解

第60届国际数学奥林匹克

胸中一點浩然氣

天地千里快哉風

这是一个浩大舰队远征灿烂宇宙，无比波澜壮阔的时代，

我们每一个人都是这个时代的战士，我们都怀揣着一个名为数学、数学竞赛的梦，无数英勇的战士前仆后继，坚强的生存与光荣的牺牲交相辉映，

这是一场或许我们用一生都追逐不到尽头的梦，

但是我们无所畏惧，我们引吭高歌，我们竭尽全力，

我们所走过的梦，是用一个个音符所点缀出来的战歌，我们每一个都是唱着歌的追梦人啊！

这个梦带给我们追逐的力量，带给我们迎难而上的拼劲，还有一个绚丽夺目的数学世界，前方的路虽然很黑，但是请看看在你周围这些带着光芒的人，他们和你一样，和我一样，都是在这条路上行走的伙伴，

他们和你一样，和我一样，都是这个时代爱数学、爱数学竞赛的傻子们，

嘿，傻子，这个时代欢迎你的到来，

嘿，傻子，加入这个“傻子俱乐部”吧，接下来，让我们一起走吧

—来自傻子俱乐部，最爱你们的小数君

第六十届国际数学奥林匹克（2019 年）

英 国

第一天

1. 设整数集为 $\mathbb{Z}$. 求所有函数 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ 使得对任意整数 a,b 都有

$$f(2a)+2f(b)=f(f(a+b)).\tag{①}$$

解法一 显然 $f(x)=0$ 是其平凡解.
$f(2a)+2f(b)=f(f(0+(a+b)))=f(0)+2f(a+b)$，所以

$$2f(a+b)=f(2a)+2f(b)-f(0).\tag{1}$$

再令 $a=b$ 得

$$f(2a)=2f(a)-f(0).\tag{2}$$

代入 (1) 得

$$f(a+b)=f(a)+f(b)-f(0).\tag{3}$$

令 $F(a)=f(a)-f(0)$，则

$$F(a+b)=F(a)+F(b).\tag{4}$$

$$F(0)=0.\tag{5}$$

这是熟知的 Cauchy 方程.
设 $F(n)=nF(1)$，则 $F(n+1)=F(n)+F(1)=(n+1)F(1)$，所以 $F(a)=aF(1),a\in\mathbb{Z}$.

$$f(a)=aA+f(0)\quad(A=F(1)).\tag{6}$$

将 (6) 代入题目中的等式得

$$2aA+2bA+2f(0)=A^2(a+b)+Af(0).\tag{7}$$

因为 $a+b$ 可取任意整数，上式当且仅当 $A=2$ 时成立，所以本题的解为

$$f(a)=2a+c,\ a\in\mathbb{Z},$$

其中 c 为任意整数.

综上所述，$f(x)=0$ 或 $f(x)=2x+c$（c 为任意整数）符合题意. **单 墫**

评注 这道题不错，人人皆可上手，不难，解法也多种多样. 但以为这题难度低于我国高中联赛，恐怕未必. 因为能上手不一定能做出最后结果，也不能保证没有疏漏.

解法二 将①中 a,b 交换知

$$f(2a)+2f(b)=f(2b)+2f(a). \qquad ②$$

在②中令 $b=0$，有

$$f(2a)=2f(a)-f(0). \qquad ③$$

将③代入①知

$$2f(a)+2f(b)-f(0)=f(f(a+b)). \qquad ④$$

在④中，分别令 $a=n$, $b=n+2$ 和 $a=b=n+1$，n 为任意整数，有

$$f(n)+f(n+2)=2f(n+1),$$

故 $f(n)=An+B$，A,B 为常数，代入①后有

$$A(2a)+B+2(Ab+B)=A(A(a+b)+B)+B$$

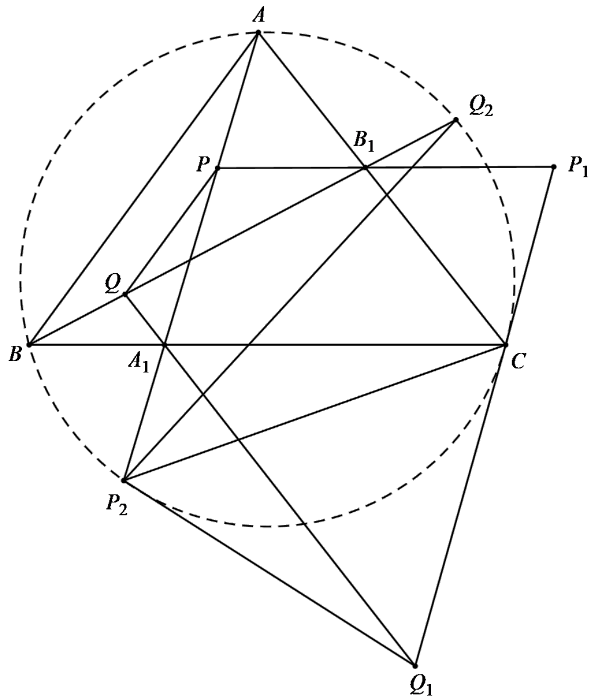
对 $\forall\, a,b\in\mathbb{Z}$ 成立，故 $2A=A^2$, $3B=AB+B$，从而 $A=B=0$ 或 $A=2$，B 为任意整数.

经验证：$f(x)=0$ 或 $2x+B$（B 为任意整数）符合题意. **龚 固**

2. 在三角形 ABC 中，点 A_1 在边 BC 上，点 B_1 在边 AC 上. 点 P 和点 Q 分别在线段 AA_1, BB_1 上，满足 PQ 与 AB 平行. 设 P_1 是直线 PB_1 上一点，满足 B_1 在线段 PP_1 上（不含端点）且 $\angle PP_1C = \angle BAC$，类似定义点 Q_1 在直线 QA_1 上一点，满足 A_1 在线段 QQ_1 上（不含端点），且 $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

证明：P, Q, P_1, Q_1 四点共圆.

