第三十四届中国数学奥林匹克

2018 年 11 月

第一天

1. 对全体满足 $a,b,c,d,e \geq -1$ 且 $a+b+c+d+e=5$ 的实数. 求

$$S=(a+b)(b+c)(c+d)(d+e)(e+a)$$

最大值及最小值.

解法一 先求最小值 （龚 固）

（1）若 $a+b,b+c,c+d,d+e,e+a$ 中恰一个负数，不妨设 $a+b<0$，则 $a+b \geq -2$，

$$(b+c)(c+d)(d+e)(e+a) \leq \left(\frac{10-a-b}{4}\right)^4 \leq 81$$

从而原式 ≥ -162.

（2）若 $a+b,b+c,c+d,d+e,e+a$ 中恰 3 个负数，则 3 个负数均 ≥ -2，另外 2 个非负数之和 ≤ 16，故 2 个非负数之积 ≤ 64，从而原式 ≥ -512.

又显然 $a+b,b+c,c+d,d+e,e+a$ 不能全负，故原式 ≥ -512，当 $a=b=c=d=-1,e=9$ 时取等.

再求最大值

（1）若 $a+b,b+c,c+d,d+e,e+a$ 均为正，则原式 $\leq \left(\dfrac{2a+2b+2c+2d+2e}{5}\right)^5=32$.

（2）若 $a+b,b+c,c+d,d+e,e+a$ 中恰 3 个正数，将 $a+b,b+c,c+d,d+e,e+a$ 排成一个圆周，则必有 2 个正数不相邻.

不妨设 $a+b,c+d>0$，则 $a+b+c+d=5-e \leq 6$，从而 $(a+b)(c+d) \leq 9$.

又显然 $a+b,b+c,c+d,d+e,e+a \in [-2,8]$，故原式 $\leq (-2)^2 \times 9 \times 8=288$.

（3）若 $a+b,b+c,c+d,d+e,e+a$ 中恰一个正，不妨设 $a+b>0$，由 $(b+c)+(d+e) \leq 0$ 知 $a \geq 5$，由 $e \geq -1$，知 $e+a \geq 4$，矛盾.

综上，原式 ≤ 288，当 $a=b=c=-1,d=e=4$ 时取等.

解法二 令 （罗 炜）

$$a_1=a+b,\quad a_2=c+d,\quad a_3=e+a,\quad a_4=b+c,\quad a_5=d+e$$

则有 $\sum\limits_{i=1}^{5} a_i=2(a+b+c+d+e)=10$，所以 $a=5-a_4-a_5$，类似可表示出实数 b,c,d,e.

因为

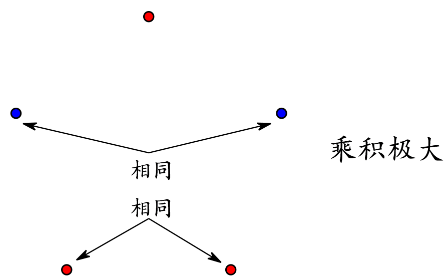
$$a,b,c,d,e \geq -1 \Leftrightarrow a_i+a_{i+1} \leq 6(a_6=a_1)$$

所以问题可转化为:

已知 $\sum a_i=10, a_i+a_{i+1} \leq 6(a_6=a_1)$，求 $\prod a_i$ 的最大值及最小值.

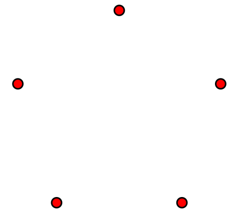
对 $\{a_i\}$ 中哪些为正，哪些为负的情况讨论，轮换对称的情况只讨论一种;

将 a_i 放在正 5 边形顶点上，对于所讨论的情况，非负标为红、负标为蓝，若有正 5 边形的一个反射变换 T，使得所有 a_i 与 $a_T(i)$ 颜色相同，则取极值时 $a_i=a_T(i)$，这是因为，将变量 a_i 与 $a_T(i)$ 都换成相应的平均后，乘积绝对值变大，其它限制条件仍然满足，这个可以简化讨论过程.



（1）全红，乘积为正

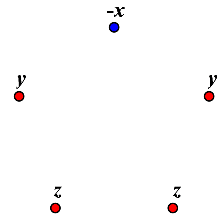
$$\prod a_i \le 2^5 = 32$$


(1)

（2）一蓝四红

$$\begin{cases} -x+2y+2z=10 \\ -x+y\le 6 \\ y+z\le 6 \end{cases} \Rightarrow xy^2z^2 \le x\left(\frac{y+z}{2}\right)^4 \le 2\cdot\left(\frac{6}{2}\right)^4 = 162$$

所以 $\prod a_i \ge -162$，当 $\{a,b,c,d,e\}=\{-1,-1,4,-1,4\}$ 时取到.



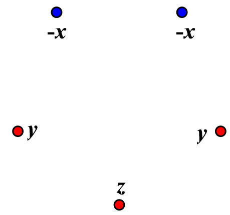
(2)

（3）二蓝三红（i）

$$\begin{cases} y+z\le 6 \\ 2y+z=10+2x\le 12-z \end{cases} \Rightarrow 2x+z\le 2$$

由平均不等式

$$x^2y^2z \le \left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot y^2 \le \left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot 6^2 < 32$$

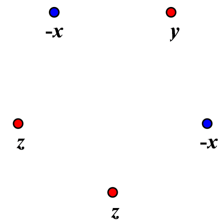


(3)

（4）二蓝三红（ii）

$$\begin{cases} z\le 3 \\ y\le 6+x \\ y+2z=10+2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 2 \\ y\le 8 \\ z\le 3 \end{cases}$$

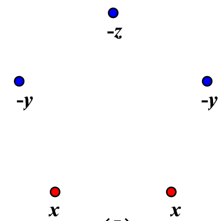
则有 $x^2z^2y \le 4\cdot 9\cdot 8 = 288$，当 $\{a,b,c,d,e\}=\{-1,-1,-1,4,4\}$ 时达到.



