

不等式

G. H. 哈代

J. E. 李特伍德

G. 波利亚

科学出版社

不 等 式

G. H. 哈 代
J. E. 李 特 伍 德 著
G. 波 利 亚

越 民 义 译

科 学 出 版 社

1 9 6 5

G. H. Hardy J. E. Littlewood G. Pólya

INEQUALITIES

Cambridge University Press

2nd Edition 1952

內 容 簡 介

本书的第一部分詳尽地討論了一些分析中常用的简单不等式,其中算术平均和几何平均定理、Hölder 不等式和 Minkowski 不等式是基本的. 这三个定理构成前面六章的主题. 其余部分則是对前面各章作更系統的研究,可作为某些近代研究領域的一个导引.

不 等 式

[英] G. H. 哈代等著

越 民 义 譯

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳門内大街 117 号

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店經售

*

1965 年 3 月第 一 版 开本: 850 × 1168 1/32

1965 年 3 月第一次印刷 印张: 11 9/16

精裝: 0001—3,300 插頁: 3

平裝: 0001—4,800 字数: 304,000

統一书号: 13031 · 2045

本社书号: 3141 · 13—1

定价: [科六] 精裝本 2.30 元
平裝本 1.80 元

第一版序言

这本书是在 1929 年就拟訂計劃而且着手写作的。我們原来的打算是把它列入“剑桥小丛书”，但随即就发觉，一本小丛书的篇幅对于我们的目的来说是太不够了。

我們写这本书的目的在导引的那一章已經解释得够多的，但在这里我們还要就历史方面和文献方面增加一点說明。象不等式这样的—一个科目，它在数学的各个方面皆要用到，但又还没有得到系統的发展，它的历史問題和文献問題は特別令人感到麻煩的。

要追尋一个大家所熟知的不等式的起源常常是很困难的，很可能它是在一篇关于几何或天文学方面的論文中作为一个輔助命題首先出現，但在出現的时候却往往沒有明白的表达出来；过了若干年之后，它又可能为几个不同的作者重新发现；但也許沒有一个可以过得去的叙述是十分完善的。我們几乎常常发现，即使对于那些最著名的不等式，也还是可以增添一点新的內容。

我們已經尽我們的力量做到精确可靠，并且尽可能給出所有的文献，但我們並沒有去做系統的文獻研究工作。当一个特殊的不等式按照习惯要冠上某一特定的数学家的名字时，我們仍然遵照一般慣例；我們仍旧称呼 Schwarz, Hölder 以及 Jensen 不等式等等，尽管这些不等式还可追溯到更早的年代；同时，我們也沒有把所有的小的增添——明白的列举出来，为了絕對的完善，这些小的增添是必要的。

我們从朋友們那里得到了大量的援助。G. A. Bliss, L. S. Bosanquet, R. Courant, B. Jessen, V. Levin, R. Rado, I. Schur, L. C. Young, A. Zygmund 諸先生或給以批評，或提供原始資料来幫助我們。Bosanquet 博士，Jessen 博士，Zygmund 教授皆閱讀了校样，并改正了若干不妥之处。特別，由于 Jessen 博士的建

議，第三章大大地改寫了一次，我們希望本書現在或可在相當程度上免于錯誤，尽管它包含了大量的細節。

Levin 博士編輯了文獻目錄，這目錄包含了我們在正文中直接或暗中引用到的全部書籍和論文，但它沒有越出這範圍之外。

G. H. 哈代

J. E. 李特伍德

G. 波利亞

1934 年 7 月于劍橋和蘇黎士

第二版序言

第一版的正文又重印一次，作了一些小的更動，并增加了三個附錄。

J. E. 李特伍德

G. 波利亞

1951 年 5 月于劍橋和史丹佛

目 录

第一章 导 论

1.1. 有限的、无限的、积分的不等式.....	1
1.2. 記 号.....	2
1.3. 正不等式.....	2
1.4. 齐次不等式.....	3
1.5. 代数不等式的公理基础.....	5
1.6. 可比較的函数.....	5
1.7. 証明的选择.....	6
1.8. 主题的选择.....	8

第二章 初等平均值

2.1. 常用平均.....	11
2.2. 加权平均.....	12
2.3. $M_r(a)$ 之极限情形.....	13
2.4. Cauchy 不等式	15
2.5. 算术平均和几何平均定理.....	16
2.6. 平均值定理的其他証明.....	18
2.7. Hölder 不等式及其推广.....	21
2.8. Hölder 不等式及其推广(續).....	24
2.9. 平均值 $M_r(a)$ 的一般性質	26
2.10. 和数 $S_r(a)$	28
2.11. Minkowski 不等式	30
2.12. Minkowski 不等式之一伴随不等式	33
2.13. 几个基本不等式的解說和应用.....	33

2.14. 几个基本不等式的归纳证明	38
2.15. 与定理 37 有关的初等不等式	40
2.16. 定理 3 的初等证明	43
2.17. Чебышев (Tchebychef) 不等式	44
2.18. Muirhead 定理	46
2.19. Muirhead 定理的证明	47
2.20. 一个另外的定理	50
2.21. 关于对称平均的其它定理	51
2.22. n 个正数之初等对称函数	53
2.23. 关于有定形式 (definite form) 的一点说明	57
2.24. 关于严格正型的一个定理	60

第三章 关于一个任意函数的平均, 凸函数论

3.1. 定 义	71
3.2. 等价平均	72
3.3. 平均 M_r 的一特征性质	74
3.4. 可比较性	76
3.5. 凸函数	76
3.6. 連續凸函数	77
3.7. 一个另外的定义	79
3.8. 諸基本不等式中的等号	80
3.9. 定理 85 的新的表达和推广	81
3.10. 两次可微的凸函数	82
3.11. 二次可微凸函数的性质之应用	84
3.12. 多变数凸函数	85
3.13. Hölder 不等式之推广	87
3.14. 关于单调函数的一些定理	89
3.15. 具有任意函数的和数: Jensen 不等式的推广	91
3.16. Minkowski 不等式的推广	92
3.17. 集合的比较	95

3.18. 凸函数的其他的普遍性質.....	98
3.19. 連續凸函数的其他性質.....	101
3.20. 不連續凸函数.....	103

第四章 微积分学的若干应用

4.1. 导 引.....	111
4.2. 中值定理的应用.....	111
4.3. 初等微分学的进一步应用.....	113
4.4. 单变数函数的极大和极小.....	116
4.5. Taylor 級数的使用.....	117
4.6. 多变函数的极大极小理論的应用.....	117
4.7. 級数与积分的比較.....	119
4.8. Young 的一个不等式.....	121

第五章 无穷級数

5.1. 导 引.....	124
5.2. 平均值 M_r	126
5.3. 定理 3 和定理 9 的推广.....	129
5.4. Hölder 不等式及其推广.....	130
5.5. 平均值 M_r (續).....	132
5.6. 和数 S_r	132
5.7. Minkowski 不等式.....	133
5.8. Чебышев (Tchebychef) 不等式.....	134
5.9. 摘 要.....	134

第六章 积 分

6.1. Lebesgue 积分方面的一些准备知識.....	138
6.2. 关于零集和零函数的說明.....	140
6.3. 有关积分之进一步說明.....	141
6.4. 关于証法的說明.....	143

6.5. 关于方法的进一步说明: Schwarz 不等式	145
6.6. 当 $r \neq 0$ 时平均值 $\mathfrak{M}_r(f)$ 的定义	147
6.7. 一函数的几何平均	149
6.8. 几何平均的其它性质	152
6.9. 关于积分的 Hölder 不等式	153
6.10. 平均 $\mathfrak{M}_r(f)$ 的一般性质	157
6.11. 平均 $\mathfrak{M}_r(f)$ 的一般性质(續)	158
6.12. $\log \mathfrak{M}_r$ 之凸性	160
6.13. 关于积分的 Minkowski 不等式	160
6.14. 与一任意函数有关的平均值	166
6.15. Stieltjes 积分的定义	169
6.16. Stieltjes 积分的特别情形	170
6.17. 前面一些定理的推广	171
6.18. 平均 $\mathfrak{M}_r(f; \phi)$	172
6.19. 分布函数	174
6.20. 平均值的特征化	175
6.21. 关于特征性质的说明	176
6.22. 完成定理 215 的证明	178

第七章 变分法的一些应用

7.1. 一些一般性的说明	193
7.2. 这一章的目的	195
7.3. 一个与一不可达到的极值相应的不等式的例子	196
7.4. 定理 254 的第一证明	197
7.5. 定理 254 的第二证明	200
7.6. 用来阐明变分法的其它例子	203
7.7. 另外的例子: Wirtinger 不等式	206
7.8. 包含二次导数的一个例子	209
7.9. 一个较简单的定理	215