证法一 设 AA_1、BB_1 分别交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 P_2、Q_2，



则因为 $PQ \parallel AB$，所以 $\angle PQQ_2 = \angle ABQ_2 = \angle AP_2Q_2$，从而 P、Q、P_2、Q_2 共圆，设这圆为 Ω.

因为 $\angle CQ_1Q = \angle CBA = \angle CP_2A$，所以 A_1、P_2、Q_1、C 共圆，从而

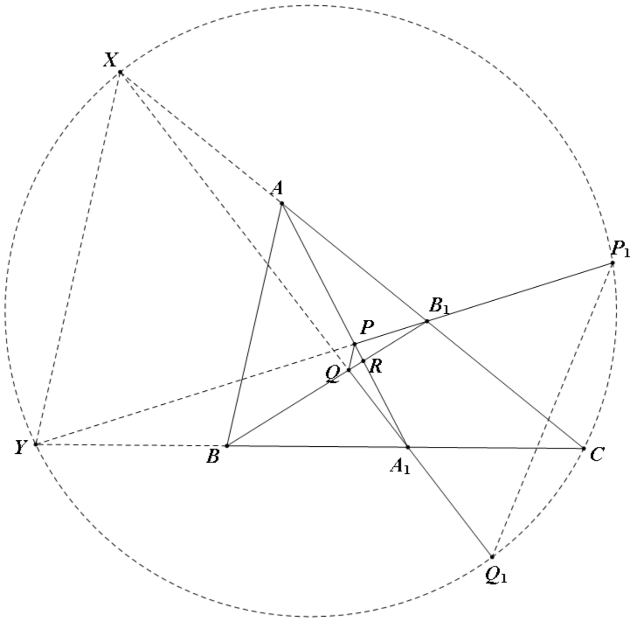
$$\begin{aligned}\angle A_1P_2Q_1 &= \angle A_1P_2C + \angle CP_2Q_1 = \angle ABC + \angle CA_1Q_1 \\ &= \angle ABQ + \angle QBC + \angle QA_1B \\ &= \angle PQB_1 + \angle B_1QQ_1 \\ &= \angle PQQ_1.\end{aligned}$$

Q_1 在圆 Ω 上.

同理 P_1 在圆 Ω 上，结论成立. **单墫**

评注 本题难度大概相当于全国高中联赛，证法较多.

证法二 延长 B_1P,CB 相交于 Y，A_1Q,CA 相交于 X，AA_1,BB_1 相交于 R，



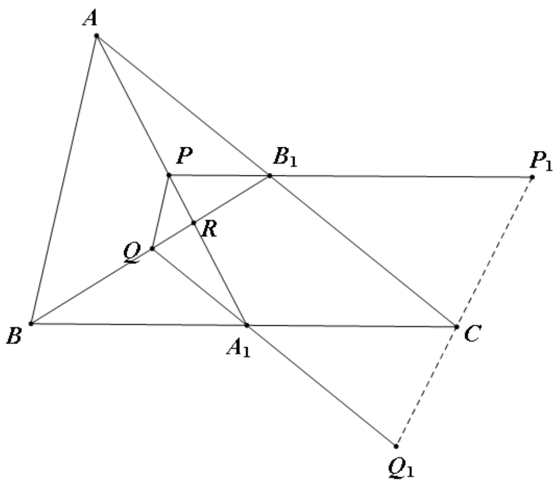
则命题等价于 X,Y,Q_1,P_1 共圆.

$$\begin{aligned}\frac{CX}{AX}\frac{BY}{CY}&=\frac{[QCA_1]}{[QAA_1]}\frac{[PBB_1]}{[PCB_1]}=\frac{[RCA_1]\frac{BQ}{BR}}{[BAA_1]\frac{QR}{BR}}\frac{[ABB_1]\frac{PR}{AR}}{[RCB_1]\frac{AP}{AR}}=\frac{[RCA_1]}{[BAA_1]}\frac{[ABB_1]}{[RCB_1]}\\&=\frac{[RCB]\frac{[ARC]}{[ABC]-[BRC]}}{[BAC]\frac{[ABR]}{[ABC]-[BRC]}}\frac{[ABC]\frac{[ABR]}{[ABC]-[ACR]}}{[RCA]\frac{[BCR]}{[ABC]-[ACR]}}\\&=1,\end{aligned}$$

所以 $XY\parallel AB$，立得 $\angle YXC=\angle YP_1C$，Y,X,P_1,C 共圆.

同理可知 Y,X,P_1,C,Q_1 共圆，即得命题.

退化情形：$PB_1\parallel BC$ 的情况.



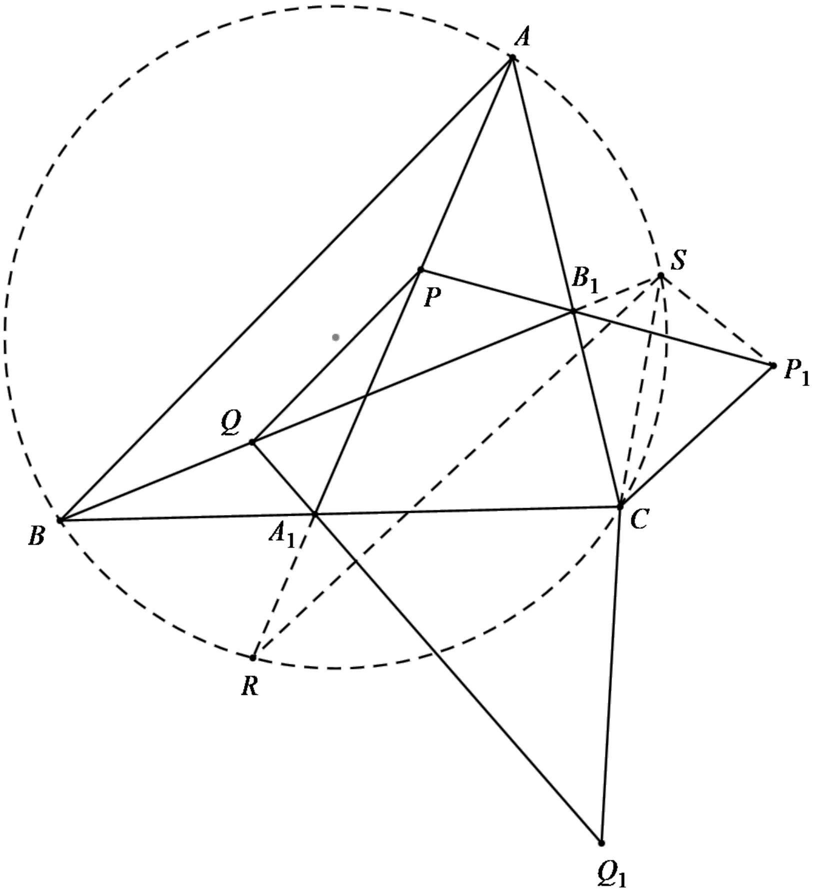
同前述证明可知 $QA_1\parallel AC$.