(4)

（5）三蓝二红（i）

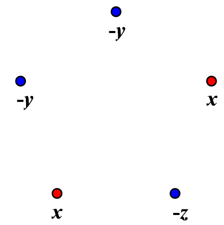
$$\begin{cases} x\le 3 \\ y\le 2 \\ z\le 2 \end{cases} \Rightarrow x^2y^2z \le 8\cdot 9 = 72$$



(5)

（6）三蓝二红（ii）

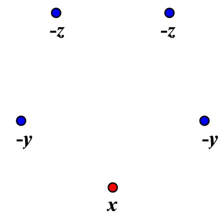
$$\begin{cases} y,z\le 2 \\ x\le 8 \end{cases} \Rightarrow x^2y^2z \le 2^9 = 512, \{a,b,c,d,e\}=\{-1,-1,-1,-1,9\}\text{时达到.}$$



(6)

（7）四蓝一红

$$\text{由}\begin{cases} x\le 6+y\le 8 \\ y,z\le 2 \end{cases} \quad \text{得}xy^2z^2 \le 8\cdot 2^4 < 288$$



(7)

最大值为 288，a,b,c,d,e 依次为 $-1,-1,-1,4,4$ 时达到；
最小值为 -512，a,b,c,d,e 依次为 $-1,-1,-1,-1,9$ 时达到.

2. 若正整数 a,b,c 是一个直角三角形的三边长，则称三元集合 $\{a,b,c\}$ 为勾股三元组. 求证：对任意勾股三元组 P,Q，存在正整数 $m\geq 2$ 勾股三元组 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 使得 $P=P_1,Q=P_m$ 且 $\forall\, 1\leq i\leq m-1, P_1\cap P_{i+1}\neq\varnothing$.

证明　对于两个正整数 a,b，若存在勾股三元组序列 $P_1,P_2,\cdots,P_m$，满足 $P_i\cap P_{i+1}\neq\varnothing$，并且 $a\in P_1,b\in P_m$，则称 a,b 等价，记为 $a\sim b$，显然有

1. $a\sim b\Rightarrow ka\sim kb$，只需将序列中的直角三角形边长都变成 k 倍.
2. $a\sim b,b\sim c\Rightarrow a\sim c$，只需将序列连接即可.
3. $\{2k+1,2k(k+1),k^2+(k+1)^2\}$ 为勾股三元组，因此 $2k+1\sim 2k(k+1)$，取 $2k+1$ 为奇素数，则 $2k+1$ 等价于更小素数的乘积，归纳并利用 (1) 可得，所有数都等价于某个 2 的幂次.
4. 考察 $\{3,4,5\},\{5,12,13\},\{12,16,20\},\{15,20,25\},\{7,24,25\},\{10,24,26\},\{6,8,10\}$ 知 $2^k\sim 2^{k+1},k\geq 2$.
5. 显然 $1,2$ 不包含在任何勾股三元组中.
6. 除了 $1,2$ 任何两个数都等价于 2 的某两个幂次 $2^a,2^b,a,b\geq 2$，这两个幂次根据 (4) 等价于 $2^{\max(a,b)}$，因此超过 2 的数都等价，对任何两个勾股三元组 P,Q，在 P,Q 中分别任取一个数记为 a,b，然后在 P,Q 中插入使得 $a\sim b$ 等价的勾股三元组序列及得到题目要求的序列.

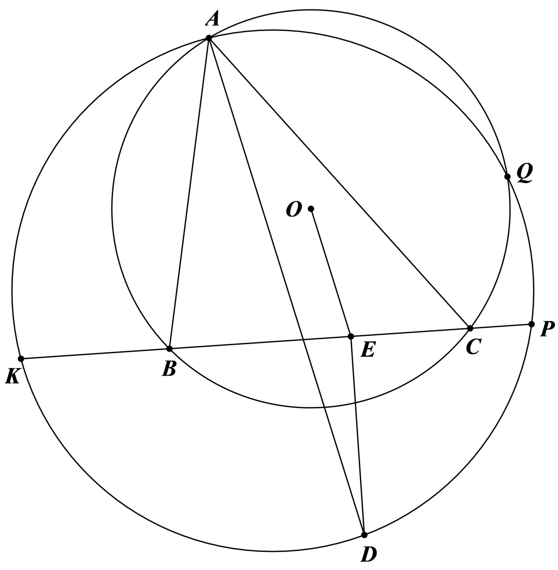
3. $\triangle ABC$ 中，$AB<AC,O$ 为外心，D 是 $\angle BAC$ 平分线上一点，E 在 BC 上，满足 $OE\parallel AD,DE\perp BC$，在射线 EB 上取点 K 满足 $EK=EA$，$\triangle AKD$ 外接圆与 BC 交于另一点 $P\neq D$，$\triangle ADK$ 外接圆与 $\triangle ABC$ 外接圆交于另一点 $Q\neq A$. 求证：PQ 与 $\triangle ABC$ 外接圆相切.

