 4\theta-15\cos 2\theta=10$.

10．已知有 mn 个实数，排列成 $m\times n$ 阶数阵，记作 $\{a_{ij}\}_{m\times n}$ 使得数阵的每一行从左到右都是递增的，即对任意的 $i=1,2,3,\cdots,m$，当 $j_1<j_2$ 时，有 $a_{ij_1}<a_{ij_2}$；现将 $\{a_{ij}\}_{m\times n}$ 的每一列原有的各数按照从上到下递增的顺序排列，形成一个新的 $m\times n$ 阶数阵，记作 $\{a'_{ij}\}_{m\times n}$，即对任意的 $j=1,2,3,\cdots,n$，当 $i_1<i_2$ 时，有 $a'_{i_1j}<a'_{i_2j}$，试判断 $\{a'_{ij}\}_{m\times n}$ 中每一行的各数的大小关系，并加以证明.

【解析】 数阵 $\{a'_{ij}\}_{m\times n}$ 中的中每一行的各数仍是递增的．下面用反证法给出证明.

若在第 p 行存在 $a'_{pq}>a'_{p(q+1)}$，令 $a'_{k(q+1)}=a_{i_k(q+1)}$，其中 $k=1,2,3,\cdots,m$，

$\{i_1,i_2,i_3,\cdots,i_m\}=\{1,2,3,\cdots,m\}$，则当 $t\le p$ 时，$a_{i_tq}\le a_{i_t(q+1)}=a'_{t(q+1)}\le a'_{p(q+1)}<a'_{pq}$

即在第 q 列中至少有 p 个数小于 a'_{pq}，也就是 a'_{pq} 在数阵 $\{a'_{ij}\}_{m\times n}$ 中的第 q 列中至少排在第 $p+1$ 行，这与 a'_{pq} 排在第 p 行矛盾．所以数阵 $\{a'_{ij}\}_{m\times n}$ 中的中每一行的各数仍是递增的.

微信公众号：学习资料杂货铺

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

2014 北约理科数学试题

1、圆心角为$\frac{\pi}{3}$的扇形面积为6π,求它围成圆锥的表面积.

2、将 10 个人分成 3 组，一组 4 人，两组各 3 人，求共有几种分法.

3、$f\left(\frac{a+2b}{3}\right)=\frac{f(a)+2f(b)}{3}, f(1)=1, f(4)=7$, 求 $f(2014)$.

4、$f(x)=\lg\left(x^2-2ax+a\right)$的值域为 R, 求 a 的取值范围.

5、已知$x+y=-1$, 且 x, y 都为负实数，求 $xy+\frac{1}{xy}$ 的取值范围.

6、$f(x)=\arctan\frac{2+2x}{1-4x}+C$ 在$\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$上为奇函数，求 C 的值.

7、求证： $\tan 3^\circ \notin Q$.

8、已知实系数二次函数 $f(x)$ 与 $g(x), f(x)=g(x)$ 和 $3f(x)+g(x)=0$ 有两重根， $f(x)$ 有两相异实根，求证： $g(x)$ 没有实根.

9、$a_1a_2.....a_{13}$ 是等差数列，$M=\left\{a_i+a_j+a_k \mid 1\le i<j<k\le 13\right\}$, 问：$0,\frac{7}{2},\frac{16}{3}$ 是否可以同时在 M 中，并证明你的结论.

10、$x_i>0(i=1,2,...n), \prod_{i=1}^{n}x_i=1$. 求证：$\prod_{i=1}^{n}\left(\sqrt{2}+x_i\right)\ge\left(\sqrt{2}+1\right)^n$.

微信公众号：学习资料杂货铺

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

2014 北约文科数学试题

1、圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ 的扇形面积为 6π，求它围成圆锥的表面积.

2、将 10 个人分成 3 组，一组 4 人，两组各 3 人，求共有几种分法.

3、$f\left(\frac{a+2b}{3}\right)=\frac{f(a)+2f(b)}{3}, f(1)=1, f(4)=7$，求 $f(2014)$.

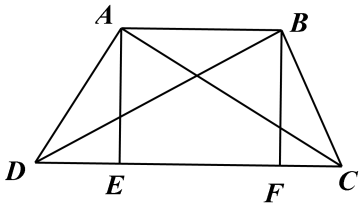
4、$f(x)=\lg\left(x^2-2ax+a\right)$ 的值域为 R，求 a 的取值范围.