此时由平行可知 $\angle PP_1Q_1+\angle QQ_1P_1=180^\circ-\angle ACB=\angle PP_1C+\angle QQ_1C$.

即得 P_1,C,Q_1 共线，立得 $\angle QPP_1+\angle QQ_1P_1=\angle QPP_1+\angle QQ_1C=180^\circ$.

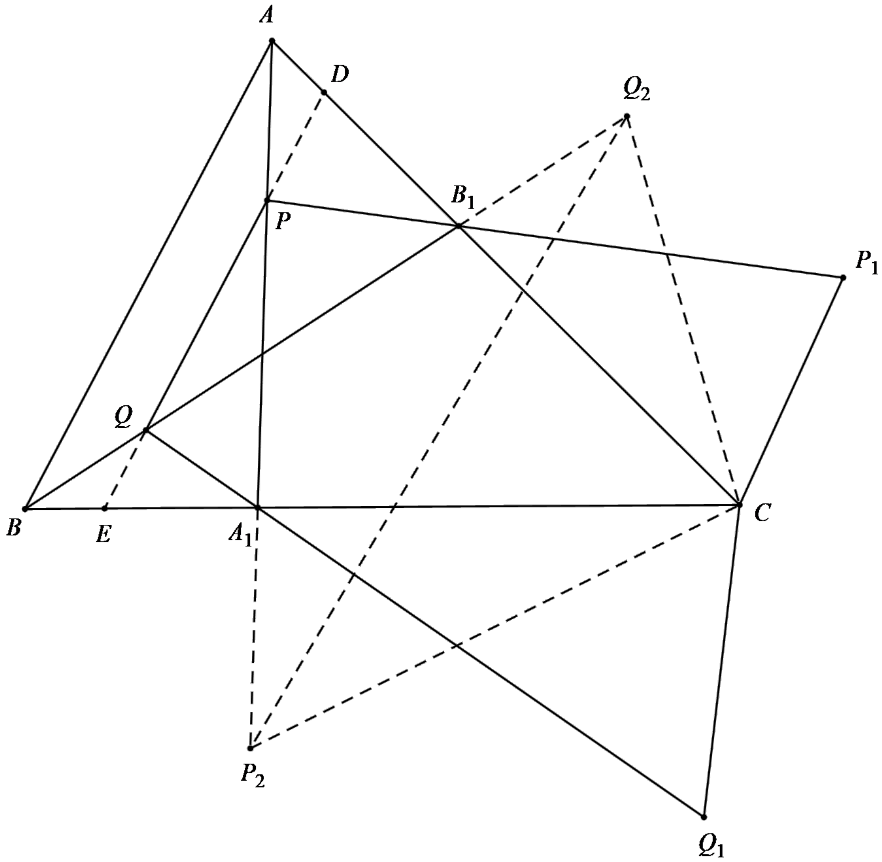
武江铮

证法三 作 $\triangle ABC$ 外接圆 Γ，延长 AA_1 交 Γ 于 R，延长 BB_1 交 Γ 于 S，联结 SC、SP_1、SR.



由 $\angle BSR = \angle BAR = \angle QPR$ 知 P、Q、R、S 四点共圆，记为圆 Ω.
由 $\angle BSC = \angle BAC = \angle PP_1C$ 知 B_1、S、P_1、C 四点共圆.
于是 $\angle SP_1B_1 = \angle SCB_1 = \angle SBA = \angle SQP$，即 S、P_1、Q、P 四点共圆.
故 P_1 在 Ω 上，同理 Q_1 也在 Ω 上.
故 P、Q、P_1、Q_1 四点共圆，证毕. **程国根**

证法四 设直线 PQ 与 AC,BC 分别交于 D,E；设 P_2 在 PA_1 的延长线上，满足 $\angle A_1CP_2=\angle A_1AB$；设 Q_2 在 QB_1 的延长线上，满足 $\angle B_1CQ_2=\angle B_1BA$. 则 A,B,P_2,C,Q_2 五点共圆.



再由 $PQ\parallel AB$ 可得 P,E,P_2,C 四点共圆，Q,D,Q_2,C 四点共圆.

由题 P,D,P_1,C 四点共圆，Q,E,Q_1,C 四点共圆.

由相交弦定理

$$A_1Q\cdot A_1Q_1=A_1E\cdot A_1C=A_1P_2\cdot A_1P,$$
$$B_1P\cdot B_1P_1=B_1D\cdot B_1C=B_1Q_2\cdot B_1Q,$$

于是 P,Q,P_2,Q_1 四点共圆，Q,P,Q_2,P_1 四点共圆.

由 $PQ\parallel AB$ 以及 A,B,P_2,C,Q_2 五点共圆得 $\angle A_1PQ=\angle A_1AB=\angle P_2Q_2B$.