证法一　（武江铮）

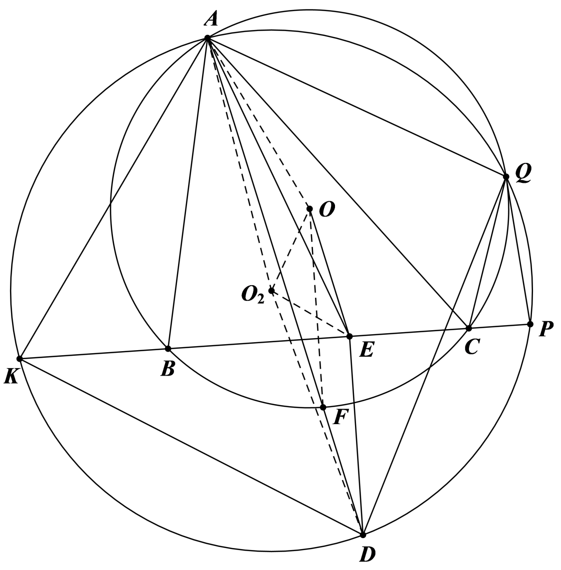
设 O_2 为 $\odot(AKD)$ 外心，F 为 AD 与 $\odot O$ 交点，则相切等价于 $\angle PQA+\angle ABQ=180^\circ$.

注意到 $\angle PQA+\angle AKP=180^\circ$，所以命题等价于 $\angle AKP=\angle ABQ$.

连接 OO_2,OE,O_2E.



题 图



解析图

注意到 $OF\perp BC$，所以有 $OF\parallel ED$，所以四边形 $OFED$ 为平行四边形;

其次有 $AO=OF=DE$，所以有四边形 $AOED$ 为等腰梯形.

注意到 $O_2A=O_2D$，所以 O_2 在 OE 中垂线上，所以有 $\triangle O_2OE$ 为等腰三角形.

注意到 $\angle ABQ=\dfrac{1}{2}\angle AOQ=\angle AO_2O+\angle O_2AO$;

又 $EO_2\perp AK,ED\perp KC$，所以 $\angle AKC=180^\circ-\angle O_2ED=180^\circ-\angle O_2OA=\angle ABQ$.

证法二 思路分析：先尝试最自然的思路 – 消点法 （金 磊）

已知条件略有些复杂，先根据题意用尺规作出准确的图形，理解各个几何元素的生成过程.

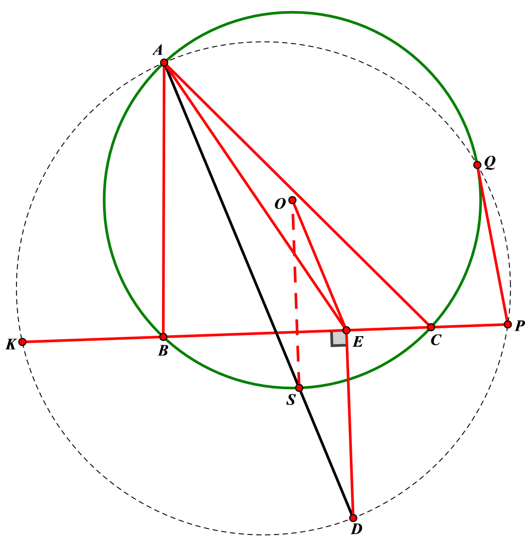
1）先作圆 O，任取三点 A、B、C 使得 $AB < AC$，

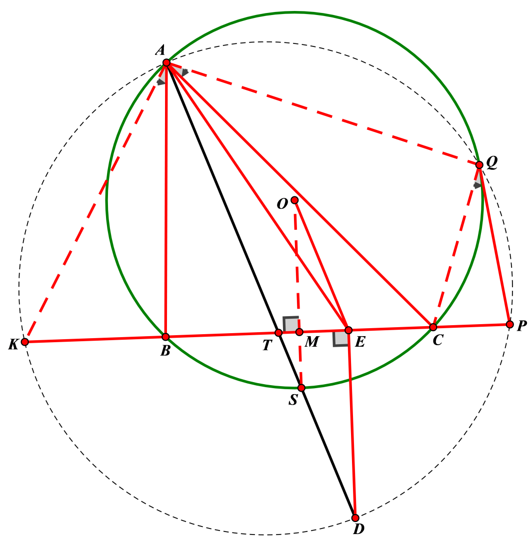
2）过 O 作 BC 垂线交不含 A 的 $\overparen{BC}$ 于 S，则 AS 为 $\angle BAC$ 角平分线，

3）过 E 作 BC 垂线交 AS 于 D，

4）在射线 EB 上取点 K 满足 $EK = EA$，

5）作 $\triangle ADK$ 外接圆交 BC 于点 P，交圆 O 于点 Q，连 PQ，图如下所示





下面由结果入手尽可能通过消点简化图形.

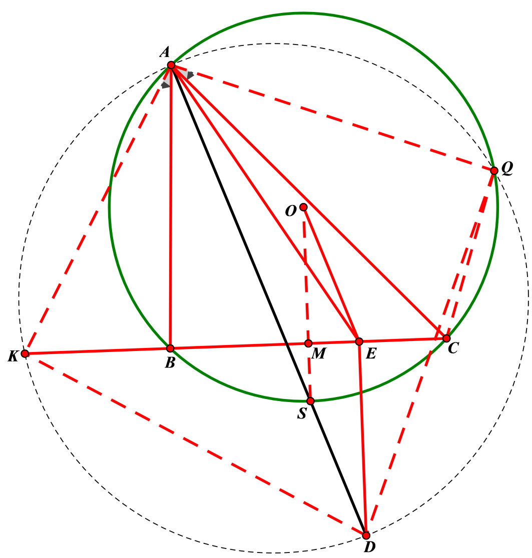
欲证 PQ 为圆 O 切线，即证 $\angle CQP = \angle CAQ$.