第八章 有关双綫性形式和多綫性形式的一些定理

8.1. 导 引.....	220
8.2. 具有正变数和正系数的多綫性形式不等式.....	220
8.3. W. H. Young 之一定理.....	223
8.4. 推广和类似情形.....	225
8.5. 在 Fourier 級数中的应用.....	227
8.6. 关于多綫性形式的凸性定理.....	229
8.7. 一般的双綫性形式.....	230
8.8. 有界双綫性形式的定义.....	232
8.9. $[p, q]$ 中有界形式的一些性質.....	234
8.10. $[p, p']$ 中两个形式的卷积 (Convolution, Faltung)	236
8.11. 关于 $[2, 2]$ 中形式的一些特有定理.....	237
8.12. 应用于 Hilbert 形式	239
8.13. 关于具有复变数和系数的双綫性形式的凸性定理.....	241
8.14. 最大組 (x, y) 的另外的性質.....	243
8.15. 定理 295 的証明.....	244
8.16. M. Riesz 定理的应用.....	246
8.17. 在 Fourier 綫数上的应用	248

第九章 Hilbert 不等式及其类似情形和推广

9.1. Hilbert 二重級数定理.....	255
9.2. 一类广泛的双綫性形式.....	256
9.3. 关于积分的相应定理.....	259
9.4. 定理 318 和定理 319 的推广.....	260
9.5. 可能最好的常数: 定理 317 的証明.....	262
9.6. 关于 Hilbert 定理的进一步說明	263
9.7. Hilbert 定理的应用.....	266
9.8. Hardy 不等式.....	269
9.9. 另外的积分不等式.....	274

9.10. 关于级数的另外的定理.....	277
9.11. 从关于积分的定理推出关于级数的定理.....	278
9.12. Carleman 不等式.....	280
9.13. 当 $0 < p < 1$ 时的定理.....	281
9.14. 具有两个参数 p 和 q 的一个定理.....	284

第 十 章 重 新 排 列

10.1. 有限变数组的重新排列.....	293
10.2. 有关两个集的重新排列的一个定理.....	294
10.3. 定理 368 的第二个证明.....	295
10.4. 定理 368 的改写.....	297
10.5. 有关三个集的重新排列定理.....	298
10.6. 将定理 373 化为一特殊情形.....	299
10.7. 证明的完成.....	301
10.8. 定理 371 的另一证明.....	303
10.9. 任意多个集的重新排列.....	306
10.10. 关于任意多个集的重新排列的另一定理.....	308
10.11. 应 用.....	310
10.12. 一函数的重新排列.....	310
10.13. 关于二函数的重新排列.....	312
10.14. 关于三个函数的重新排列.....	313
10.15. 定理 379 的证明的完成.....	315
10.16. 一个另外的证明.....	319
10.17. 应 用.....	322
10.18. 另外一个关于将一函数按降序重新排列的定理.....	325
10.19. 定理 384 的证明.....	327
附录 I. 关于严格正形式.....	337
附录 II. Thorin 关于定理 295 的证明及推广.....	342
附录 III. 关于 Hilbert 不等式	345
参考文献.....	347

第一章 导 論

1.1. 有限的、无限的、积分的不等式. 这一章是一些一般性的注释, 我們最好是选取一个特殊而又典型的不等式来作为說明这些注释的題材; 于是, 我們就选取了 Cauchy 的一个重要定理, 即通常名之为“Cauchy 不等式”的.

“Cauchy 不等式”(定理 7) 为

$$\begin{aligned} & (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \\ & \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \quad (1.1.1) \end{aligned}$$

或

$$\left(\sum_1^n a_\nu b_\nu \right)^2 \leq \sum_1^n a_\nu^2 \sum_1^n b_\nu^2. \quad (1.1.2)$$

它对于任何实数值 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 皆成立. 我們称 $a_1, \cdots, b_1, \cdots$ 为这不等式的变数. 在这里, 变数的数目是有限的, 而此不等式則表达了某些有限和之間的关系. 我們称这种不等式为初等不等式或有限不等式.

最基本的不等式都是有限的, 但我們也要討論非有限的不等式以及包含和数概念的推广的不等式. 在这种推广之中, 最重要的是无限和

$$\sum_1^\infty a_\nu, \quad \sum_{-\infty}^\infty a_\nu \quad (1.1.3)$$

和积分

$$\int_a^b f(x) dx \quad (1.1.4)$$

(其中 a, b 可以是有限的或无限的). 与这些推广相对应的类似 (1.1.2) 的不等式是

$$\left(\sum_1^\infty a_\nu b_\nu \right)^2 \leq \sum_1^\infty a_\nu^2 \sum_1^\infty b_\nu^2 \quad (1.1.5)$$

(或求和范围两边皆为无限的类似不等式), 和

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx. \quad (1.1.6)$$

我們称(1.1.5)为无限不等式, (1.1.6)为积分不等式.

1.2. 記号. 我們常常要把不同的变数組加以区分. 例如在(1.1.2)中我們就把 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 这两組区别开来. 我們最好是有一个簡短的記号来表示变数組, 于是, 我們就把“組 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ”写成“組 (a) ”或簡直就写“諸 a ”. 在不致引起誤解的情况下, 我們將习惯地把求和記号中的附标和上下限省去. 于是, 我們就把

$$\sum_1^n a_\nu, \quad \sum_1^\infty a_\nu, \quad \sum_{-\infty}^\infty a_\nu$$

写成

$$\sum a.$$

因而, 比如說,

$$(\sum ab)^2 \leq \sum a^2 \sum b^2 \quad (1.2.1)$$

依照上下文含意的不同可以指的是(1.1.2)或(1.1.5).

在积分不等式中, 組則由一个函数来代替; 在从(1.1.2)过渡到(1.1.6)时, (a) 和 (b) 就由 f 和 g 来代替. 在积分中, 我們也常常把变数和上下限略去, 我們把(1.1.4)写成

$$\int f dx,$$

因而, 比如說, (1.1.6)就写成了

$$\left(\int fg dx \right)^2 \leq \int f^2 dx \int g^2 dx. \quad (1.2.2)$$

無論是在和数中或在积分中, 变数的变程皆在各章或各节之首預加說明, 或在課文中明确表出¹⁾.

1.3. 正不等式. 我們主要是討論“正”不等式. 若在一有限或无限的不等式中所含的全部变数 $a, b, \dots$ 皆为非負实数, 則称

1) 这也有例外, 比如在 §§ 8.8—8.17 中. 該处所討論的定理的“正的”情形是相当淺显的.

該不等式為正的。這類不等式通常都帶着一個顯然是比較廣泛的、對於所有的實數、甚至複數 $a, b, \dots$ 皆成立的不等式作為它的簡單推論。例如由(1.1.2)和對於任何實數和複數皆成立的不等式

$$|\sum u| \leq \sum |u|, \quad (1.3.1)$$

我們就推出

$$|\sum ab|^2 \leq (\sum |a| |b|)^2 \leq \sum |a|^2 \sum |b|^2, \quad (1.3.2)$$

在這裡，諸 a 和諸 b 是任意的複數。

我們經常只將我們的定理表達成基本的“正的”形式就算夠了，而把那些派生的結果留給讀者。但若所討論的不等式非常重要，我們有時也把它明確的表成最一般的形式。

類似的注釋對於積分不等式也適用。獨立變數 x 是實變數，但（如同求和變數 v 一樣）可以取正值或負值；而函數 $f(x), g(x), \dots$ 一般都只取非負值。對於象(1.1.6)這樣的一個不等式，它對非負的 f, g 皆成立，相應的就有更一般的不等式

$$\left| \int fg dx \right|^2 \leq \int |f|^2 dx \int |g|^2 dx, \quad (1.3.3)$$

它對於實變數 x 的任意複函數 f, g 皆成立。

作為指標在我們定理中出現的數 $k, l, r, s, \dots$ 皆是實的，但一般可取正負號。

1.4. 齊次不等式。 (1.1.2)的兩邊是諸 a 的二次齊次函數，對諸 b 亦然；一般說來，我們的不等式的兩邊都是某些變數組的同次齊次函數。因為當正方次的齊次函數的所有變量皆為 0 時，此函數為 0，故不等式的兩邊，若系正方次的話，當所涉及的變數組全為 0 時皆為 0，因而相等。故(1.1.2)的兩邊當所有的 a 或所有的 b 為 0 時化為等式。

全由 0 所組成的集稱為零集。一般說來，若我們定理中所包含的變數組有一組或所有的組為 0 時，定理中的“ $\leq$ ”或“ $\geq$ ”即化為“ $=$ ”。有時，等號就只在此種情形出現。比較常見的則是還在別的機會出現；例如在(1.1.2)中若每一 a 皆等於相應的 b ，則

“=”即显然出現，只要可能，我們將仔細地把等号出現的情形弄清楚。

一个不等式在某些变数組方面的齐次性，常常使我們可以对这些变数加上另外的限制(正規化)而使我們的証明簡化。例如，§ 2.2 中的平均值 $\mathfrak{M}_r(a)$ 对权 p 是齐次的，次数为 0。于是，若是愿意，我們总可以假定 $\sum p = 1$ 。再有，假若我們希望証明当 $0 < r < s$ 时，有

$$(a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r)^{1/s} \leq (a_1^s + a_2^s + \cdots + a_n^s)^{1/r} \quad (1.4.1)$$