于是 P,Q,P_2,Q_2 四点共圆，于是 P,Q,P_2,Q_1,P_1,Q_2 六点共圆.

阳泉十一中 崔志浩

3. 一个有 2019 名用户的社交网络，这些用户中有某些人是好友关系，这里的好友关系是相互的. 下述事件在他们之中反复发生，且一段时间内只发生一次：

有三个用户 A,B,C 满足 A 是 B 与 C 的共同好友且 B,C 间没有好友关系，在事件发生时，B,C 成为好友且 A 与 B,C 均解除好友关系. 其它的好友关系均保持不变.

开始时，有 1010 个用户每人有 1009 个好友，另外的 1009 个用户每人有 1010 个好友. 证明：存在一个事件序列使得其发生之后每个用户至多有一个好友.

证法一 用 2019 个顶点的图来表示问题，朋友关系用连边表示，每次操作将边 AB,AC 变成边 BC，前提是 BC 无边，这个操作记为 $T(A;BC)$. 目标是得到一个图，每个顶点度数至多为 1. 用 K_n 表示 n 个顶点的完全图.

首先，由初始条件，任何两个顶点的度数和超过 2017，因此两个顶点或者相邻，或者有公共的邻点，因此初始图是连通的. 注意在操作的过程中每个顶点的度数奇偶性不变，因此初始情况下图的每个连通分支有奇数度顶点. 下面证明，如果图可以操作，总是可以适当操作，使得操作后每个连通分支或者有奇数度顶点，或者只有一个顶点，并且每个连通分支不是 $K_n,n\geq 3$. 对操作步数归纳，初始情况显然.

首先，因为操作过程中保持顶点度数奇偶性，因此不改变连通分支所含顶点集的操作总是不产生只有偶数度顶点的连通分支. 不改变连通分支所含顶点集时，因为这个连通分支内的边数减少，也不会产生恰是完全图的连通分支.

设 A 是一个可操作顶点（意思是可以有某操作 $T(A;BC)$），设操作前的图在去掉 A 点后形成几个连通分支，其中包含 A 的邻点的分支记为 $N_1,N_2,\cdots,N_s$.

若 $s=1$，设 A 的邻点 $B,C\in N_1$，可进行操作 $T(A;B,C)$，则此操作或者不改变连通分支，或者产生 A 点单独形成一个分支（A 邻点只有 B,C 的情形），因此操作后符合有奇数度顶点的要求. 如果操作后产生了一个完全图 $K_n,n\geq 3$，则 A 不属于这个 K_n，操作前 A 仅与这 n 个点中的 B,C 相邻，n 个点只缺一条边 BC，设 D 是 n 个点中另一点，可将操作改为 $T(D;B,C)$，不改变连通分支现状.

若 $s\geq 2$，若某个 N_i 含 2 个或以上 A 的邻点，设为 B,C，取另一个 N_j 含 A 的邻点 D，对 AB,AD 操作不改变每个连通分支所包含的顶点，保持每个顶点度数的奇偶性，也保证了操作后不产生连通完全子图.

若 $s\geq 2$，每个 N_i 只含一个 A 的邻点，记为 B_i. 对每个 N_i，若不算 AB_i 边，B_i 度数是奇数，则 N_i 中另有奇数度顶点. 若不算 AB_i 边，B_i 度数是偶数，则 B_i 操作前度数为奇数，任何操作后，B_i 的度数是奇数. 因此进行 $T(A;B_1,B_2)$ 后，每个 N_i 所在分支有奇数度顶点，A 所在分支或者有某个 $N_i,i\geq 3$，或者只有 A 一个点（$s=2$ 时）. 操作 $T(A;B_1,B_2)$ 后，若产生新的连通分支为完全图，或者是含 N_1,N_2 的分支，这个分支只有 N_1,N_2 之间的一条边 B_1,B_2，因此 $N_1=B_1,N_2=B_2$，产生的完全图是包含 B_1,B_2 的 K_2；或者这个新的完全图连通分支包含 A 和 N_3（s 必然为 3），其中 N_3 和 A 之间只有一边 AB_3，仍然的到 K_2.

综上所述，可以一直操作下去，不产生全是偶数度的连通分支，或者连通分支 $K_n,n\geq 3$. 每次操作边数减少 1，到不能操作的时候，考察一个连通分支. 如果不是完全图，取一条缺失的边 AB，以及一条从 A 到 B 的道路，$A=A_1,A_2,\cdots,A_k=B$，A_iA_{i+1} 相邻，则有某个 i，使得 AA_i 有边，AA_{i+1} 无边，可以进行操作 $T(A;A_i,A_{i+1})$，矛盾. 因此到不能操作时，每个连通分支是完全图 K_2 或 K_1，每个顶点度数是 0 或 1，证毕.

罗炜

证法二 首先注意到一个事实，任何操作不会改变顶点度的奇偶性，且每 1 次操作恰好使图的边数减去 1.

称一个图是“好”的，如果它可以进行适当的操作，使得其变为每个顶点的度至多为 1 的状态，将这个过程称为好图的“降解”.

1. 先证明，一个连通图若有 1 个点的度为 1，则这个连通图是好的. 对边个数 m 进行归纳证明这样的图可以降解.

$m=0,1,2$ 穷举即可. 假设 $0,1,2,\cdots,m-1$ 均成立，考虑 m 条边的图 G，设 $d(A)=1$，A 连接了另一个点 B. 由于 G 是连通图，分 3 种情况讨论:

1.1 B 连接了另一个非 1 度点 C，从 B 到 C 的路径不必经过边 BC（当然一定不过 BA）. 此时对 ABC 进行操作，边 AB,BC 变为 AC. 这个图仍然是连通图，边数减少 1，A 点的度仍为 1，由归纳假设，这个图是好的.（如图 1）

1.2 B 连接了另一个非 1 度点 C，从 B 到 C 的路径必经过边 BC. 则去掉边 BC 后，这个图分成了两个连通分支，且 B 和 C 分属两个连通分支. 考察 C 所在的连通分支，包含 B 点和 BC 所在边，作为的导出子图 G'（如图 2）. 在 G' 当中使用归纳假设进行降解，由于 C 非 1 度点，所以降解操作减少的边非 0. 降解完成后，G' 中和 B 连通的边只有 BC' 一条，其中 C' 是 G' 中某个点. 对 ABC' 的连通分支使用归纳假设即可.