由 A, B, C, Q，A, K, P, Q 共圆得

$$\angle CQP = \angle AQP - \angle AQC = (180^\circ - \angle AKP) - (180^\circ - \angle ABP) = \angle ABP - \angle AKP = \angle BAK$$

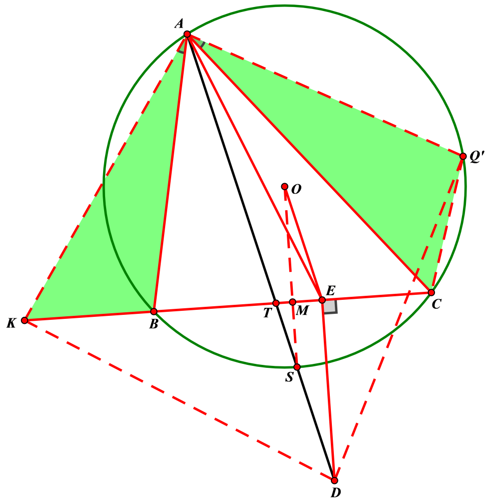
从而需证 $\angle BAK = \angle CAQ$，这样就消去了点 P，这是一个进展的标志，思路应该有希望.

消去 P，从而得到下图：



欲证 $\angle BAK=\angle CAQ$，而显然 $\angle ABK=\angle AQC$，从而 $\triangle ABK\sim\triangle AQC$，图形中显然最后生成的是点 Q，它最难描述，它是两圆交点，但是 A,K,D,Q 共圆很难用，而 $\triangle ABK\sim\triangle AQC$ 很好用.

考虑到点 Q 的唯一性可以考虑用同一法，即在圆 O 上取 Q' 使得 $\angle ABK=\angle AQ'C$，下面只需证明 A,K,D,Q' 共圆即可，如下图：



由 $\triangle ABK\sim\triangle AQ'C$ 知 $AQ'\cdot AK=AB\cdot AC$;

由 $\angle ABK=\angle AQ'C$ 及 AD 为 $\angle BAC$ 角平分线知 $\angle DAK=\angle DAQ'=\theta$.

欲证 A,K,D,Q' 共圆，倒角希望渺茫，想到了托勒密定理的逆定理 – 三弦定理，即需证

$$AK\cdot\sin\theta+AQ'\cdot\sin\theta=AD\cdot\sin 2\theta$$

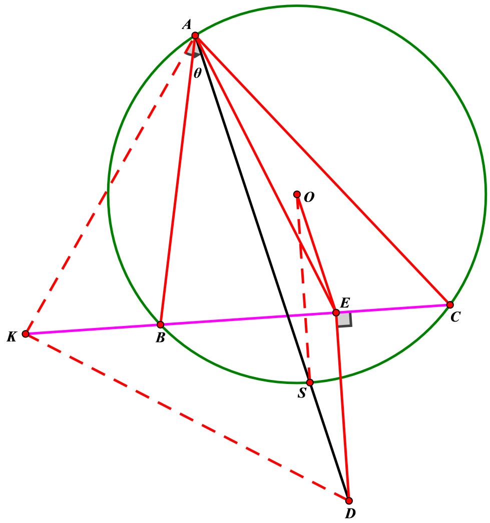
把 AQ' 代入，由二倍角公式即需证

$$AK+AB\cdot AC/AK=2AD\cdot\cos\theta$$

即证

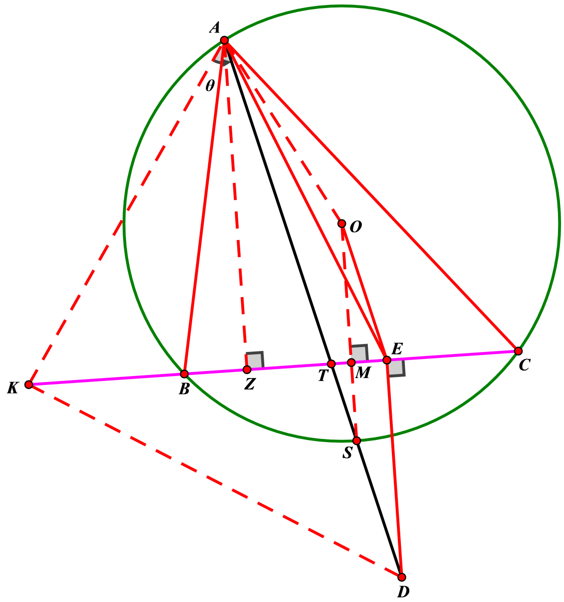
$$AB\cdot AC=2AD\cdot AK\cos\theta-AK^2$$

这样就消去了“讨厌”的点 Q'，得到下图：



此时图穷匕见，图形已经不能化解，就必须面对点 D 研究点 D 的性质了.

由已知 $OE \parallel AD, OS \parallel DE$，则 $OSDE$ 为平行四边形，从而 $DE = OS = R$ 为圆 O 半径，这个性质很简单，但是很漂亮，应该很重要.