(定理 19)，我們可以假定 $\sum a^r = 1$ (因两边皆为 a 的一次齐次式)。这样一来，我們就有

$$a_v^r \leq 1, \quad a_v^s = (a_v^r)^{s/r} \leq a_v^r,$$

因而 $\sum a^s \leq \sum a^r = 1$ 。不經過这种准备性質的正規化，我們的証明就要是

$$\begin{aligned} \frac{(\sum a^s)^{1/s}}{(\sum a^r)^{1/r}} &= \left(\sum \frac{a^s}{(\sum a^r)^{s/r}} \right)^{1/s} \\ &= \left\{ \sum \left(\frac{a^r}{\sum a^r} \right)^{s/r} \right\}^{1/s} \leq \left(\sum \frac{a^r}{\sum a^r} \right)^{1/s} = 1. \end{aligned}$$

还有另外一种意义的“齐次性”，它有时很重要。我們現將 (1.4.1) 和 (1.1.2) 加以比較。(1.4.1) 可以写成

$$(\sum a^s)^{1/s} \leq (\sum a^r)^{1/r}. \quad (1.4.2)$$

上式两边关于变数皆为齐次，但 (1.1.2) 有另外一种齐次性是 (1.4.2) 所沒有的。我們可以称之为“关于 Σ 为齐次”；若将 Σ 作为一个数看待，則它在該不等式的两边以同样的方次出現。

这种关于 Σ 的齐次性的意义在于：若将 (1.1.2) 中所出現的每一和数都以相应的平均值代替，即若把它写成

$$\left(\frac{1}{n} \sum ab \right)^2 \leq \left(\frac{1}{n} \sum a^2 \right) \left(\frac{1}{n} \sum b^2 \right),$$

則不等式仍成立。这种齐次性的重要性在 § 2.10 和 § 6.4 中将会变得很清楚。粗略說来，具有这一性質的不等式总有一个相似的积分不等式，当沒有这一性質时，例如 (1.4.2)，則沒有相似的

积分不等式.

1.5. 代数不等式的公理基础. 我們的主題是很难确切规定的,但它部分属于“代数”,部分則属于“分析”.代数和 $\cdot$ 分析,正如同几何一样,可从公理出发来处理.我們不象(例如)在 Dedekind 的实数理論中那样,說我們是在討論某种某种确定的对象,而是象在射影几何中那样,說我們是在討論具有由一組公理所界定的某些性質的任何一組对象.我們不打算詳細地考虑我們主題中各个部分的“公理学”,但对于象(1.1.2)这样的定理,以及第二章中的大部分定理,它們真正是属于代数的,却值得在它們的公理基础方面說几句.

我們可以只取尋常的加法和乘法公理来作为代数的公理.于是,所有我們的定理在許多不同的域中,在实代数中,在复代数中,或在关于任意模的剩余的算术中,皆成立.或者,我們可以加上有关綫性方程組可解的公理,保証差与商的唯一性和存在性的公理,这时我們的定理就将在实代数和复代数中,或在关于素数模的算术中皆成立.

在我們現在的主題中,我們所涉及的是一些不等的关系,这是实代数所特有的一个概念.为要給有关不等式的定理奠定一个公理基础,我們除了已經說过的公理和“未定义物”之外,現再增加一个新的未定义物和两个新的公理.我們取正数这一概念作为未定义物,又取下列两个命題作为公理:

I. 或 a 为 0, 或 a 为正, 或 $-a$ 为正, 而这些可能性是相互排斥的;

II. 二正数之和与积仍为正数.

若 $-a$ 为正,則称 a 为負;若 $a - b$ 为正(負),則称 a 大于(小于) b . 任何一个代数不等式,例如(1.1.2)那样,皆可依据这一基础作出.

1.6. 可比較的函数. 对于函数

$$f(a) = f(a_1, a_2, \cdots, a_n), \quad g(a) = g(a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

若在它們之間存在一个对所有非負实数组 a 皆成立的不等式,就

是說,或 $f \leq g$ 对所有此种 a 皆成立,或 $f \geq g$ 对所有此种 a 皆成立,則称此 f 和 g 为可比較的. 两个給定的函数并不常常都是可比較的. 例如两个不同次数的正齐次多項式就必然是不可比較的¹⁾; 若 $0 \leq f \leq g$ 对所有非負的 a 皆成立,且两边皆为齐次的,則 f 和 g 必为同次.

这一定义自然可推广到多个变数组的函数 $f(a, b, \dots)$ 上去.

整个这本书都是討論函数的可比較性問題的. 例如諸 a 的算术平均和几何平均是可比較的: $\mathfrak{G}(a) \leq \mathfrak{U}(a)$ (定理 9). 函数 $\mathfrak{G}(a+b)$ 和 $\mathfrak{G}(a) + \mathfrak{G}(b)$ 是可比較的(定理 10). 函数 $\mathfrak{U}(ab)$ 和 $\mathfrak{U}(a)\mathfrak{U}(b)$ 是不可比較的;它們相对的大小取决于諸 a 和諸 b 的大小关系(定理 43). 函数

$$\psi^{-1}(\sum p\psi(a)), \quad \chi^{-1}(\sum p\chi(a))$$

为可比較的充要条件是 $\chi\psi^{-1}$ 为凸的或凹的(定理 85).

討論形如

$$\sum a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n}$$

的两个函数的可比較性的一个重要定理将在 § 2.18 中找到,它是由 Muirhead 得出的.

1.7. 証明的选择. 本书中各个部分所使用的証明方法依靠了一些属于非常不同范畴的想法. 对于同一个定理,我們常常給出几个不同的証明,特別在第二章中是如此. 在这里,注意一下我們所使用的方法之間某些基本差別,对我們不无帮助.

首先,第二章中許多的証明都是“严格初等的”,因为它們只依靠有限代数中的一些观念和办法. 作为我們的一个原則,凡是真正重要的定理,我們都尽量給出一个这样的証明,只要它的性質允許这样做.

其次,我們还有(即使在第二章中)許多証明,它們在此种意义上不是初等的,因为其中包含了极限和連續的考虑. 我們也还有

1) 比較 § 2.19.

(特別是在第五章中)一些証明, 它們依靠了微系数的一些标准性質, 比如說, 依靠了 Rolle 定理. 所有这些証明都属于初等单实变函数論的范围.

最后, 当在第六章中处理积分时, 我們自然要利用測度論和 Lebesgue 的积分論. 我們把这認为是讀者已知的. 但在 §§ 6.1—6.3 中, 我們將給出所要用到的这一理論的有关部分的一个摘要.

有时我們也求助于实变函数論中比較深奥的部分; 但我們只是在另外一种証法中, 或是在那些本質上就相当困难的定理的証明中才这样做. 例如在第四章中 (§ 4.6), 我們利用了多元函数的极大和极小理論; 在第七章中, 我們利用变分法中的方法; 在第九章中, 我們利用了重积分的理論. 我們沒有用到复变函数論, 虽然在最后几章中, 为了說明問題, 我們偶然也引到它. 引用到它的那些节并不真正属于本书的主体.

我們再加上一些更帶有細节性質的說明.

(i) 按照 § 1.5 中的定义, Cauchy 不等式 (1.1.2) 是有限代数中的一个命題. 依照一般公認的原則, 这样的—个定理只应当用它所从屬的理論中的方法来証明.

(ii) 我們將不断遇到象 Hölder 不等式

$$\sum ab \leq (\sum a^k)^{1/k} (\sum b^{k'})^{1/k'} \quad (1.7.1)$$

(定理 13) 这一类的定理, 它的性質与一个参数 k 的值有关. 若 k 为一有理数, 則此定理为代数的, 因而在 (i) 中的說明适用. 若 k 为无理数, a^k 就不是一个代数函数, 因此就很明显, 不可能有一个严格代数上的証明.