1.3 B 连接的点均为 1 度点. 此时这个图是一个向日葵图，叶点两两配对，对 B 点进行操作即可.（图 3）

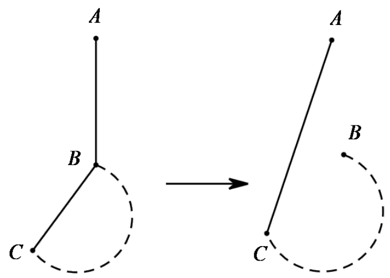


图1（1.1）

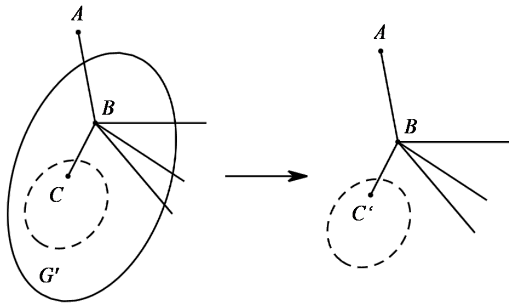


图2（1.2）

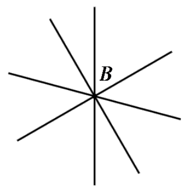


图3（1.3）

2. 任意对图进行操作 $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\cdots$，在操作过程中保持图的连通性. 由于图的边数是有限的，所以必然在进行某次操作 σ_k 之后，不管进行什么样的操作都会使得图不连通. 下证明在 σ_k 之后，得到的图 G 有 1 度点. 考虑 G 的最长路:

2.1 如果最长路长度为 0 或 1，则 G 不存在一个点度为至少 2，G 已经是满足条件的最终形.

2.2 如果最长路长度为 2，设为 ABC，假设 $d(A)\neq 1$，则 A 只能和 C 连接，C 也只能和 A 连接，由于这个图的阶数不少于 4，所以 ABC 必有其他邻点 D，连 B，此时 $DBAC$ 为更长路，矛盾，所以 $d(A)=1$.

2.3 如果最长路长度 ≥ 3，设为 $A_0A_1A_2A_3\cdots A_s$，假设 $d(A_0)\neq 1$，由于 A_0 的邻点必然在这个路当中.

2.3.1 A_0 不连 A_s，取最大的 j 使得 A_0 连 A_j，对边 A_0A_j,A_jA_{j+1} 操作变为 A_0A_{j+1}，图仍然连通，这和不能操作矛盾.

图4（2.1）

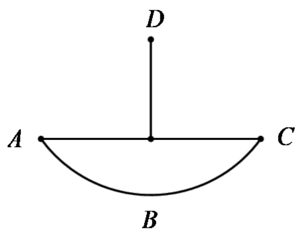


图5（2.2）

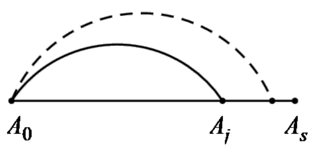


图6（2.3.1）

2.3.2 A_0 连 A_s，此时 $A_0A_1A_2A_3\cdots A_sA_0$ 是圈，

2.3.2.1 $s\neq 2018$，此时图 G 还有点不在圈上，由于 G 是连通图，设 B 连 A_i，此时 $BA_iA_{i+1}\cdots A_sA_0A_1\cdots A_{i-1}$ 是更长路，矛盾.

2.3.2.2 $s=2018$，将这个圈画成一个正 2019 边形，由于这个图有奇度点 A_i，所以 G 存在某一条对角线以 A_i 为一端点. 由于奇数 $d(A_i)\neq 2018$，所以 G 中有某条对角线 A_iA_j 相连，且 A_iA_{j+1} 不连，将边 A_iA_j、A_jA_{j+1}，变为边 A_iA_{j+1}，保持连通性，这与任何操作破坏连通性矛盾！

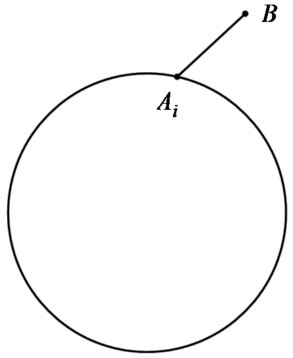


图7（2.3.2.1）

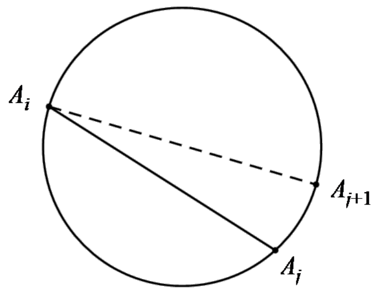


图8（2.3.2.2）

所以图 G 中有 1 度点，由第一步的结论即证. **姚博文**

第二天

4. 求所有正整数对 (k,n)，满足 $k!=(2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\cdots(2^n-2^{n-1})$.

解法一 这种与正整数相关的题，解数大多有限.

先试一下，在 $n=1,2,3,4,5$ 时，只有解 $(k,n)=(1,1),(3,2)$.

以下设 $n\geq 6$，作估计证明无解. 理由（初步直觉）是 $k!$ 很大（由 Stirling 公式，大约超过 $\left(\frac{n}{e}\right)^n$）.