下面继续分析目标，即证

$$AB \cdot AC = 2AD \cdot AK \cos\theta - AK^2$$

后面的式子很像余弦定理，由余弦定理，从而需证

$$AB \cdot AC = DA^2 - DK^2$$

我们希望用到条件 $EK = EA$ 及 $DE = R$，则在 $\triangle KDE$ 中由勾股定理，需证

$$AB \cdot AC = DA^2 - EK^2 - ED^2$$

即证

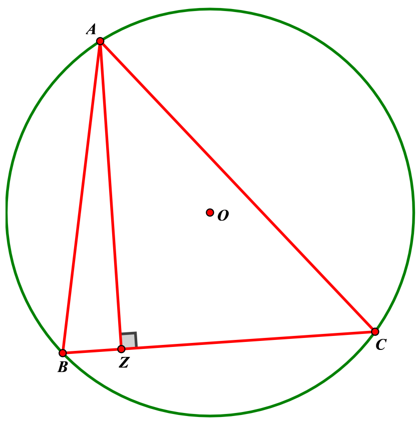
$$AB \cdot AC = DA^2 - EA^2 - ED^2$$

后面在 $\triangle ADE$ 中，又是一个余弦定理，从而需证

$$AB \cdot AC = 2AE \cdot DE \sin\angle AEB = 2R \cdot AE \sin\angle AEB$$

看到 $AE \sin\angle AEB$，自然的思路是作出高线 AZ，从而需证

$$AB \cdot AC = 2R \cdot AZ$$



这样就消去了点 D, E, K，得到如右图的基本图形：

上述结果是一个非常简单而常见的经典结果，既可以利用正弦定理，也可以用相似.

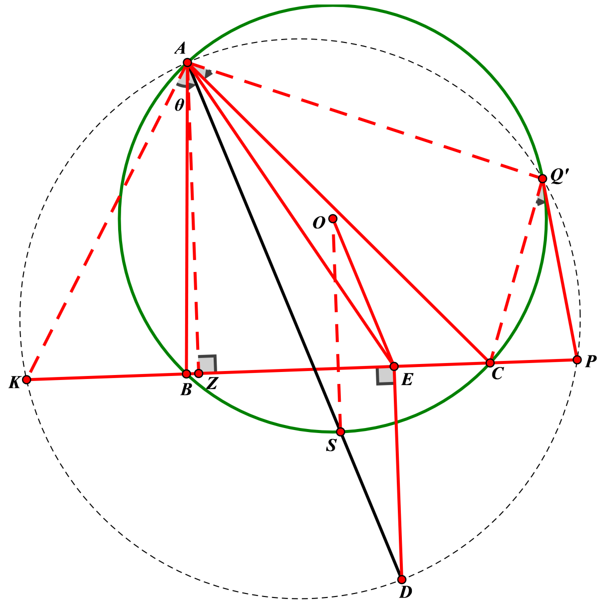
例如由正弦定理

$$AB \cdot AC = 2R \sin B \cdot AB = 2R \cdot AZ$$

从而完成了证明.

下面把详细过程书写如下:

证明 如图，在圆 O 上作 Q' 使 $\angle BAK=\angle CAQ'$，设 $\angle SAK=\theta$，AD 交圆 O 于 S，作 $AZ\perp BC$ 于 Z.



由已知 $OE\parallel AD, OS\parallel DE$，则 $OSDE$ 为平行四边形，从而 $DE=OS=R$ 为圆 O 半径，则

$$\begin{aligned}AB\cdot AC&=2R\sin B\cdot AB=2R\cdot AZ=2AE\cdot DE\sin\angle AEB=2R\cdot AE\sin\angle AEB\\&=DA^2-EA^2-ED^2=DA^2-EK^2-ED^2=DA^2-DK^2\\&=2AD\cdot AK\cos\theta-AK^2\end{aligned}$$

由 $\triangle ABK\sim\triangle AQ'C$ 知 $AQ'\cdot AK=AB\cdot AC$;
由 $\angle ABK=\angle AQ'C$ 及 AD 为 $\angle BAC$ 角平分线知 $\angle DAK=\angle DAQ'=\theta$，则

$$AK\cdot\sin\theta+AQ'\cdot\sin\theta=AD\cdot\sin 2\theta$$

由托勒密定理的逆定理 – 三弦定理知 A,K,D,Q' 共圆，故 Q、Q' 重合，故

$$\begin{aligned}\angle CQP&=\angle AQP-\angle AQC=(180^\circ-\angle AKP)-(180^\circ-\angle ABP)\\&=\angle ABP-\angle AKP=\angle BAK=\angle CAQ\end{aligned}$$

从而 PQ 为圆 O 的切线.

注 此题是很好的一个题目，看着图像比较复杂，如果认真分析，想到了鸡爪定理的基本性质 – 南极点 S 的性质，一步一步往下分析，难度还不是很大的.

第二天

4. 给定一个长轴与短轴不等长的椭圆.