當我們在处理一个象 Hölder 不等式这样重要的不等式时, 希望把超出代数范围的措施降到問題的性質所必需的最低限度, 这样的要求無論如何是合理的. 显而易見, 这种措施将取决于我們对 a^k 所下的定义. 我們可以把 a^k 定义为 $\exp(k \log a)$, 在这种情形, 要用到指数函数和对数函数的理論显然是合法而且必要的. 假若我們象通常那样, 把 a^k 定义作 a^{k_n} 的极限, 其中 k_n 为趋近于 k 的适当的有理数, 則此极限手續就应当是我們所求助的唯—手

續。

(iii) 假如說，在采用最后一种观点时，我們已經对于有理的 k 証明了形如(1.7.1)的 Hölder 不等式，則經過取极限，我們就可推出它对于无理的 k 也成立。

但这样的一个証明常常不能滿足我們的要求。我們总是希望証明一个在形式上比(1.7.1)更为精确的定理，在該定理(例如定理 13)中，我們除了某些已經指明的特殊情形之外，建立了一个严格的不等式。当我們取极限时，“ $<$ ”就变成了“ $\leq$ ”，这样，我們就失去討論等号何时成立的机会（虽然事实上这和有理的情形是一样的），因而我們的証明就有欠缺。因此，就有必要把我們的証明安排得尽可能避免此种取极限的过程。当我們希望从有限不等式过渡到相应的无限不等式或积分不等式时，也出現同样的困难。这种情况在本书內将处处碰到，它常常決定我們如何去选择一个特殊的証明途径。

(iv) 指導我們去选择証明方法的一般原則如下。当一个定理是既簡單而又基本时，比如定理 7, 9, 11 那样，我們就用几种不同的方法去証明它，同时注意在这些証明中至少有一个符合于我們在(i)和(ii)中立下的規則。当这定理比較次要或者很难，或者一个滿足这些条件的証明必然是冗长而麻煩时，我們就选用一个看来是最簡單或最有益的証明。

1.8. 主題的选择。 指導我們去选择主題的原則可以摘要如下：

(i) 本书的第一部分(第二章到第六章¹⁾)系統地討論了一个确定的主題。我們的目的是要詳尽的討論一些在分析中“日常用到的”簡單不等式(包括与它們类似的不等式和推广)。其中有三个是基本的，即

- (1) 算术平均和几何平均的定理(定理 9)；
- (2) Hölder 不等式(定理 11)；

1) 或許除去第四章中的某些部分。

(3) Minkowski 不等式(定理 24);

而这三个定理就控制了前面六章。我們从許多不同的途径来証明它們。第二章是处理有限的情形；第五章是处理无限的情形；第六章是处理积分的情形；而第三章(它包含凸函数論的一个普通介紹)主要則是它們的推广。在这些章里面，其中最重要的是第二、三、六这三章，我們的目的是作一个概括的而在某些方面又是詳尽无余的討論。

(ii) 本书的其余部分(第七—十章)是以另外一种精神写成的，因而必須以另外一种标准来衡量。这几章包含一系列的論述，它們的主題是由于要对前面各章作更系統的研究而提出的。我們並沒有希图把它們做到严整和完善。它們只是打算作为某些近代研究領域的一个导引，而我們也就随个人的兴趣去选择我們的論題。

尽管如此(或者說因此之故)，这几章还是有一定的統一性。在实变或复变函数論中，在富氏 (Fourier) 級数論中，或是在正交展开的一般理論中，都存在着大量的近代工作，其中“Lebesgue L^k 类”皆提有中心地位。这类工作要求相当熟練的不等式的技巧；Hölder 不等式和 Minkowski 不等式以及其它具有同样通用性質的比較近代和比較巧妙的不等式到处都要用到。我們的目的就是要为这一門分析写这样的一个导引，使得它可以被認為是前面各章主要内容的一个自然的延續和发展。

(iii) 我們的兴趣主要是在实分析的某些部分方面，而不是在算术或代数本身。代数和分析之間的界綫常常难以划分清楚，尤其是在二次型和双一次型的理論中是如此。因此在取舍之間我們常常就很犹豫。但我們总是把所有在我們看来它的主要兴趣是在代数方面的那些材料都舍弃掉。

我們也排除了函数論本身，不管是实的还是复的。但在最后一章，有时也刻划出我們的定理用于函数論方面的一些綫条，试图用來說明它們的意义。

由是(比如說)，在我們的計劃中就不包括：

(1) 肯定是算术性质的不等式,例如素数論中的不等式,或者是給出整变数形的界的不等式;

(2) 真正属于二次型代数理論中的不等式;

(3) 属于正交級数理論中的不等式,例如“Bessel 不等式”;

(4) 属于函数論本身的不等式,例如“Hadamard 三圓定理”。同时,我們也沒有对几何不等式作系統的討論,虽然常常也利用它們來說明問題。

讀者当中,可能有些人是希望避免在細節方面多費精力的。对于这样一些讀者作几句忠告,这样来結束本章,可能不无用处。这一科目虽然很吸引人,但却要求我們,至少是要求讀者,要在細節方面多下工夫。这些細節特別发生于要把例外情形去掉,要把等号成立的情况完全指出来,以及关于零值和无穷值的考虑等。一般說来,我們剛才心目中的讀者可以如下来簡化他們的工作:

(1) 他可以不管非負和正之間的差別,因而他所涉及到的数和函数全都依狹义为正的;(2)他可以假定象 Hölder 和 Minkowski 等的不等式中的参数 k 或 r 都大于 1;(3)他可以忽略我們关于“无穷值”所作的約定;(4)他可以认为“对和数成立的东西,經過簡單的修改,对积分也成立”(或者反过来)这样的事实为理所当然。于是,他可以不太麻煩就掌握主要的东西。

这一“容易閱讀”的忠告一定不要太从字面上去了解。弄清楚出現的种种例外情形以及用以判別等号出現情形的一些普遍原則,是很主要的。要把象 Hölder 不等式这样的不等式中等号出現的情形弄清楚,并不只是一个学院式的練習;知道了这些情形就可以为发现深刻而重要的定理提供有力的武器(这在 §§ 8.13—8.16 中表現得很清楚)。每个讀者都应当把这不等式尽量探索到底作为他的任务。

第二章 初等平均值

2.1. 常用平均. 下面我們要討論到由 n 个非負数 a (或 $b, c, \dots$) 組成的序列, 設为

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, a_n \quad (a_v \geq 0), \quad (2.1.1)$$

和一实参数 r , 我們暫且假定它不为零.

我們用 (a) 表示有序数列(2.1.1). 當我們說“ (a) 与 (b) 成比例”时, 指的是存在两个不同时为 0 的数 λ 和 μ , 使得

$$\lambda a_v = \mu b_v (v = 1, 2, \dots, n). \quad (2.1.2)$$

我們可以看出, 零集, 即每一 a 皆为 0 之集 (a) , 与任何 (b) 皆成比例. 根据我們的定义, 比例性是集与集之間的一个对称关系, 但不是可传递的. 假若我們將零集除去不予考虑, 那它就变成可传递的了.

若 (a) 与 (b) 成比例, 且皆不为 0, 則当 $a_v = 0$ 时 $b_v = 0$; 对于其它的 v , a_v/b_v 与 v 无关.

我們令

$$\mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}_r(a) = \left(\frac{1}{n} \sum a_v^r \right)^{1/r} = \left(\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n a_v^r \right)^{1/r}, \quad (2.1.3)$$

但須除去下列两种情形: (i) $r = 0$, (ii) $r < 0$ 且諸 a 中有一个或几个为 0. 对于除外之情形(ii), 此时(2.1.3)无意义, 我們定义 $\mathfrak{M}_r$ 为 0, 有

$$\mathfrak{M}_r = 0 \quad (r < 0, \text{有某些 } a \text{ 为 } 0)^{1)} \quad (2.1.4)$$

今后我們將略去附标和求和記号之上下限, 只要这样做不致引起混殺.

特別, 我們写

1) 若我們容許无限值, 則对于正 r 还有一相应的情形, 即若 $r > 0$, 某些 a 为无穷, 則 $\mathfrak{M}_r = \infty$.

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(a) = \mathfrak{M}_1(a), \quad (2.1.5)$$

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(a) = \mathfrak{M}_{-1}(a). \quad (2.1.6)$$

最后,我們写

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(a) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \sqrt[n]{\Pi a}. \quad (2.1.7)$$

由是, $\mathfrak{A}(a)$, $\mathfrak{H}(a)$, $\mathfrak{G}(a)$ 分别为普通的算术平均, 調合平均和几何平均.

我們已将 $r = 0$ 这一情形除去, 但后面 (§ 2.3) 我們將看到, 我們可把 $\mathfrak{M}_0$ 按照慣例解释为 $\mathfrak{G}$. 一般說来, 我們并不考虑負 a , 但有时还是不在符号上作任何限制用起 $\mathfrak{A}(a)$ 来較為方便. 定义仍旧不变.

2.2. 加权平均. 我們常常还要处理一个更为广泛的平均值系統. 設

$$p_v > 0 \quad (v = 1, 2, \cdots, n), \quad (2.2.1)$$

并写

$$\mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}_r(a) = \mathfrak{M}_r(a, p) = \left(\frac{\sum p a^r}{\sum p} \right)^{1/r}, \quad (2.2.2)$$

$$\mathfrak{M}_r = 0 \quad (r < 0, \text{某些 } a \text{ 为 } 0), \quad (2.2.3)$$

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(a) = \mathfrak{G}(a, p) = (\Pi a^p)^{1/\sum p}. \quad (2.2.4)$$

方程(2.1.5)和(2.1.6)在增添符号 $\mathfrak{A}(a, p)$, $\mathfrak{H}(a, p)$ 之后仍旧有效. § 2.1 中最后所作的注释也适用于此推广了的 $\mathfrak{A}$. 当 $p_v = 1$ 对所有之 v 皆成立时, 加权平均即化为常用平均.