5、已知 $x+y=-1$，且 x,y 都为负实数，求 $xy+\frac{1}{xy}$ 的取值范围.

6、$f(x)=\arctan\frac{2+2x}{1-4x}+C$ 在 $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ 上为奇函数，求 C 的值.

7、等比数列 $\{4n+1\}(1\le n\le 200),\{6m-3\}(1\le m\le 200)$ 的公共项之和.

8、梯形的对角线长分别为 5 和 7，高是 3，求梯形的面积.



9、求证：$\tan 3^\circ \notin Q$.

10、已知实系数二次函数 $f(x)$ 与 $g(x), f(x)=g(x)$ 和 $3f(x)+g(x)=0$ 有两重根，$f(x)$ 有两相异实根，求证：$g(x)$ 没有实根.

微信公众号：学习资料共享铺

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

2014 北约理科数学试题（参考答案）

1、圆心角为$\frac{\pi}{3}$的扇形面积为6π,求它围成圆锥的表面积.

【解析】$S_{扇}=\frac{1}{2}\alpha R^2,\Rightarrow R=6,l=\alpha R=2\pi$,从而圆锥底面周长为

$2\pi=2\pi r,\Rightarrow S_{底}=\pi r^2=\pi,S=6\pi+\pi=7\pi.$

2、将 10 个人分成 3 组，一组 4 人，两组各 3 人，求共有几种分法.

【解析】平均分堆问题.$\frac{C_{10}4\cdot C_6 3\cdot C_3 3}{2!}=2100.$

3、$f\left(\frac{a+2b}{3}\right)=\frac{f(a)+2f(b)}{3},f(1)=1,f(4)=7$,求$f(2014)$.

【解析】观察等式可知，函数显然为线性一次函数，可设$f(x)=kx+m,f(1)=1,f(4)=7$代

入求得$k=2,m=-1$,从而$f(2014)=4027.$

4、$f(x)=\lg\left(x^2-2ax+a\right)$的值域为$R$,求$a$的取值范围.

【解析】值域问题.$\Delta=4a^2-4a\geq 0,\Rightarrow a\geq 1$或$a\leq 0.$

5、已知$x+y=-1$,且x,y都为负实数，求$xy+\frac{1}{xy}$的取值范围.

【解析】均值不等式，对勾函数性质.$1=(-x)+(-y)\geq 2\sqrt{xy},\Rightarrow 0<xy\leq\frac{1}{4}$,从而$xy+\frac{1}{xy}\geq\frac{17}{4}.$

6、$f(x)=\arctan\frac{2+2x}{1-4x}+C$在$\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$上为奇函数，求$C$的值.

【解析】$f(0)=0,\Rightarrow C=-\arctan 2.$下面证明：

$$f(x)+f(-x)=\arctan\frac{2+2x}{1-4x}+\arctan\frac{2-2x}{1+4x}+2C=\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)-2\arctan 2=0.$$

7、求证：$\tan 3^\circ\notin Q.$

【解析】反证法.假设$\tan 3^\circ\in Q$,则$\tan 6^\circ\in Q,\Rightarrow\tan 12^\circ\in Q,\Rightarrow\tan 24^\circ\in Q$,从而$\tan 30^\circ\in Q$,矛

盾.$\therefore\tan 3^\circ\notin Q.$

8、已知实系数二次函数$f(x)$与$g(x),f(x)=g(x)$和$3f(x)+g(x)=0$有两重根，$f(x)$有两

相异实根，求证：$g(x)$没有实根.

【解析】设$f(x)=ax^2+bx+c,\ g(x)=dx^2+ex+f$，

则由$f(x)=g(x)$，可得

$(a-d)x^2+(b-e)x+(c-f)=0,\Delta=(b-e)^2-4(a-d)(c-f)=0.$

由$3f(x)+g(x)=0$可得

$(3a+d)x^2+(3b+e)x+(3c+f)=0,\Delta=(3b+e)^2-4(3a+d)(3c+f)=0.$

化简得$3b^2+e^2=12ac+4df$，即$e^2-4df=3(4ac-b^2)$又$b^2-4ac>0.$

$\therefore e^2-4df<0.\ \therefore g(x)$没有实根.