具体做来，首先比较 k 与 n 的大小，由于质因数 2 在上式右边的指数为

$$0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

而在 $k!$ 中 2 的指数为 $k-s(k)$，其中 $s(k)$ 为 k 在二进制中的数字和，显然 $s(k)\geq 1$，从而

$$k\geq\frac{n(n-1)}{2}+1.$$

$n\geq 6$ 时，$k\geq 16$，这时

$$\begin{aligned}k!&\geq 15!\times 16\times 17\times\cdots\times\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)>2^{40}\times 16^{\frac{n(n-1)}{2}+1-16+1}=2^{40+2(n^2-n-28)}\\&=2^{2(n^2-n-8)}=2^{n^2}\times 2^{n(n-2)-16}>2^{n^2}>(2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\cdots(2^n-2^{n-1}).\end{aligned}$$

本题将原等式右边每个因子都作为 2^n，可算是极粗糙的估计，但也已足够解决问题. **单 墫**

解法二 $n=1,2$ 成立，下设 $n\geq 3$.

由于 $\forall\, m\in N_+$，

$$V_2(m!)=\sum_{i=1}^{+\infty}\left[\frac{m}{2^i}\right]<\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{m}{2^i}=m,$$

所以

$$\frac{n(n-1)}{2}=V_2\left(\prod_{j=1}^{n-1}(2^n-2^j)\right)=V_2(k!)<k,$$

所以 $k>\dfrac{n(n-1)}{2}$，所以

$$k!=\prod_{j=1}^{k}j>\prod_{j=1}^{\frac{n(n-1)}{2}}j>\prod_{\frac{n^2-2n+1}{4}\leq j\leq\frac{n^2-n}{2}}j>\prod_{\frac{n^2-2n+1}{4}\leq j\leq\frac{n^2-2n}{2}}\frac{n^2-2n}{4}\geq\left(\frac{n^2-2n}{4}\right)^{\frac{n^2}{4}}$$

（这是因为区间 $[\frac{n^2-2n+1}{4},\frac{n^2-n}{2}]$ 中整数个数 $\geq\frac{n^2}{4}$）.

所以 $(2^n)^n>\left(\dfrac{n^2-2n}{4}\right)^{\frac{n^2}{4}}$，即 $2^{n^2}>\left(\sqrt[4]{\dfrac{n^2-2n}{4}}\right)^{n^2}$，所以 $2>\sqrt[4]{\dfrac{n^2-2n+1}{4}}$，所以 $(n-1)^2<64$，所以 $n\leq 8$.

$n=8$ 或 $n=7$ 时，$127\mid k!$，所以 $k\geq 127$，但 $\forall\, m\leq 8$，$101\nmid 2^m-1$，所以 $101\nmid k!\Rightarrow k\leq 100$，矛盾！

$n=6$ 或 $n=5$，同上，$31\mid k!$，$29\nmid k!$.

$n=4$，$k!=15\times 14\times 12\times 8=20160$，非阶乘数.

$n=3$，$k!=7\times 6\times 4=168$，非阶乘数.

所以 $n=1,2$. **姚博文**

解法三 引理：$n\geq 5$ 时，$\left(\dfrac{n(n-1)}{2}+1\right)!>(2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\cdots(2^n-2^{n-1})$.
当 $n=5$ 时，验证知成立.
设 $n=m\geq 5$ 时成立，考察 $n=m+1$. 只需证

$$\begin{aligned}\left(\frac{m(m-1)}{2}+2\right)\left(\frac{m(m-1)}{2}+3\right)\cdots\left(\frac{m(m+1)}{2}+1\right)&\geq\frac{(2^{m+1}-1)(2^{m+1}-2)(2^{m+1}-4)\cdots(2^{m+1}-2^m)}{(2^m-1)(2^m-2)(2^m-4)\cdots(2^m-2^{m-1})}\\&=2^m(2^{m+1}-1),\end{aligned}$$

而

$$\left(\frac{m(m-1)}{2}+2\right)\left(\frac{m(m-1)}{2}+3\right)\cdots\left(\frac{m(m+1)}{2}+1\right)\geq\left(\frac{m(m-1)}{2}+2\right)^m\geq 12^m>2^m(2^{m+1}-1),$$

故引理成立.
又由 $2^{1+2+\cdots+(n-1)}\mid k!$ 知

$$k>\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{k}{2^2}\right]+\cdots+\left[\frac{k}{2^t}\right]+\cdots\geq 1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

故 $n\leq 4$，验证知 $n=k=1;n=2,k=3$ 共两个解. **龚固**

解法四 我们先数等式中，2 的方幂数.

$$v_2((2^n-1)(2^n-2)(2^n-2^2)\cdots(2^n-2^{n-1}))=1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

另一方面，根据 Legendre 等式，

$$v_2(k!)=\sum_{j=1}^{+\infty}\left[\frac{k}{2^j}\right]<k(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots)=k.$$

我们再数等式两边的 3 的方幂数.
显然，$3\mid 2^x-1\Leftrightarrow 2|x$，根据 LTE 引理（升幂定理）：$v_3(4^x-1)=1+v_3(3)$.
鉴于 Legendre 等式的证明，我们注意到：

$$\begin{aligned}v_3((2^n-1)(2^n-2)(2^n-2^2)\cdots(2^n-2^{n-1}))&=v_3((2^n-1)(2^{n-1}-1)\cdots(2-1))\\&=\left[\frac{n}{2}\right]+v_3\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)\\&<\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots\right)\\&=\frac{3}{2}\left[\frac{n}{2}\right].\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$v_3(k!)\geq\left[\frac{k}{3}\right]>\frac{k}{3}-1.$$

于是，

$$\frac{k}{3}-1<\frac{3}{2}\left[\frac{n}{2}\right]\leq\frac{3}{4}n.$$

结合 $\dfrac{n(n-1)}{2}<k$ 知，$\dfrac{n(n-1)}{2}<k<\dfrac{9}{4}n+3$，所以 $2n^2-11n-12<0$，$1\leq n<6$.
逐步验证得 $(k,n)=(1,1),(3,2)$. **吴宇培**

5. 巴斯银行发行的硬币在一面上铸有 H，在另一面上铸有 T. 哈利有 n 枚这样的硬币并将这些硬币从左至右排成一行. 他反复地进行如下操作：如果恰有 k (>0) 枚硬币 H 面朝上，则他将从左至右的第 k 枚硬币翻转；如果所有硬币都是 T 面朝上，则停止操作. 例如：当 $n=3$，并且初始状态是 THT，则操作过程为 $THT \to HHT \to HTT \to TTT$，总共进行了三次操作后停止.