这些平均对 p 來說皆为 0 次, 而且是齐次的. 我們不妨假定 $\sum p = 1$. 此时, 我們將用 q 代 p , 由是

$$\mathfrak{M}_r(a) = \mathfrak{M}_r(a, q) = (\sum q a^r)^{1/r} \quad (\sum q = 1), \quad (2.2.5)$$

$$\mathfrak{G}(a) = \mathfrak{G}(a, q) = \Pi a^q \quad (\sum q = 1). \quad (2.2.6)$$

在我們的公式中, 我們將經常不明显地提到所加的权, 但我們总是作这样的了解: 若平均值之間相互作比較时, 則此諸平均值皆由同样的权所做成.

常用平均为加权平均之特殊情形. 另一方面, 具有可通約之权的加权平均乃是(由另一組 a 做成的)常用平均的特殊情形. 盖

由齐次性,我們可以假定所加之权为整数. 于是,在常用平均中将每一数代以一适当的由相同的数所成的组,则由此即可导出具有整数权的平均. 具有不可通约的权的平均可以认为是常用平均的极限情形.

下列显而易见的公式将反复用到:

$$\mathfrak{M}_r(a) = \{\mathfrak{A}(a^r)\}^{1/r}, \quad (2.2.7)$$

$$\mathfrak{G}(a) = e^{\mathfrak{H}(\log a)}, \quad (2.2.8)$$

$$\mathfrak{M}_{-r}(a) = \frac{1}{\mathfrak{M}_r(1/a)}, \quad (2.2.9)$$

$$\mathfrak{M}_{rr}(a) = \{\mathfrak{M}_r(a^r)\}^{1/r}. \quad (2.2.10)$$

我們假设(2.2.8)中之 $a > 0$. 在其他公式中若有一附标为负, 则也假定 $a > 0$. 在适当的規定之下, 这些公式也可推广到包括已经除外的情形. 又, 我們有

$$\mathfrak{A}(a+b) = \mathfrak{A}(a) + \mathfrak{A}(b), \quad (2.2.11)$$

$$\mathfrak{G}(ab) = \mathfrak{G}(a)\mathfrak{G}(b), \quad (2.2.12)$$

$$\mathfrak{M}_r(b) = k\mathfrak{M}_r(a), \quad \text{若 } (b) = k(a) \quad (2.2.13)$$

(即若 $b_v = ka_v$, 其中 k 与 v 无关),

$$\mathfrak{G}(b) = k\mathfrak{G}(a), \quad \text{若 } (b) = k(a), \quad (2.2.14)$$

$$\mathfrak{M}_r(a) \leq \mathfrak{M}_r(b), \quad \text{若 } a_v \leq b_v \text{ 对所有之 } v \text{ 成立.} \quad (2.2.15)$$

2.3. $\mathfrak{M}_r(a)$ 之极限情形. 我們用

$$\min a, \quad \max a$$

表示 a_v 的最小值和最大值.

1. $\min a < \mathfrak{M}_r(a) < \max a$, 除非所有的 a 皆相等, 或 $r < 0$ 且有一 a 为零.

在这里以及在以后所有定理的叙述中, 我們皆作这样的了解: 当我们說某不等式除了在某些条件得到满足的情况下皆成立时, 这就是說, 在該除外情形, 至少有一个不等式退化成为等式. 比如說, 在我們这里, 若所有的 a 皆相等, 則 $\min a = \mathfrak{M}_r(a) = \max a$, 而在另一个除外的情形, 則有 $\min a = \mathfrak{M}_r(a) \leq \max a$.

我們現就 q 做成我們的平均, 因

$$\sum q(a - \mathfrak{A}) = 0,$$

故或每一 a 皆等于 $\mathfrak{A}$, 或 $a - \mathfrak{A}$ 至少对一个 a 为正, 对另一 a 为负. 此即証明定理对 $r = 1$ 成立.

对于一般情形, 我們可假定或 $a > 0$, 或 $r > 0$, 因为对于其它情况, 定理是显然的. 于是

$$\{\mathfrak{M}_r(a)\}^r = \mathfrak{A}(a')$$

在 $(\min a)^r$ 和 $(\max a)^r$ 之間, 这就証明定理在一般情形成立.

2. 除非所有之 a 皆相等或有一 a 为 0, 否則总有 $\min a < \mathfrak{G}(a) < \max a$.

在第二种除外情形之中, 我們有 $\mathfrak{G} = 0$. 若 $\mathfrak{G} > 0$, 則

$$\Pi \left(\frac{a}{\mathfrak{G}} \right)^q = 1.$$

因之, 或每一 a 皆为 $\mathfrak{G}$, 或至少有一个大于 $\mathfrak{G}$ 而另一个小于 $\mathfrak{G}$.

$$3. \quad \lim_{r \rightarrow 0} \mathfrak{M}_r(a) = \mathfrak{G}(a).$$

若每一 a 皆为正, 則

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_r(a) &= \exp \left(\frac{1}{r} \log \sum q a^r \right) \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{r} \log (1 + r \sum q \log a + O(r^2)) \right\} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \exp(\sum q \log a) = \Pi a^q = \mathfrak{G}(a), \quad \text{当 } r \rightarrow 0.$$

若有某些 a 为 0, 令 b 表一为正之 a , s 为与 b 相对应之 q , 則当 $r \rightarrow +0$ 时,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_r(a, q) &= (\sum q a^r)^{1/r} = (\sum s b^r)^{1/r} \\ &= (\sum s)^{1/r} \mathfrak{M}_r(b, s) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

蓋因 $\mathfrak{M}_r(b, s) \rightarrow \mathfrak{G}(b, s)$ 且 $\sum s < 1$. 当 $r < 0$ 时, $\mathfrak{M}_r$ 与 $\mathfrak{G}$ 两者皆为 0, 故当 $r \rightarrow -0$ 时結果仍成立.

我們的証明所根据的是指数函数和对数函数的理論. 在 § 2.16 中我們將指出如何去做出一个比較初等的証明, 假如有此需要的話.

$$4. \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \mathfrak{M}_r(a) = \max a, \quad \lim_{r \rightarrow -\infty} \mathfrak{M}_r(a) = \min a,$$

若 a_k 为最大之 a , 或为最大者之一, 且 $r > 0$, 則有

$$q_k^{1/r} a_k \leq \mathfrak{M}_r(a) \leq a_k;$$

由此立得第一等式. 若有某一 a 为 0, 則第二等式显然成立; 若不然, 則由 (2.2.9) 即可得出.

我們現在約定写

$$\mathfrak{M}_0(a) = \mathfrak{G}(a), \mathfrak{M}_\infty(a) = \max a, \mathfrak{M}_{-\infty}(a) = \min a. \quad (2.3.1)$$

在此規定之下, 我們有

5. $\mathfrak{M}_{-\infty}(a) < \mathfrak{M}_r(a) < \mathfrak{M}_\infty(a)$ 对所有有限之 r 成立, 除非所有之 a 皆相等, 或 $r \leq 0$ 且有一 a 为 0.

2.4. **Cauchy 不等式.** 下之定理虽然是定理 16 之一特殊情形, 但我們还是在这里証明它比較好些.

6. 若非所有之 a 皆相等, 則 $\mathfrak{M}_r(a) < \mathfrak{M}_{2r}(a) (r > 0)$.

此不等式即是

$$(\sum p a^r)^2 < \sum p \sum p a^{2r},$$

而此乃下述异常重要之定理之一特別情形.

7. $(\sum ab)^2 < \sum a^2 \sum b^2$, 除非 (a) 与 (b) 成比例¹⁾.

此乃由于

$$\sum a^2 \sum b^2 - (\sum ab)^2 = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} (a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu)^2.$$

另外一个証明如下. 对于二次形

$$\sum (xa + yb)^2 = x^2 \sum a^2 + 2xy \sum ab + y^2 \sum b^2,$$

若不存在不同时为 0 之 x, y , 使 $xa_\nu + yb_\nu = 0$ 对所有之 ν 皆成立. 0) 則此二次形对所有之 x, y 皆为正, 因而其判别式为負.

欲得定理 6, 只須取 $\sqrt{p}$ 和 $a' \sqrt{p}$ 分別代替 a 与 b .

定理 7 可推广如下:

$$8. \quad \begin{vmatrix} \sum a^2 & \sum ab & \cdots & \sum al \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum la & \sum lb & \cdots & \sum l^2 \end{vmatrix} > 0,$$

1) 此即平常所謂之 Cauchy 不等式: 參看 Cauchy [1, p. 373]. 与此相应的积分不等式(定理 181) 通常称为 Schwarz 不等式, 虽然似乎是 Буняковский 首先給出的: 參看 Buniakowsky [1, p. 4], Schwarz [2, p. 251].

除非集合 $(a), (b), \dots, (l)$ 为线性相关, 就是说, 除非有不全为 0 之数 $x, y, \dots, w$, 使 $xa_v + yb_v + \dots + wl_v = 0$ 对所有之 v 皆成立.