（1）证明：其面积最小的外切的菱形是唯一的；

（2）写出用尺规作图作出这个菱形的过程. （姚博文）

证明 （1）设椭圆的方程是 $ax^2+cy^2=1$，这里 $c>a>0$，四个顶点依次为 A,B,C,D，四个切点依次分别为 E,F,G,H，这样由于 $EFGH$ 是平行四边形，所以 E 处的切线平行于 G 处的切线，而两条切线分别为 $ax_Ex+cy_Ey=1$ 和 $ax_Gx+cy_Gy=1$，这样 $x_E:y_E=x_G:y_G$（或纵坐标同时为 0），这样 EG 过原点，也即 E 和 G 关于原点对称；同理 F 和 H 关于原点对称；

我们解出 B 点坐标：B 在 E 和 F 的切线交点上，这样

$$ax_Ex_B+cy_Ey_B=1=ax_Fx_B+cy_Fy_B$$

所以

$$a(x_E-x_F)x_B=-c(y_E-y_F)y_B$$

而同理我们有

$$a(x_F-x_G)x_C=-c(y_F-y_G)y_C$$

结合对称性有

$$a(x_F+x_E)x_C=-c(y_F+y_E)y_C$$

两式相乘，得

$$a^2(x_E-x_F)(x_F+x_E)x_Bx_C=c^2(y_E-y_F)(y_F+y_E)y_Cy_B$$

而由于菱形对角线互相垂直，所以 $x_Bx_C=-y_By_C$，假设 $x_Bx_C=-y_By_C\neq 0$，那么

$$a^2(x_E^2-x_F^2)+c^2(y_E^2-y_F^2)=0$$

而

$$a(x_E^2-x_F^2)+c(y_E^2-y_F^2)=1-1=0,$$

如果 $x_E^2-x_F^2\neq 0, y_E^2-y_F^2\neq 0$，两式子移项相除得 $\dfrac{a^2}{a}=\dfrac{c^2}{c}$，这样 $a=c$，椭圆是圆，矛盾！

如果 $x_E^2-x_F^2=y_E^2-y_F^2=0$，这样 $|x_E|=|x_F|,|y_E|=|y_F|$，这说明 E 和 F 关于某条坐标轴对称（由于 $F\neq G$），这样 E 和 F 处切线关于坐标轴对称，所以 B 在坐标轴上，这和 $x_Bx_C=-y_By_C\neq 0$ 矛盾，所以 $x_Bx_C=y_By_C=0$，此时 B 和 C 都在坐标轴上，同理 A 和 D 都在坐标轴上.

不妨设 A 在 x 轴正半轴，B 在 y 轴正半轴，此时菱形的面积等于 $2x_Ay_B$，而由于 A 和 B 都在 E 处的切线上，所以 $ax_Ax_E=cy_By_E=1$，解得

$$2x_Ay_B=\frac{2}{acx_Ey_E}\geq\frac{4}{\sqrt{ac}(ax_E^2+cy_E^2)}=\frac{4}{\sqrt{ac}}$$

等号成立条件是 $ax_E^2=cy_E^2$，此时 $x_A=\sqrt{\dfrac{2}{a}}, y_B=\sqrt{\dfrac{2}{c}}$，

即 A 和 B 恰好为以原点为位似中心，$\sqrt{2}$ 倍位似变换后的椭圆和坐标轴的交点，所以存在唯一，即证.

解 （2）先说明：使用尺规作图施行 $\sqrt{2}$ 倍位似变换的过程：以位似中心 O 和目标点 A 为一边做正方形 $OABC$，在 OA 上截取 $OA'=OB$.

1. 做 2 组平行弦 P_1P_2,P_3P_4 和 P_5P_6,P_7P_8，中点分别为 M_1,M_3,M_5,M_7；
2. 连接 M_1M_3 交 M_5M_7 于 O；

3. 过 O 任作一圆交椭圆于四点 Q_1,Q_2,Q_3,Q_4;
4. 过 O 点作线段 Q_1Q_2 的平行线和垂线分别交椭圆于 $A_1,C_1;B_1,D_1$;
5. 以 O 为中心，$\sqrt{2}$ 为位似比，对 A_1,C_1,B_1,D_1 施行位似变换得到 A,C,B,D;

则四边形 $ABCD$ 即为所求.

我们下面证明这个是满足条件的，显然这个四边形是菱形.

下面证明引理：一个椭圆的两条平行弦 P_1P_2, P_3P_4，中点 M_1M_3 连线过椭圆圆心.

引理的证明 设椭圆的方程为 $Ax^2+Cy^2=1$，直线的方程是 $y=kx+b_1,y=kx+b_2$（斜率不存在或为 0 时平凡）.

设 $P_i(x_i,y_i)$，则 $Ax_1^2+Cy_1^2=1=Ax_2^2+Cy_2^2$，相减得 $A(x_1+x_2)(x_1-x_2)=C(y_1+y_2)(y_2-y_1)$.

由于 $y_2-y_1=k(x_1-x_2)\neq 0$，代入得 $A(x_1+x_2)+C(y_1+y_2)k=0$，解得 $\dfrac{y_{M_1}}{x_{M_1}}=-\dfrac{A}{Ck}$.

同理 $\dfrac{y_{M_3}}{x_{M_3}}=-\dfrac{A}{Ck}$，命题即证.

回到原题，这样 O 点为椭圆圆心，由于椭圆和圆都是关于两条轴的轴对称图形，交于四个点，所以四个点两两关于坐标轴对称，所以相邻的两个点平行于某条坐标轴.

这样我们做出的 AC 和 BD 就是坐标轴了，而根据第一问结论，最小的菱形存在唯一，且顶点是在坐标轴上，距离原点 $\sqrt{2}$ 倍的对应半轴的长度，于是命题即证.

5. 给定一个 $n\times n$ 的方格表，每个格子中填入一个整数，每次操作选择一个方格，将其同行、同列的 $2n-1$ 个数都加 1. 求最小的 $N(n)$，使得无论开始时方格表内数填的是多少，均可以通过有限次操作使得方格表内至少有 $N(n)$ 个偶数. （罗 炜）

解 当 n 是偶数时，$N(n)=n^2$；当 n 是奇数时，$N(n)=n^2-n+1$.