9、$a_1a_2.....a_{13}$是等差数列，$M=\{a_i+a_j+a_k\,|\,1\le i<j<k\le 13\}$，问：$0,\frac{7}{2},\frac{16}{3}$是否可以同时在$M$中，并证明你的结论.

【解析】数列中的项.分析M中项的构成，若按照从小到大的顺序排列，最小的项为$a_1+a_2+a_3$，第二项为$a_1+a_2+a_4$，最大的项为$a_{11}+a_{12}+a_{13}$，设a_n公差为d，则M中项的公差也为d，所以M中共有$11+12+13-1-2-3+1=31$项，假设$0,\frac{7}{2},\frac{16}{3}$均为$M$中的项，不妨设$\frac{7}{2}-0=k_1d,\frac{16}{3}-\frac{7}{2}=k_2d,\Rightarrow\frac{k_2}{k_1}=\frac{11}{21},k_1、k_2\in Z,0<k_1、k_2\le 30,$且$k_1+k_2\le 31,$这样的$k$不存在，矛盾.所以$0,\frac{7}{2},\frac{16}{3}$不可以同时在$M$中.

10、$x_i>0(i=1,2,...n),\ \prod_{i=1}^{n}x_i=1.$求证：$\prod_{i=1}^{n}(\sqrt{2}+x_i)\ge(\sqrt{2}+1)^n.$

【解析】不等式；柯西不等式或$AM-GM$平均不等式.

法一：$AM-GM$不等式.调和平均值$H_n=\frac{n}{\sum_i^n\left(\frac{1}{\sqrt{2}+x_i}\right)}\le G_n=\sqrt[n]{\prod_i^n(\sqrt{2}+x_i)}$，

则$\frac{n}{\sum_i^n\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+x_i}\right)}\le\sqrt[n]{\prod_i^n\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+x_i)}$，$\frac{n}{\sum_i^n\left(\frac{x_i}{\sqrt{2}+x_i}\right)}\le\sqrt[n]{\prod_i^n\frac{1}{x_i}(\sqrt{2}+x_i)}=\sqrt[n]{\prod_i^n(\sqrt{2}+x_i)}$

可得$\frac{\sqrt{2}n}{\sqrt[n]{\prod_i^n(\sqrt{2}+x_i)}}\le\sum_i^n\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+x_i}\right)$，$\frac{n}{\sqrt[n]{\prod_i^n(\sqrt{2}+x_i)}}\le\sum_i^n\left(\frac{x_i}{\sqrt{2}+x_i}\right)$

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

上述两式相加得 $\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)n}{\sqrt[n]{\prod_i^n\left(\sqrt{2}+x_i\right)}}\le\sum_i^n\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+x_i}\right)+\sum_i^n\left(\dfrac{x_i}{\sqrt{2}+x_i}\right)=n$，

即 $\left(\sqrt{2}+1\right)\le\sqrt[n]{\prod_i^n\left(\sqrt{2}+x_i\right)}$，即 $\left(\sqrt{2}+1\right)^n\le\prod_i^n\left(\sqrt{2}+x_i\right)$

法二：由 $\prod_{i=1}^n x_i=1$. 及要证的结论分析，由柯西不等式得 $\left(\sqrt{2}+x_i\right)\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{x_i}\right)\ge\left(\sqrt{2}+1\right)^2$，

从而可设 $y_i=\dfrac{1}{x_i}$，且 $\prod_{i=1}^n y_i=\prod_{i=1}^n\dfrac{1}{x_i}=1$. 从而本题也即证 $\prod_{i=1}^n\left(\sqrt{2}+y_i\right)\ge\left(\sqrt{2}+1\right)^n$.

从而 $\prod_i^n\left(\sqrt{2}+x_i\right)\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{x_i}\right)\ge\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n}$，即 $\prod_i^n\left(\sqrt{2}+x_i\right)\left(\sqrt{2}+y_i\right)\ge\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n}$，

假设原式不成立，即 $\prod_{i=1}^n\left(\sqrt{2}+x_i\right)<\left(\sqrt{2}+1\right)^n$，则 $\prod_{i=1}^n\left(\sqrt{2}+y_i\right)<\left(\sqrt{2}+1\right)^n$.