定理 7 的两个证明皆可推广去证明定理 8: 我们既可以把此行列式表成行列式之平方和, 也可以考虑 $x, y, \dots, w$ 之非负二次型

$$\sum (xa + yb + \dots + wl)^2.$$

我们不想详细讨论, 因为对于与行列式和二次型有关的不等式作任何系统的讨论, 皆会超出我们所规定的本书范围之外.

2.5. 算术平均和几何平均定理. 我们现在来讨论这一学科中的一个最著名的定理.

9. $\mathfrak{G}(a) < \mathfrak{A}(a)$, 除非所有之 a 皆相等.

所要证明之不等式可以写成下列两种形式之一:

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n} < \left(\frac{p_1 a_1 + \dots + p_n a_n}{p_1 + \dots + p_n} \right)^{p_1 + \dots + p_n}, \quad (2.5.1)$$

$$a_1^{q_1} a_2^{q_2} \dots a_n^{q_n} < \sum q a \quad (2.5.2)$$

(在这里, 仍有 $\sum q = 1$).

这定理很是重要, 因此我们打算给出几个具有不同程度的简单性和广泛性的证明. 其中有两个是在这一章给出的, 第一个完全是初等的, 第二个依赖于定理 3. 因此, 在现阶段它是依赖于指数函数和对数函数的理论的. 以后 (§ 2.16) 我们将指出, 这一证明也可以更加精确的符合于 § 1.7 中的原则.

(i)¹⁾ 若 $a_1 \neq a_2$, 我们有²⁾

$$a_1 a_2 = \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2} \right)^2 < \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2,$$

因而有

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 \left(\frac{a_3 + a_4}{2} \right)^2 \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \right)^4,$$

1) Cauchy [1, p. 375].

2) Euclid [1: II 5, V 25].

式中若非 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, 則不等号至少有一处成立. 重复此項論証 m 次, 若非所有之 a 皆相等, 則有

$$a_1 a_2 \cdots a_{2^m} < \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^m}}{2^m} \right)^{2^m}. \quad (2.5.3)$$

此即(2.5.1), 不过此时权皆为 1, n 为 2 之幂.

今設 n 为小于 2^m 之一数. 取

$$b_1 = a_1, b_2 = a_2, \cdots, b_n = a_n,$$

$$b_{n+1} = b_{n+2} = \cdots = b_{2^m} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \mathfrak{A},$$

并运用(2.5.3)于 b , 則得

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \cdots a_n \mathfrak{A}^{2^m - n} &< \left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{2^m}}{2^m} \right)^{2^m} \\ &= \left(\frac{n\mathfrak{A} + (2^m - n)\mathfrak{A}}{2^m} \right)^{2^m} = \mathfrak{A}^{2^m} \end{aligned}$$

或

$$a_1 a_2 \cdots a_n < \mathfrak{A}^n,$$

除非所有之 b (因而所有之 a) 皆相等. 此即具有单位权之(2.5.1). 若权是可通約的, 則利用 § 2.2 中所說之手續, 我們即得(2.5.1).

若权是不可通約的, 我們可代之以一組可通約的近似值, 然后对此近似权証明(2.5.1), 再取极限. 在此过程之中, “ $<$ ”变成了“ $\leq$ ”, 这样一来, 我們还未得到一个完全的証明. 我們可以完成这一証明如下: 写

$$q_v = q'_v + q''_v \quad (v = 1, 2, \cdots, n),$$

其中 $q'_v > 0$, $q''_v > 0$, 且 q'_v 为有理数. 于是

$$r' = \sum q'_v, \quad r'' = \sum q''_v$$

皆为有理数, 且 $r' + r'' = 1$. 我們已經証明(2.5.1)当諸 p 为有理数时对“ $<$ ”成立, 在任何情形对“ $\leq$ ”皆成立. 由是

$$\begin{aligned} \Pi a^{q'} &< \left(\frac{\sum q'_v a}{\sum q'_v} \right)^{\sum q'_v}, \quad \Pi a^{q''} \leq \left(\frac{\sum q''_v a}{\sum q''_v} \right)^{\sum q''_v}, \\ \Pi a^q &= \Pi a^{q'} \Pi a^{q''} < \left(\frac{1}{r'} \sum q'_v a \right)^{r'} \left(\frac{1}{r''} \sum q''_v a \right)^{r''} \\ &\leq \sum q'_v a + \sum q''_v a = \sum q_v a. \end{aligned}$$

完成这一証明的另一方法是由 R. E. A. C. Paley 向我們指出的。这是依据定理 6，由該定理和公式(2.2.10)，以及前面所証明的，有

$$\mathfrak{U}(a) = \mathfrak{M}_1(a) > \mathfrak{M}_{\frac{1}{2}}(a) = \mathfrak{M}_1^2(a^{\frac{1}{2}}) \geq \mathfrak{G}^2(a^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{G}(a).$$

(ii)¹⁾ 由定理 6 和定理 3，我們有

$$\mathfrak{U}(a) = \mathfrak{M}_1(a) > \mathfrak{M}_{\frac{1}{2}}(a) > \mathfrak{M}_{\frac{1}{4}}(a) > \cdots > \lim_{m \rightarrow \infty} \mathfrak{M}_{2^{-m}}(a) = \mathfrak{G}(a).$$

这一証明甚为簡練，但不如前一証明那样初等。可以看出，我們只用到定理 3 中 r 經過一特殊叙列 2^{-m} 趋于 0 这一特別情形。

2.6. 平均值定理的其他証明。 我們將在 §§ 2.14—2.15 以及 § 2.21 中重新回到定理 9。在这里，我們將对此定理之通常形式（即具有单位权之情形）的其他証明作一点說明。

(i)²⁾ 若諸 a 不全相等，令

$$a_1 = \min a < \max a = a_2.$$

若我們將 a_1 和 a_2 各代之以 $\frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ ， $\mathfrak{U}(a)$ 并不改变。但

1) Schlömilch^[1]。

2) 这一証明是本定理的一切証明中最为人所熟知的，是属于（就我們所能追查到的）Maclaurin^[2] 的。Maclaurin 以几何的語言叙述本定理如下：“若将綫段 AB 分成任意多个部分 AC, CD, DE, EB ，则所有这些部分之积当这些部分互為相等时取极大”。他的証明主要就是我們正文中所說的。这一証明曾为許多后来的学者重新发现，例如 Grebe^[3]，Chrystal（見 [1]，p. 47）。

Cauchy 的証明 (§ 2.5) 可以认为是 Maclaurin 証明的一个比較富于造作的形式，因为他是就 $n = 2^m$ 这一特殊情形利用类似于 Maclaurin 的方法証明了本定理的。一般說来，Maclaurin 的証明不是一个“有限”証明。正如我們所說的，它依賴于 Weierstrass 关于連續函数取极大值的定理。这当然被 Maclaurin 视为理所当然（他的許多后继者，如 Grebe，Chrystal 等，也是如此）。

要避免使用 Weierstrass 定理是可能的，但需要花费相当多的篇幅。显而易见，若 $a_1^1, a_2^1; a_1^2, a_2^2; \cdots$ 是第 1, 2, $\cdots$ 次重复使用 Maclaurin 手續时所得到的集合中的最小值和最大值，則当 s 增大时， a_1^s 增大， a_2^s 减小。由是

$$a_1^s \rightarrow \alpha_1, a_2^s \rightarrow \alpha_2, \alpha_2 \geq \alpha_1.$$

不难看出，重复 n 次这一手續即可将最大 a 和最小 a 間之差縮小一半，因而 $a_2^n - a_1^n \leq \frac{1}{2}(a_2 - a_1)$ 。由是 $a_2^s - a_1^s \rightarrow 0$ ，因而 $\alpha_1 = \alpha_2$ 。于是可知，所有之 a 皆趋于同一极限 $\mathfrak{U}$ 。这就得出本定理之一証明，但乃是一个比正文中所給出者复杂得多的証明。

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 > a_1 a_2,$$

故 $\mathfrak{G}(a)$ 增大。

今設我們變動諸 a 使 $\mathfrak{U}$ 保持为一常数，并假定存在集合 (a^*) 使 $\mathfrak{G}$ 取极大值，則諸 a^* 必相等。否則我們可以象上面一样地用另外的一组来代替而使 $\mathfrak{G}$ 更大。由是可知， $\mathfrak{G}$ 之极大值为 $\mathfrak{U}$ ，而且此极大值只当諸 a 皆相等时才取得。

要証明存在一 (a^*) ，我們令

$$\phi(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} (n\mathfrak{U} - a_1 - \cdots - a_{n-1}).$$

則 ϕ 在閉集

$$a_1 \geq 0, \dots, a_{n-1} \geq 0, a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \leq n\mathfrak{U}$$

中为連續。因此它对此域中某一組值 $a_1^*, \dots, a_{n-1}^*$ 取极大。

若將 $\mathfrak{G}$ 保持不动，而將 a_1 和 a_2 各代以 $\sqrt{a_1 a_2}$ ，則可得一类似的証明。我們希望讀者作出这一証明。

(ii) Cauchy 的証明有一变体，它可以闡明一个从邏輯的观点看来較为重要的現象。

尋常的歸納証明乃是从 n 到 $n+1$ ；命題 $P(n)$ 的真实性乃是从下列两个假設推出：

(a) $P(n)$ 蘊含 $P(n+1)$ ；

(b) $P(n)$ 对 $n=1$ 成立。

有另外一种証明方法，它可称之为“反歸納”証明。依据这种証法，命題 $P(n)$ 的真实性系得之于

(a') $P(n)$ 蘊含 $P(n-1)$ ；

(b') $P(n)$ 对无限多的 n 成立。

Cauchy 的証明可以安排成为后一种形式的一个証明。首先，Cauchy 对 $n=2^m$ 証明了 (b')。其次，若此定理对 n 成立，且若 $\mathfrak{U}$ 为 $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 之算术平均，則运用定理于 n 个数 $a_1, \dots, a_{n-1}, \mathfrak{U}$ ，即得

$$\mathfrak{U}^n = \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{n-1} + \mathfrak{U}}{n} \right)^n > a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \mathfrak{U}.$$

故对 $n-1$ 也成立.