（a）证明：对每个初始状态，哈利总在有限次操作后停止.

（b）对每个初始状态 C，记 $L(C)$ 为哈利从初始状态 C 开始至停止操作时的操作次数，例如 $L(THT)=3$，$L(TTT)=0$. 求 C 取遍所有 2^n 个可能的初始状态时得到的 $L(C)$ 的平均值.

证法一 用 s_n,t_n 等表示一个一般的长为 n 的 H,T 序列，用 $H^m s_k T^n$ 类型的字符串表示 m 个 H，串接序列 s_k，接着串接 n 个 T 的序列，用 $s_n \to_a t_n$ 表示序列 s_n 经过 a 步操作到 t_n. 可以看出如下性质:

- $Hs_n \to_{L(s_n)} HT^n$，即每个 H 开始的序列的操作过程与去掉这个 H 的序列的操作过程对应相同，再加上一步操作可以停止.
- $Ts_nHT^m \to_{L(s_n)} T^{n+1}HT^m$.
- $T^{n+1}HT^m \to HT^nHT^m \to H^2T^{n-1} \to HT^m \to \cdots \to H^{n+2}T^m \to H^{n+1}T^{m+1} \to H^nT^{m+2} \to \cdots \to T^{m+n+2}$，$L(T^{n+1}HT^m)=2n+3$.

设 L_n 表示长为 n 的序列操作次数的均值，则 $L_0=0, L_1=\dfrac{1}{2}$，

$$L_n=\frac{1}{2}(L_{n-1}+1)+\sum_{i=0}^{n-2}(2^iL_i+2i+3)2^{-n},$$

解得 $L_{n+1}=L_n+\dfrac{n+1}{2}$，$L_n=\dfrac{n(n+1)}{4}$.

每个初始状态有限步停止在上面的证明中也是显然的. **罗 炜**

证法二 记 A_n 为所求平均值，这样 $A_0=0$，$A_1=\dfrac{1}{2}$，$A_2=\dfrac{3}{2}$.

1. 末尾为 T 的序列有 2^{n-1} 个. 由于末尾的 T 既不会被翻面，也不会影响前面的 $n-1$ 个的翻面，所以这 2^{n-1} 个的平均值为 A_{n-1}.

2. 全部为 H 的序列有 1 个，需要 n 次操作.

3. 末尾为 H，首个 T 在第 k 位的序列（也就是开头有 $k-1$ 个 H）有 2^{n-k-1} 个，形如 $HHH\dots HT*{*}{*}{*}H$，其中有 $n-k-1$ 个 "$*$"（称为红色硬币）. 注意到，除非红色硬币全部为 T（此时会翻面第 k 位的 T），否则不会操作任何非红色硬币，而红色硬币中有 j 个 H 时，翻面的硬币是第 $k+j$ 位，正好是在红色硬币中从左往右数第 j 位. 所以这些红色硬币变为全 T 向上，需要 A_{n-k-1} 次操作.

这样 $a_0=0$，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_2=\dfrac{3}{2}$，$a_3=\dfrac{6}{2}$.

$$a_n=\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{a_{n-2}+2n-1}{4}+\frac{a_{n-3}+2n-2}{8}+\cdots+\frac{a_2+n+3}{2^{n-2}}+\frac{a_1+n+2}{2^{n-1}}+\frac{a_0+n+1}{2^n}+\frac{n}{2^n}$$

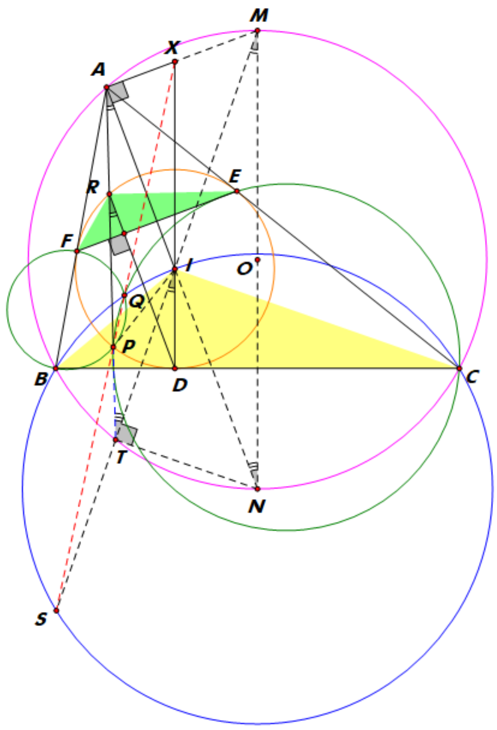
$$a_{n-1}=\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{a_{n-2}}{4}+\frac{a_{n-3}+2n-3}{8}+\cdots+\frac{a_2+n+2}{2^{n-2}}+\frac{a_1+n+1}{2^{n-1}}+\frac{a_0+n}{2^n}+\frac{n-1}{2^n}$$

$$a_n-a_{n-1}=\frac{2n-1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{2n+1}{2^n}-\frac{2n-1}{2^n}=\frac{2n-1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{n}{2},\ \forall\, n\geq 2.$$

所以 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{4}$. **姚博文**

6. 在锐角三角形 ABC 中，I 是内心，$AB \neq AC$. 三角形 ABC 的内切圆 ω 与边 BC, CA 和 AB 分别相切于点 D, E 和 F. 过点 D 且垂直于 EF 的直线与 ω 的另一点交点为 R. 直线 AR 与 ω 的另一交点为 P. 三角形 PCE 和三角形 PBF 的外接圆交于另一点 Q. 证明：直线 DI 和 PQ 的交点在过点 A 且垂直于 AI 的直线上.