首先构造一些操作组合:

- 设选取 (i,j) 位置的方格所进行的操作为 $C(i,j)$，其中 $1\le i,j\le n$.
- $C(i,j),C(i,j'),C(i',j),C(i',j')$ 合并得到改变四个位置 $(i,j),(i',j),(i,j'),(i',j')$ 的操作，记为 $D(i,i',j,j')$.
- $C(i,j),C(i,j')$ 得到改变 j,j' 两列，但不改变 $(i,j),(i,j')$ 奇偶性的操作，记为 $E(i,j,j')$.
- 当 n 是偶数时，$E(i,j,j')$ 在两列上各改变了 $n-1$（奇数）个格子的奇偶性，复合 $(n-2)/2$ 个 $D(i',i'',j,j')$ 操作，可以得到只改变某两个（同行）格子 $(k,j),(k,j')$ 上奇偶性的操作，记为 $F(k,j,j')$.
- 当 n 是偶数时，同理可得到改变两个同列格子奇偶性的操作记为 $G(k,k',j)$.
- 当 n 是偶数时，一个 $C(i,j)$，配合 $n/2$ 个 F 类操作，及 $n/2$ 个 G 类操作，可以得到只改变一个格子奇偶性的操作，因此这时任何初始情况可以得到全是偶数的方格表.
- 当 n 是奇数时，通过 $D(1,i,1,j)$ 类型的操作，可使所有的奇数位于第一行或第一列，然后选择进行或者不进行 $C(1,1)$ 操作，可以使奇数总数不超过 $n-1$.

当 n 是奇数时，每个 $C(i,j)$ 操作任何两行的并集中偶数个格子，因此两行并集中的奇数个数奇偶性不变；同理两列并集中奇数个数奇偶性不变.

取初始状态为：第一列为奇数，其它所有数为偶数. 初始第一列奇数个数与其它列不同，所有行奇数个数相同. 设结束第一列有 a 个奇数;

- 若 a 是偶数，则第 2 到 n 列每列有奇数个奇数，因此总数至少 $n-1$ 个奇数;
- 若 a 是奇数，则第 2 到 n 列每列有偶数个奇数，所有数总和为奇数；因为每行奇数个数奇偶性相同，方格表中奇数总数奇偶性与每行奇数个数奇偶性相同，因此每行有奇数个奇数，总数至少 n 个奇数;

综上所述，当 $n=2k$ 是偶数时，可以操作使所有数为偶数，$N(2k)=4k^2$；当 $n=2k+1$ 是奇数时，可以操作使奇数个数不超过 $n-1$，而且存在初始状态使奇数个数不能更小，$N(2k+1)=4k^2+2k+1$.

6. 设点 $P_1,P_2,\cdots,P_{2018}$ 放在给定正五边形的内部或边界上. 求所有的放置方式使得

$$S=\sum_{1\le i<j\le 2018}|P_iP_j|^2$$

取到最大值.（罗 炜）

引理 1 $x^2-5y^2=-4$ 的正整数解，都由斐波那契数列 $F_1=F_2=1,F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ 中某相邻两项表示为 $x=2F_n+F_{n+1},y=F_{n+1}$，其中 n 为奇数.

证明 $x^2-5y^2=-4$，则 $(9x-20y)^2-5(9y-4x)^2=x^2-5y^2=-4$，记 $x_1=9x-20y,y_1=9y-4x$.

- $x_1>0 \iff 9x>20y \iff 81x^2>400y^2 \iff 405y^2-324>400y^2 \iff y>8$;
- $y_1>0 \iff 9y>4x \iff 81y^2>16x^2 \iff 81y^2>80y^2-64$，总成立;
- $x_1<x \iff 8x<20y \iff 4x^2<25y^2 \iff 20y^2-16<25y^2$，总成立;
- $y_1<y \iff 8y-4x<0 \iff 4y^2<x^2 \iff y>2$;

因此方程满足 $y>8$ 的正整数解，总是能得到更小的正整数解. 对于 $y\le 8$，验证有解 $(1,1),(4,2),(11,5)$，这些都满足 $x=2F_n+F_{n+1},y=F_{n+1},n=1,3,5$. 上述递推过程可以描述为

$$(x+\sqrt{5}y)(9-4\sqrt{5})=(9x-20y)+\sqrt{5}(9y-4x)$$

其逆操作为

$$x=9(9x-20y)+20(9y-4x),\quad y=9(9y-4x)+4(9x-20y)$$

上述操作下

$$\begin{aligned}9(2F_n+F_{n+1})+20F_{n+1}&=18F_n+29F_{n+1}=11F_{n+1}+18F_{n+2}=7F_{n+2}+11F_{n+3}\\&=4F_{n+3}+7F_{n+4}=3F_{n+4}+4F_{n+5}=F_{n+5}+3F_{n+6}\\&=2F_{n+6}+F_{n+7}\end{aligned}$$

因此从 $(1,1),(4,2),(11,5)$ 开始递推恰好得到题中用斐波那契数列描述的解.

引理 2 $x^2-5y^2=-4,y\le 1009$ 的正整数解为:

$$(1,1),\quad(4,2),\quad(11,5),\quad(29,13),\quad(76,34),\quad(199,89),\quad(521,233),\quad(1364,610)$$

引理 3 若 n 个点集中在正 5 边形的 5 个顶点上，则当它们的重心到正 5 边形中心距离最小时，存在 5 个顶点的一个轮换顺序，5 个顶点上的顶点个数依次是 a,a,b,c,b，其中 a,b,c 是正整数，$2a+2b+c=n$.