从而 $\prod_i^n\left(\sqrt{2}+x_i\right)\left(\sqrt{2}+y_i\right)<\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n}$，矛盾.得证.

微信公众号：学习资料分享

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

2014 北约文科数学试题（参考答案）

1、圆心角为$\frac{\pi}{3}$的扇形面积为6π,求它围成圆锥的表面积.

【解析】$S_{扇}=\frac{1}{2}\alpha R^2,\Rightarrow R=6,l=\alpha R=2\pi$,从而圆锥底面周长为

$2\pi=2\pi r,\Rightarrow S_{底}=\pi r^2=\pi,S=6\pi+\pi=7\pi.$

2、将 10 个人分成 3 组，一组 4 人，两组各 3 人，求共有几种分法.

【解析】平均分堆问题.$\frac{C_{10}4\cdot C_6 3\cdot C_3 3}{2!}=2100.$

3、$f\left(\frac{a+2b}{3}\right)=\frac{f(a)+2f(b)}{3},f(1)=1,f(4)=7$,求$f(2014)$.

【解析】观察等式可知，函数显然为线性一次函数，可设$f(x)=kx+m,f(1)=1,f(4)=7$代

入求得$k=2,m=-1$,从而$f(2014)=4027.$

4、$f(x)=\lg\left(x^2-2ax+a\right)$的值域为$R$,求$a$的取值范围.

【解析】值域问题.$\Delta=4a^2-4a\geq 0,\Rightarrow a\geq 1$或$a\leq 0.$

5、已知$x+y=-1$,且x,y都为负实数，求$xy+\frac{1}{xy}$的取值范围.

【解析】均值不等式，对勾函数性质.$1=(-x)+(-y)\geq 2\sqrt{xy},\Rightarrow 0<xy\leq\frac{1}{4}$,从而$xy+\frac{1}{xy}\geq\frac{17}{4}.$

6、$f(x)=\arctan\frac{2+2x}{1-4x}+C$在$\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$上为奇函数，求$C$的值.

【解析】$f(0)=0,\Rightarrow C=-\arctan 2.$下面证明：

$$f(x)+f(-x)=\arctan\frac{2+2x}{1-4x}+\arctan\frac{2-2x}{1+4x}+2C=\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)-2\arctan 2=0.$$

7、等比数列$\{4n+1\}(1\leq n\leq 200),\{6m-3\}(1\leq m\leq 200)$的公共项之和.

【解析】此题考察数的同余问题；设公共项为a，$a\equiv 1\bmod(4),a\equiv 3\bmod(6).$

易得a最小的数为9. 4和6的最小公倍数为12,则

$a=9+12k,k\in N.\ 9+12k=4\times 200+1,\Rightarrow k=66.\therefore$公共项之和为

微信公众号：学习资料杂货铺

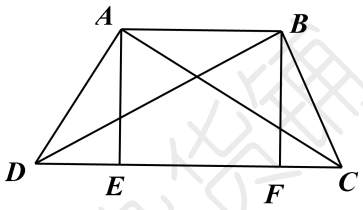
欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

$$S=\frac{67(9+801)}{2}=27135.$$

8、梯形的对角线长分别为5和7，高是3，求梯形的面积.

【解析】如图，梯形面积为 $S=\frac{1}{2}(AB+CD)h=\frac{1}{2}(DF+EC)h$，易求得 $DF=2\sqrt{10},EC=4,$

$$S=\frac{1}{2}(DF+EC)h=\frac{1}{2}\left(4+2\sqrt{10}\right)3=6+3\sqrt{10}.$$



9、求证：$\tan 3^\circ \notin Q.$

【解析】反证法.假设 $\tan 3^\circ \in Q,$ 则 $\tan 6^\circ \in Q,\Rightarrow \tan 12^\circ \in Q,\Rightarrow \tan 24^\circ \in Q,$ 从而 $\tan 30^\circ \in Q,$ 矛盾.$\therefore \tan 3^\circ \notin Q.$

10、已知实系数二次函数 $f(x)$ 与 $g(x),f(x)=g(x)$ 和 $3f(x)+g(x)=0$ 有两重根，$f(x)$ 有两相异实根，求证：$g(x)$ 没有实根.