证法一 设 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，AI 交 $\odot O$ 于 N，则 N 是弧 $\overparen{BC}$ 的中点，又设 M 是弧 $\overparen{BAC}$ 的中点，则 M, O, N 共线，且 $\angle MAI = 90°$.



设 DI, MA 交于 X，只需证 X, P, Q 共线.

由于

$$\angle BQP + \angle CQP = \angle BFP + \angle CEP = \angle PEF + \angle PFE = 180° - \angle EPF$$
$$= 180° - \angle AEF = 90° + A/2 = \angle BIC$$

故 B, C, I, Q 四点共圆.

由于 $NI = NB = NC$，记该圆为 $\odot N$.

设 MI 再次交 $\odot O$ 于 T.

注意到 $\triangle RFE \sim \triangle IBC$，故 $\triangle AFE\&R \sim \triangle MBC\&I$.

由于 $\angle BAR = \angle FAR = \angle BMI = \angle BMT = \angle BAT$，故 A, R, T 共线.

设 MI 再次交 $\odot N$ 于 S，由于 $\angle MTN = 90°$，故 $ST = TI$.

由于 $\triangle AFE\&R\&P\&I \sim \triangle MBC\&I\&S\&N$，故 $\dfrac{PA}{MS} = \dfrac{AI}{MN}$.

由于 $\angle PID = 2\angle PRD = 2\angle TAN = 2\angle TMN = 2\angle TID$，故 $\angle TIP = \angle TID = \angle NMI$.

又由于 $\angle ITP = \angle MTA = \angle MNA = \angle MNI$，故 $\triangle TIP \sim \triangle NMI$，进而知 $\dfrac{TP}{TI} = \dfrac{NI}{NM}$.

于是

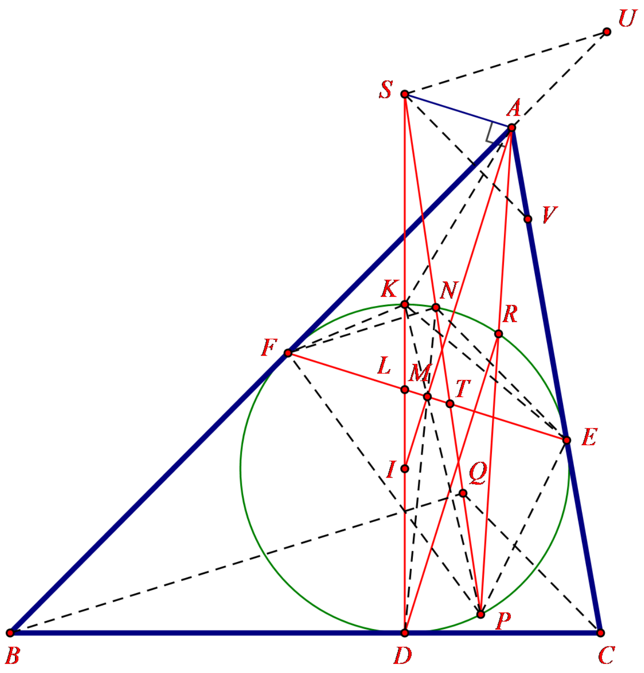
$$\frac{AX}{XM} \cdot \frac{MS}{ST} \cdot \frac{TP}{PA} = \frac{AI}{IN} \cdot \frac{TP}{TI} \cdot \frac{MN}{AI} = \frac{TP \cdot MN}{IN \cdot TI} = 1,$$

进而对于 $\triangle AMT$，由梅涅劳斯定理知 X, P, S 共线.

由于 $\angle BQP = \angle BFP = \angle FEP = \angle BCS = \angle BQS$，故 Q, P, S 共线.

综上知 X, P, S, Q 共线，即命题得证. **曹珏赟**

证法二 过 A 作 AI 垂线交 DI 延长线于 S,



设 PS 交圆 I 于 N、EF 于 T，设 EF 中点为 M，DS 交圆 I 于 K，交 EF 于 L.

由 $\angle DRP = \angle IAR = \angle IAK = \angle IKM$ 知 K、M、P 三点共线.

由 S、M 共轭知 D、M、N 三点共线.

由蝴蝶定理知 $ML = MT$.

过 S 分别作 NF、NE 的平行线，交 AB、AC 于 U、V,

$$\begin{aligned}\frac{FU}{EV} &= \frac{S_{\triangle NFU}}{S_{\triangle NEV}} \cdot \frac{NE^2}{NF^2} = \frac{S_{\triangle NFS}}{S_{\triangle NES}} \cdot \frac{DF^2}{DE^2} = \frac{FT}{ET} \cdot \frac{DF^2}{DE^2} \\ &= \frac{EL}{FL} \cdot \frac{DF^2}{DE^2} = \frac{DF}{DE} \cdot \frac{\sin\angle LDE}{\sin\angle LDF} = \frac{DF}{DE} \cdot \frac{\sin\angle ICE}{\sin\angle IBF} = \frac{BF}{CE}\end{aligned}$$

故

$$\frac{FU}{BF} = \frac{EV}{CE}.$$

过 B 作 FN 的平行线交 PS 于 Q，则

$$\frac{SN}{NQ} = \frac{FU}{BF} = \frac{EV}{CE},$$

故 $CQ \parallel NE$，故 $\angle BQP = \angle FNP = \angle BFP$, $\angle CQP = \angle ENP = \angle CEP$.

故 Q 为 $\odot(PBF)$ 与 $\odot(PCE)$ 的交点，证毕. **刘小平**

有没有人和你说过一句话，你学数学、数学竞赛的样子真的好帅，

没有？那现在，就在前一秒，我对你说了。

—来自最爱你的小数君

傻子俱乐部等着你来！（微信公众号，数学竞赛的那些事儿，shuxuejingsai001）