证明 5 个顶点按点数奇偶性涂色.5 个点任意涂两色，总有保持颜色的反射对称性，将此反射下对应的两顶点上点数求平均（对称点奇偶性相同保证平均为整数），得到 n 个点的一种放置；新的放置的重心是旧放置重心及其反射放置重心的中点，因此距离正 5 边形中心不会更远.

引理 4 设向量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的算术平均（重心）为 $X^*=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则对任何向量 Y，有

$$\sum_{i=1}^{n}|Y-X_i|^2=\sum_{i=1}^{n}|X_i-X^*|^2+n|Y-X^*|^2.$$

证明 及向量 A,B 的内积为 (A,B)，根据内积的对称性，双线性性质，及 $|A|^2=(A,A)$，有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n|Y-X_i|^2&=\sum_{i=1}^n(Y-X_i,Y-X_i)=\sum_{i=1}^n(Y,Y)-2(Y,X_i)+(X_i,X_i)\\&=n(Y,Y)-2n(Y,X^*)+\sum_{i=1}^n(X_i,X_i)=n|Y-X^*|^2+\sum_{i=1}^n(-(X^*,X^*)+(X_i,X_i))\\&=n|Y-X^*|^2+\sum_{i=1}^n((X^*,X^*)-2(X^*,X_i)+(X_i,X_i))=n|Y-X^*|^2+\sum_{i=1}^n|X_i-X^*|^2\end{aligned}$$

CMO201806 补充证明：根据引理4，对任何 P_i，

$$S=2017|P_i-P_i^*|^2+\sum_{j\neq i}|P_j-P_i^*|^2+\sum_{j<j',j\neq i,j'\neq i}|P_j-P_{j'}|^2$$

其中 $P_i^*=\frac{1}{2017}\sum_{j\neq i}P_j$ 为除去 P_i 的其余点的重心. 因此当 S 达到最大值时，P_i 在到 P_i^* 最远的一个点上，必然是正五边形的一个顶点. 因此每个 $P_i,i=1,\cdots,2018$ 都在正五边形的某个顶点上，不妨设正五边形内接于单位圆.

利用引理4类似的计算，记 $n=2018$，当 P_i 都是正五边形顶点时

$$2S=\sum_{i,j=1}^n|P_i-P_j|^2=2n\sum_{i=1}^n|P_i|^2-2\sum_{i,j=1}^n(P_i,P_j)=2n^2-2n^2(P^*,P^*)$$

其中 $P^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^nP_i$ 为重心，因此 S 达到极大值当且仅当 $|P_i^*|$ 达到极小值.

根据引理3，当 S 达到最大值时，5 个顶点上点数具有一个反射对称性，可设顶点数依次是 a,a,b,c,b，其中 $2a+2b+c=n$. 不妨设复平面上的 1 是正五边形一个顶点，上面有 c 个 P_i 中的点，则

$$\begin{aligned}nP^*&=2a\cos\frac{4\pi}{5}+2b\cos\frac{2\pi}{5}+c=-\frac{\sqrt5+1}{2}a+\frac{\sqrt5-1}{2}b+c\\&=\frac12\left(4036-2a-2b-\sqrt5(a-b)\right)\end{aligned}$$

记 $x=4036-5a-5b,y=a-b$，则上述距离 2 倍为 $x-\sqrt5y=\frac{x^2-5y^2}{x+\sqrt5y}$，其中

$$x^2-5y^2\equiv1\pmod 5,\quad x^2-5y^2\equiv0\pmod 4)$$

因此 $x^2-5y^2=-4$ 或者 $|x^2-5y^2|\geq16$.

若 $x>0$，则 $a+b\leq807$，于是 $|y|\leq a+b\leq807$;

若 $x\leq0$，则 $x\geq4036-5*1009=-1009$，于是若 $|x-\sqrt5y|<1$（很容易达到），则 $|y|<500$.

当 $x^2-5y^2=-4$ 时，根据引理2，枚举这样的解，试验 $y=233,x=521$ 解得 $a=468,b=235$;

当 $y=610,x=1364$ 时，a,b 无解，因此这时 $|x-\sqrt5y|$ 最小值在 $a=468,b=235$ 时取到，其值为

$$\frac{4}{521+233\sqrt5}\leq\frac{2}{521}$$

当 $|x^2-5y^2|\geq16$ 时，$|x-\sqrt5y|=|\frac{x^2-5y^2}{x+\sqrt5y}|\geq\frac{16}{1+2\sqrt5|y|}\geq\frac{16}{5*807+1}>\frac{2}{521}$.

综上所述，题目中的最小值在正五边形 5 个顶点上点数（在某个轮换顺序下）依次为 $(468,235,612,235,468)$

时达到.

注

- 第一次本人（罗炜）给出的答案是错的，感谢姚博文发现.
- 转化成重心模长最小，这里用向量写（不用复数）可以适合高维空间，这一步是第一个关键之处，经与姚博文讨论得知.
- 利用对称性可以减少变量到两个，这个技巧在今年 CMO 第一题我的解法也用到了.
- 用无穷递降法讨论 Pell 方程的所有解是通用的方法.
- 解答的第二个关键之处在于发现如果 x^2-5y^2 不是 -4，则绝对值至少是 16，这简化了对其他情况的排除.
- 这个解答本人原创思路很少，放上来纯为了修正之前的.