【解析】设 $f(x)=ax^2+bx+c,\ g(x)=dx^2+ex+f,$

则由 $f(x)=g(x)$，可得

$$(a-d)x^2+(b-e)x+(c-f)=0,\Delta=(b-e)^2-4(a-d)(c-f)=0.$$

由 $3f(x)+g(x)=0$ 可得

$$(3a+d)x^2+(3b+e)x+(3c+f)=0,\Delta=(3b+e)^2-4(3a+d)(3c+f)=0.$$

化简得 $3b^2+e^2=12ac+4df,$ 即 $e^2-4df=3\left(4ac-b^2\right)$ 又 $b^2-4ac>0.$

$\therefore e^2-4df<0.\ \therefore g(x)$ 没有实根.

微信公众号：学习资料共享

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

2011 年北大保送生考试数学试题参考解答

1. 点 P为双曲线上任一点，PQ为双曲线在 P处的切线，F_1, F_2为双曲线的焦点. 证明: PQ平分 $\angle F_1PF_2$.

证明. 由于对称性,不妨设 P在第一象限，Q在x轴上，F_1, F_2分别为左右焦点，双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

于是可令 P的坐标为$(a\cosh t, b\sinh t)$, 其中

$$\cosh t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}, \sinh t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}.$$

则切线 PQ方程为

$$\frac{x\cosh t}{a}-\frac{y\sinh t}{b}=1,$$

于是 Q点的坐标为$\left(\frac{a}{\cosh t}, 0\right)$.

注意到

$$\begin{aligned}\frac{|PF_1|^2}{|PF_2|^2}&=\frac{(a\cosh t+c)^2+b^2\sinh^2 t}{(a\cosh t-c)^2+b^2\sinh^2 t}\\&=\frac{(a\cosh t+c)^2+(c^2-a^2)(\cosh^2 t-1)}{(a\cosh t-c)^2+(c^2-a^2)(\cosh^2 t-1)}\\&=\left(\frac{a\cosh t+c}{a\cosh t-c}\right)^2=\frac{|QF_1|^2}{|QF_2|^2},\end{aligned}$$

于是

$$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|QF_1|}{|QF_2|},$$

因此 PQ平分 $\angle F_1PF_2$.

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

2. 在 $\triangle ABC$中存在一点 O, 满足 $\angle BAO=\angle CAO=\angle CBO=\angle ACO$, 求证: $\triangle ABC$的三边长组成等比数列.

证明. 显然有

$$\frac{OA}{OB}\frac{OB}{OC}\frac{OC}{OA}=1,$$

由正弦定理得

$$\frac{\sin\angle ABO}{\sin\angle BAO}\frac{\sin\angle OCB}{\sin\angle OBC}\frac{\sin\angle OAC}{\sin\angle OCA}=1,$$

利用已知条件, 可得

$$\sin\frac{2B-A}{2}\sin\frac{2C-A}{2}=\sin^2\frac{A}{2},$$

变形得

$$\cos(C-B)-\cos(C+B-A)=1-\cos A,$$

即

$$\cos(C-B)-\cos(C+B)=1-\cos 2A\Longleftrightarrow \sin C\sin B=\sin^2 A.$$

3. 是否存在实数 a, 使得 $f(x)=ax+\sin x$存在两切线互相垂直.

解答. 令 $a=0$, 则 $f(x)=\sin x$, 它在 $x=0$处的切线为 $y=x$. 另外它在 $x=\pi$处的切线为 $y=-(x-\pi)$. 显然这两条切线互相垂直. ■

注记. 个人认为题目应该是问是否存在非零实数 a满足条件, 答案是不存在, 这个可以转化为一元二次方程的问题, 大家可以试试手. ■

4. 设 p,q为实数, $f(x)=x^2+px+q$, 如果 $f(f(x))=0$只有一个实根, 求证: $p,q\geqslant 0$.