(iii)¹⁾ 定义 a_1 和 a_2 如 (i), 然后用 $\mathfrak{A}$ 和 $a_1 + a_2 - \mathfrak{A}$ 分别代替 a_1 和 a_2 , 于是 $\mathfrak{A}$ 仍然不动, 而

$$\mathfrak{A}(a_1 + a_2 - \mathfrak{A}) - a_1 a_2 = (\mathfrak{A} - a_1)(a_2 - \mathfrak{A}) > 0,$$

因而 $\mathfrak{G}$ 增大. 重复此种手續, 則至多經過 $n-1$ 步之后, 我們即可得到一組 a , 其中每一个皆等于 $\mathfrak{A}$. 由是即得 $\mathfrak{G} < \mathfrak{A}$.

这一証明多少有一点不自然, 但却完全是初等的. 它有一个变形, 即将 a_1 和 a_2 分别代之以 $\mathfrak{G}$ 和 $a_1 a_2 / \mathfrak{G}$. 我們將此留諸讀者.

(iv) 这定理还有一些归納的証明: 參看(例如) Chrystal [1, p. 46], Muirhead [3]. 有一个簡單的如下²⁾: 設 $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, $a_1 < a_n$, $\mathfrak{A}_v$ 和 $\mathfrak{G}_v$ 是就前 v 个 a 作成的, 又設已經証明了 $\mathfrak{A}_{n-1} \geq \mathfrak{G}_{n-1}$, 于是, 据定理 1, $a_n > \mathfrak{A}_{n-1}$, 又

$$\mathfrak{A}_n = \frac{(n-1)\mathfrak{A}_{n-1} + a_n}{n} = \mathfrak{A}_{n-1} + \frac{a_n - \mathfrak{A}_{n-1}}{n}.$$

将上式两边自乘 n 次, 并記住 $n > 1$, 則得

$$\mathfrak{A}_n^n > \mathfrak{A}_{n-1}^n + n\mathfrak{A}_{n-1}^{n-1} \frac{a_n - \mathfrak{A}_{n-1}}{n} = a_n \mathfrak{A}_{n-1}^{n-1} \geq a_n \mathfrak{G}_{n-1}^{n-1} = \mathfrak{G}_n^n.$$

(v) 另外一个有趣的証明是最近由 Steffensen^[1,2] 得出的. 它是从下之引理出发: 若对所有之 v , $a_{v-1} \leq a_v$, $b_{v-1} \leq b_v$, $a_v \leq b_v$, 則將 a_i 与 b_i 作交换时, $\sum a \sum b$ 不减少, 且除 $a_i = b_i$ 或当 $v \neq i$ 时 $a_v = b_v$ 之情形外, 为增加. 此引理可由下之恆等式立刻得出:

$$\begin{aligned} & \{\sum a + (b_i - a_i)\} \{\sum b + (a_i - b_i)\} \\ &= \sum a \sum b + (b_i - a_i) \{(\sum b - b_i) - (\sum a - a_i)\}. \end{aligned}$$

要推出平均值定理, 我們可將它写成

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_1 + \dots + a_1) \cdots (a_n + a_n + \dots + a_n) \\ & \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdots (a_1 + a_2 + \dots + a_n). \end{aligned}$$

1) 关于这些証明, 可参考 Sturm [1, p. 3], Crawford [1], Briggs and Bryan [1, p. 185], Muirhead [3], Hardy [1, p. 32].

2) 另外一个属于 R. Rado 的簡單証明放在本章之末(定理 60).

若我們假定 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ (这是可以做到的), 并将左边第一因子中之 $n-1$ 个項分別与其余各 $n-1$ 个因子中之一項交換, 則得

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(a_1 + a_2 + \dots + a_2) \dots (a_1 + a_n + \dots + a_n).$$

由引理, 上式比原式为大, 除非所有之 a 皆相等. 重复此項論証即得定理.

(vi) 定理 9 (或本段中所討論的特別情形) 的另外的証明将在 §§ 2.14, 2.15, 2.21, 3.11 以及 § 4.2 中給出.

2.7. Hölder 不等式及其推广. 我們的下一組定理以定理 11 (Hölder 不等式) 为中心¹⁾.

10. 設 $(a), (b), \dots, (l)$ 为 m 个組, 各有 n 个数, 則

$$\mathfrak{G}(a) + \mathfrak{G}(b) + \dots + \mathfrak{G}(l) < \mathfrak{G}(a+b+\dots+l), \quad (2.7.1)$$

除非 (1): $(a), (b), \dots, (l)$ 中每两个皆成比例, 或 (2): 存在 v 使得 $a_v = b_v = \dots = l_v = 0$.

这定理說: 若 $\sum q = 1$, 則

$$a_1^{q_1} a_2^{q_2} \dots a_n^{q_n} + b_1^{q_1} b_2^{q_2} \dots b_n^{q_n} + \dots + l_1^{q_1} l_2^{q_2} \dots l_n^{q_n} < (a_1 + b_1 + \dots + l_1)^{q_1} (a_2 + b_2 + \dots + l_2)^{q_2} \dots,$$

除非陣

$$\begin{array}{cccc} a_1, & b_1, & \dots, & l_1 \\ a_2, & b_2, & \dots, & l_2 \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots \end{array}$$

中每两列皆成比例, 或有一行皆为 0. 所有各列皆成比例 (即每两列皆成比例) 之充要条件为: 对任意 μ 和 ν , $a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu = 0$, $a_\mu c_\nu - a_\nu c_\mu = 0, \dots$; 而此条件也是所有各行皆成比例之充要条件. 記住这点, 并将我們的記号依照陣中行列位置互換的情况加以改变, 且将 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 写成 $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, 則可看出定理 10 相当于

1) 严格說来, Hölder 不等式乃是定理 14 或定理 13 之 (2.8.3). 不等式 (2.7.1) 是由 Minkowski (見 [1], p. 117) 对两个組和相等的权明确地提出的.

11. 若 $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ 为正, 且 $\alpha + \beta + \dots + \lambda = 1$, 则

$$\sum a^\alpha b^\beta \dots l^\lambda < (\sum a)^\alpha (\sum b)^\beta \dots (\sum l)^\lambda, \quad (2.7.2)$$

除非(1): 集合 $(a), (b), \dots, (l)$ 皆成比例, 或(2): 有一集合为 0.

等号成立之条件也可表为: 有一集合与其他所有之集合皆成比例(零集与所有其它之集皆成比例). 有一集为 0 之情况是显然的, 因而在证明中可以去管它.

在这里, 我们又给出两个证明.

(i) 由定理 7,

$$(\sum ab)^2 < \sum a^2 \sum b^2,$$

除非 (a) 与 (b) 成比例. 因之,

$$(\sum abcd)^4 \leq (\sum a^2 b^2)^2 (\sum c^2 d^2)^2 \leq \sum a^4 \sum b^4 \sum c^4 \sum d^4,$$

不等号至少在一处成立, 除非 $(a), (b), (c), (d)$ 皆成比例¹⁾. 重复此项论证, 则可看出

$$(\sum ab \dots l)^{2^m} < \sum a^{2^m} \sum b^{2^m} \dots \sum l^{2^m}, \quad (2.7.3)$$

式中共有 2^m 组 $(a), (b), \dots$, 除非所有之集合皆成比例, 否则不等号总成立. 此即等价于当每一指数皆为 2^{-m} 时之(2.7.2).