证明. 显然 $f(x)=0$有实根, 不妨设之为 α,β(可以相等), 则

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta),\quad f(f(x))=(f(x)-\alpha)(f(x)-\beta).\tag{1}$$

如果 α,β中一者大于0, 不妨设为 α, 那么由于 $f(x)$开口向上且 $f(x)=0$有实根, 那么 $f(x)-\alpha=0$必然有两不等实根, 由(1)知这与 $f(f(x))=0$只有一个实根矛盾. 因此 α,β都不大于0, 从而由韦达定理知

$$p=-(\alpha+\beta)\geqslant 0,\quad q=\alpha\beta\geqslant 0.$$

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

5. 单位圆 $x^2+y^2=1$ 有三点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$. 若

$$x_1+x_2+x_3=y_1+y_2+y_3=0,$$

求证: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2=\dfrac{3}{2}$.

证明. 由题意知 $\triangle ABC$ 的重心为原点, 即与外心重合, 所以 $\triangle ABC$ 为正三角形, 所以可以设 A,B,C 对应辐角 $\theta,\theta+\dfrac{2\pi}{3},\theta+\dfrac{4\pi}{3}$, 因此

$$\begin{aligned}x_1^2+x_2^2+x_3^2&=\cos^2\theta+\cos^2\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^2\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\\&=\cos^2\theta+\left(-\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)^2\\&=\cos^2\theta+\frac{1}{2}\cos^2\theta+\frac{3}{2}\sin^2\theta\\&=\frac{3}{2},\end{aligned}$$

易得此时

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2=3-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=\frac{3}{2}.$$

微信公众号：数

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

2012 年北京大学保送生考试数学试题及参考解答

1．已知数列$\{a_n\}$为正项等比数列，且$a_3+a_4-a_1-a_2=5$，求a_5+a_6的最小值．

解：设数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$，则$a_1q^2+a_1q^3-a-a_1q=5$，

$\therefore a_1=\dfrac{5}{q^2+q^3-1-q}=\dfrac{5}{(q+1)(q^2-1)}$．由$a_1>0$知$q>1$．

$\therefore a_5+a_6=a_1q^4+a_1q^5=a_1(q^4+q^5)=\dfrac{5}{(q+1)(q^2-1)}\cdot q^4(q+1)=\dfrac{5q^4}{q^2-1}$

$=5\left(q^2+1+\dfrac{1}{q^2-1}\right)=5\left(q^2-1+\dfrac{1}{q^2-1}+2\right)\geq 20$，

当且仅当$q^2-1=\dfrac{1}{q^2-1}$即$q=\sqrt{2}$时，a_5+a_6有最小值20．

2．已知$f(x)$为二次函数，且$a,f(a),f(f(a)),f(f(f(a)))$成正项等比数列，求证：$f(a)=a$．

证法一：设$f(x)=mx^2+nx+t(m\neq 0)$，数列$a,f(a),f(f(a)),f(f(f(a)))$的公比为$q(q>0)$，

则$f(a)=aq,f(f(a))=f(aq)=aq^2,f(f(f(a)))=f(aq^2)=aq^3$，

$\therefore ma^2+na+t=aq$ ①　　$m(aq)^2+naq+t=aq^2$ ②

$m(aq^2)^2+naq^2+t=aq^3$ ③

①－②得$\therefore ma^2(1-q^2)+na(1-q)=aq(1-q)$，

②－③得$\therefore ma^2q^2(1-q^2)+naq(1-q)=aq^2(1-q)$．

若$q=1$，则$f(a)=a$；

若$q\neq 1$，则$ma^2(1+q)+na=aq$与$ma^2q(1+q)+na=aq$矛盾．$\therefore f(a)=a$．

证法二：由$a,f(a),f(f(a)),f(f(f(a)))$成等比数列得

微信公众号：学习资料杂货铺

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

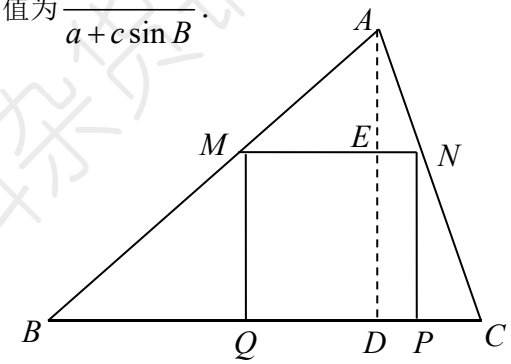
$$\frac{f(a)}{a}=\frac{f(f(a))}{f(a)}=\frac{f(f(f(a)))}{f(f(a))},$$

$$\therefore \frac{f(f(a))-f(a)}{f(a)-a}=\frac{f(f(f(a)))-f(f(a))}{f(f(a))-f(a)}.$$

$\therefore$ 三点 $A(a,f(a)),B(f(a),(f(a))),C((f(a)),((f(a))))$ 满足 $k_{AB}=k_{BC}$，

$\therefore A,B,C$ 三点共线，与 A,B,C 三点在抛物线上矛盾，$\therefore f(a)=a$.

3. 称四个顶点都落在三角形三边上的正方形叫三角形的内接正方形. 若锐角三角形 ABC 的三边满足 $a>b>c$，证明：这个三角形的内接正方形边长的最小值为 $\frac{ac\sin B}{a+c\sin B}$.



解：如图所示，设正方形 $MNPQ$ 的边长为 x，$\because \frac{AE}{AD}=\frac{MN}{BC}$，

$\therefore \frac{c\sin B-x}{c\sin B}=\frac{x}{a}$，$\therefore x=\frac{ac\sin B}{a+c\sin B}=\frac{abc}{2Ra+bc}$.

同理可得其它两用人才种情况下内接正方形边长为

$\frac{abc}{2Rb+ac},\frac{abc}{2Rc+ab}$.

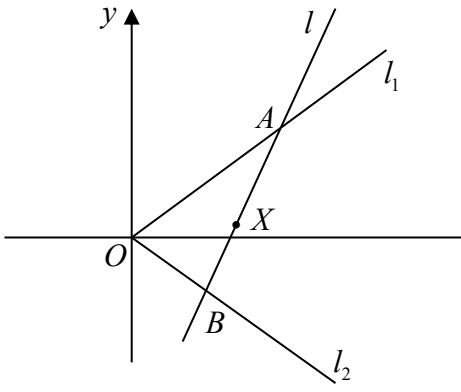
$\because 2Rb+ac-(2Ra+bc)=(b-a)(2R-c)<0$，

$2Rc+ab-(2Ra+bc)=(c-a)(2R-b)<0$，

$\therefore$ 这个三角形的内接正方形边长的最小值为 $\frac{ac\sin B}{a+c\sin B}$.

4. 从 O 点发出两条射线 l_1,l_2，已知直线 l 交 l_1,l_2 于 A,B 两点，且 $S_{\Delta OAB}=c$（c 为定值），记 AB 中点为 X，

求证：X 的轨迹为双曲线.



解：以 l_1,l_2 的角平分线所在直线为 x 轴建立如图所示的直角坐标系.

设 $\angle AOx=\angle BOx=\alpha$，$OA=a,OB=b$，$X(x,y)$，

则 $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}ab\sin 2\alpha=c$，$ab=\frac{2c}{\sin 2\alpha}$.

$\because A(a\cos\alpha,a\sin\alpha),B(b\cos\alpha,-b\sin\alpha)$，

$$\therefore \begin{cases} x=\dfrac{a\cos\alpha+b\cos\alpha}{2}, \\ y=\dfrac{a\sin\alpha-b\sin\alpha}{2}, \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} \dfrac{x}{\cos\alpha}=\dfrac{a+b}{2}(1) \\ \dfrac{y}{\sin\alpha}=\dfrac{a-b}{2}(2) \end{cases}$$

$(1)^2-(2)^2$ 得

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{\sin^2\alpha}=ab=\frac{2c}{\sin 2\alpha},$$

$\therefore X$ 的轨迹为双曲线.

5．已知 $a_i\left(i=1,2,\cdots,10\right)$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=30, a_1a_2\cdots a_{10}<21$，求证：$\exists a_i\left(i=1,2,\cdots,10\right)$，使 $a_i<1$.

证明：用反证法，假设 $\forall a_i\left(i=1,2,\cdots,10\right)$，$a_i\geq 1$.

令 $a_i=1+b_i\left(i=1,2,\cdots,10\right)$，则 $b_i\geq 0$，且 $b_1+b_2+\cdots+b_{10}=20$.

$$\therefore a_1a_2\cdots a_{10}=\left(1+b_1\right)\left(1+b_2\right)\cdots\left(1+b_{10}\right)$$

$$=1+b_1+b_2+\cdots+b_{10}+b_1b_2+b_2b_3+\cdots$$

$$=21+b_1b_2+b_2b_3+\cdots\geq 21 \text{ 与 } a_1a_2\cdots a_{10}<21 \text{ 矛盾},$$

$\therefore \exists a_i\left(i=1,2,\cdots,10\right)$，使 $a_i<1$.

微信公众号：学习资料共享铺

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

2013 年北京大学保送生考试数学试题详解

【第 1 题】

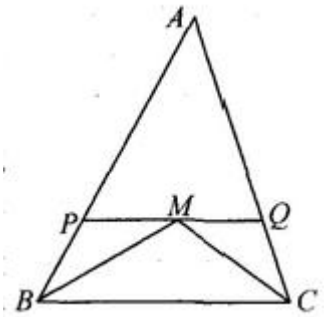
ΔABC 内点 M 满足 $\angle CMB=100°$，线段 BM 的中垂线交边 AB 于 P，线段 CM 的中垂线交边 AC 于 Q，已知：P、M、Q 三点共线，求 $\angle CAB$.

解：如图.

$$\angle PBM+\angle QCM=\angle PMB+\angle QMC=180°-\angle BMC=80°$$

$$\angle MBC+\angle MCB=180°-\angle BMC=80°$$

于是 $\angle ABC+\angle ACB=(\angle PBM+\angle QCM)+)(\angle MBC+\angle MCB)=160°,\angle BAC=20°$



【第 2 题】

正数 a,b,c 满足 $a<b+c$，求证：$\dfrac{a}{1+a}<\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}$.

解：$\dfrac{a}{1+a}=\dfrac{1}{\frac{1}{a}+1}<\dfrac{1}{\frac{1}{b+c}+1}=\dfrac{b+c}{b+c+1}=\dfrac{b}{b+c+1}+\dfrac{c}{b+c+1}<\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}$

因此原不等式得证.

【第 3 题】

是否存在两两不同的实数 a,b,c，使直角坐标系中的三条直线 $y=ax+b,y=bx+c,y=cx+a$ 共点.

解：原问题即方程组 $ax+b=bx+c=cx+a$ 有解 (a,b,c,x)，其中 a,b,c 两两不同.

$$ax+b=bx+c=cx+a\Leftrightarrow x=\frac{c-b}{a-b}=\frac{a-c}{b-c}$$

整理 $\dfrac{c-b}{a-b}=\dfrac{a-c}{b-c}$，得 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$，与 a,b,c 两两不同矛盾.

于是不存在符合题意的实数对 (a,b,c).

微信公众号·学习资料杂货铺

欢迎加入高中数学竞赛及高考群：766755640

【第 4 题】

对 $\{1,2,\cdots 9\}$ 的某非空子集，若其中所有元素的和为奇数，则称为奇子集，问奇子集的个数.

解：设 $M=\{1,3,5,7,9\},N=\{2,4,6,8\}$，则奇子集由 M 中的 1 个、3 个或 5 个元素以及 N 中的任意个元素组成. 因此奇子集共有 $(C_5^1+C_5^3+C_5^5)\cdot 2^4=256$ 个.

【第 5 题】

在一个 2013×2013 的正数数表中，每行都成等差数列，每列平方后都成等差，求证：左上角的数和右下角的数之积等于左下角的数和右上角的数之积.

解：下面证明对 $n\times n$ 的数表，$n\geq 3,n\in\mathbf{N}^*,n$ 是奇数，命题均成立.

当 $n=2k+1$ 时，不妨设数表如图.

a	$\cdots$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\cdots$	b
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	
$\sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2+\left(\dfrac{c+d}{2}\right)^2}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{b^2+d^2}{2}}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
c	$\cdots$	$\dfrac{c+d}{2}$	$\cdots$	d

于是 $2\sqrt{\dfrac{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2+\left(\dfrac{c+d}{2}\right)^2}{2}}=\sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{b^2+d^2}{2}}$

$\Leftrightarrow (a+b)^2+(c+d)^2=a^2+c^2+b^2+d^2+2\sqrt{(a^2+c^2)+(b^2+d^2)}$

$\Leftrightarrow (ab+cd)^2=(a^2+c^2)(b^2+d^2)$

$\Leftrightarrow 2abcd=b^2c^2+a^2d^2$

$\Leftrightarrow ad=bc$

因此命题成立.