今设 M 为任一小于 2^m 之数, 并设 (g) 为第 M 个集. 若 $(ab \dots g)$ 不为 0, 则定义 $A, B, \dots, L$ 如

$$A^{2^m} = a^M, \dots, G^{2^m} = g^M (M \text{ 个集}),$$

$$H^{2^m} = K^{2^m} = \dots = L^{2^m} = ab \dots g (2^m - M \text{ 个集}),$$

因而 $AB \dots L = ab \dots g$. 运用(2.7.3)于 $A, B, \dots, L$, 则得

$$(\sum ab \dots g)^{2^m} < \sum a^M \dots \sum g^M (\sum ab \dots g)^{2^m - M}$$

或

$$(\sum ab \dots g)^M < \sum a^M \sum b^M \dots \sum g^M, \quad (2.7.4)$$

除非集合 $(A), (B), \dots, (L)$ (从而集合 $(a), (b), \dots, (g)$) 皆成比例. 此即相当于每一指数皆为 $1/M$ 时之(2.7.2). 我们曾经假定 $(ab \dots g)$ 不为 0; 若其为 0, 则(2.7.4)显然成立, 因 $(a),$

1) 零集除外, 于是比例性就是传递的: 参看 § 2.1.

(b), ..., (g) 中没有一个为 0.

今若 $\alpha, \beta, \dots$ 为有理数, 则可写

$$\alpha = \frac{\alpha'}{M}, \quad \beta = \frac{\beta'}{M}, \quad \dots,$$

其中 $\alpha', \beta', \dots$ 皆为整数, 且 $\sum \alpha' = M$. 运用(2.7.2)(取指数皆为 $1/M$)于由 α' 个同样的 a 集, β' 个同样的 b 集, 等等所组成之 M 个集, 则得(2.7.2), 其指数为 $\alpha, \beta, \dots$.

最后, 若 $\alpha, \beta, \dots$ 不全为有理数, 则可代之以和数为 1 的有理近似值; 然后就这些有理指数做成(2.7.2), 再取极限. 在此过程中, “ $<$ ”退化为“ $\leq$ ”, 因而如同 § 2.5 (i) 中一样, 我们还不能立刻得到一个完全的证明. 我们可以完成这一证明如下: 令 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \beta = \beta_1 + \beta_2, \dots$, 其中所有之数皆为正, 且附标为 1 之数皆为有理数. 若 $\sum \alpha_1 = \sigma_1, \sum \alpha_2 = \sigma_2$, 因而 $\sigma_1 + \sigma_2 = 1$, 且 $P_1^{\sigma_1} = a^{\sigma_1} b^{\beta_1}, \dots, P_2^{\sigma_2} = a^{\sigma_2} b^{\beta_2} \dots$. 于是我们有

$$\sum a^\alpha b^\beta \dots l^\lambda = \sum P_1^{\sigma_1} P_2^{\sigma_2} \leq (\sum P_1)^{\sigma_1} (\sum P_2)^{\sigma_2}.$$

因 $\alpha_1, \beta_1, \dots$ 为有理数, 故

$$\sum P_1 = \sum a^{\alpha_1/\sigma_1} \dots l^{\lambda_1/\sigma_1} < (\sum a)^{\alpha_1/\sigma_1} \dots (\sum l)^{\lambda_1/\sigma_1};$$

对于 $\sum P_2$, 我们也有类似的不等式, 但仅“ $\leq$ ”成立. 合并我们的结果即得(2.7.2).

(ii) 我们可由定理 9 推出定理 11. 事实上, 我们有(因没有一个集为 0)

$$\begin{aligned} \frac{\sum a^\alpha b^\beta \dots l^\lambda}{(\sum a)^\alpha (\sum b)^\beta \dots (\sum l)^\lambda} &= \sum \left(\frac{a}{\sum a} \right)^\alpha \left(\frac{b}{\sum b} \right)^\beta \dots \left(\frac{l}{\sum l} \right)^\lambda \\ &\leq \sum \left(\alpha \frac{a}{\sum a} + \beta \frac{b}{\sum b} + \dots + \lambda \frac{l}{\sum l} \right) \\ &= \alpha + \beta + \dots + \lambda = 1. \end{aligned}$$

于此, 等号只当

$$\frac{a_v}{\sum a} = \frac{b_v}{\sum b} = \dots = \frac{l_v}{\sum l} \quad (v = 1, \dots, n)$$

时成立, 亦即当 $(a), (b), \dots, (l)$ 成比例时成立.

k 与其自身共軛.

(i) 設 $k > 1$, 則(2.8.3)为定理 11 之一特例, 此时共有兩組字母, 而 $\alpha = \frac{1}{k}$, $\beta = \frac{1}{k'}$. 这就是通常之 Hölder 不等式¹⁾.

(ii) 設 $0 < k < 1$, 因而 $k' < 0$. 若有一 b 为 0, 則按照 § 2.1, (2.8.4)右边之第二因子解释为 0, 因而(2.8.4)成立, 除非 (ab) 为 0. 若每一 b 皆为正, 我們定义 l, u, v 如下:

$$l = 1/k,$$

因而

$$l > 1, \quad k' = -kl';$$

又

$$u = (ab)^k, \quad v = b^{-k},$$

因而

$$ab = u^l, \quad a^k = uv, \quad b^{k'} = v^{l'}.$$

于是, (2.8.4)就化归(2.8.3), 不过是以 u, v, l 代替 a, b, k . 除外的情形就是 (u^l) 和 $(v^{l'})$, 即 (ab) 和 $(b^{k'})$ 成比例. 若情形真是如此, 則(因諸 b 現在全为正)集 (a) 和 $(b^{k'-1})$, 因而集 (a^k) 和 $(b^{k'})$ 成比例.

(iii) 若 $k < 0$, 則 $0 < k' < 1$. 將 a 与 b 交換, k 与 k' 交換, 則此种情况即化归(ii). (ii)和(iii)皆包含在(2.8.4)之中.

若我們作适当的規定, 則这些不等式对于除外情形 $k = 0$, $k' = 1$ 仍然成立. 若 $k = 0$, $k' = 0$, 我們必須將(2.8.4)解释为

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n > n(a_1 \cdots a_nb_1 \cdots b_n)^{1/n}.$$

若 $k = 1$, 我們可以將 k' 解释为 $+\infty$ 或 $-\infty$. 在前一情形, 我們將(2.8.3)解释为 $\sum ab < \max b \sum a$, 而在后一情形, 則將(2.8.4)解释为 $\sum ab > \min b \sum a$. 我們証諸者自己去把等号成立的情形挑选出来.

我們可以把(2.8.3)和(2.8.4)合并成一个不等式

1) Hölder [1]. Hölder 將此定理表成一个不大对称的形式, 这在稍早一些已由 Rogers^[2] 得出.

$$(\sum ab)^{kk'} < (\sum a^k)^{k'} (\sum b^{k'})^k, \quad (k \neq 0, k \neq 1). \quad (2.8.5)$$

鑑于 Hölder 不等式極為重要，我們在這裡將改變我們一向的慣例，明白地說出關於複數 a, b 的派生定理。

14. 若 $k > 1$, k' 共軛於 k , 則

$$|\sum ab| \leq (\sum |a|^k)^{1/k} (\sum |b|^{k'})^{1/k'}.$$

等號成立的充要条件是 $(|a_v|^k)$ 和 $(|b_v|^{k'})$ 成比例，且 $\arg a_v b_v$ 与 v 无关。

証明中需要另外加上去的說明是

$$|\sum ab| < \sum |ab|,$$

除非 $\arg a_v b_v$ 与 v 无关。我們認為 0 具有任何隨心所欲的復角。

下述定理乃是定理 13 第一部分的一个变形，它有时被称为“Hölder 不等式之逆”。

15. 設 $k > 1$, k' 共軛於 k , $B > 0$, 則 $\sum a^k \leq A$ 成立之充要条件为: 对于所有使得 $\sum b^{k'} \leq B$ 成立之 b , 皆有 $\sum ab \leq A^{1/k} B^{1/k'}$.

由(2.8.3), 条件是必要的。若 $\sum a^k > A$, 我們可以选择 b , 使得 $\sum b^{k'} = B$, 且使 $(b^{k'})$ 与 (a^k) 成比例。于是

$$\sum ab = (\sum a^k)^{1/k} (\sum b^{k'})^{1/k'} > A^{1/k} B^{1/k'}.$$

因而条件为充分的。

定理 15 在决定 $\sum a^k$ 的上界时常常是很有用的。任何基于此定理之論証，总可轉变为只包含一个特殊的 (b) 的論証，不过我們在这里所表达出来的形式，它具有任意的 (b) ，有时是比較合用的¹⁾。

2.9. 平均值 $M_r(a)$ 的一般性質。 我們現在可以來証明一个定理，它使得 §§ 2.3—2.4 中的某些定理变得完善了，而且可以取代它們。

16.²⁾ 若 $r < s$, 則

1) 比較 § 6.9 (156 頁) 及 § 6.13 (165 頁)。

2) Schlömilch [1]. 也參考 Reynaud 及 Duhamel [1, p. 155] 以及 Chrystal [1, p. 48].

$$\mathfrak{M}_r(a) < \mathfrak{M}_s(a), \quad (2.9.1)$$

除非所有之 a 皆相等, 或 $s \leq 0$ 且有一 a 为 0.

我們已經对下列几种特殊情形証明了本定理: (i) $r = -\infty$ (定理 5), (ii) $s = +\infty$ (定理 5), (iii) $r = 0, s = 1$ (定理 9), (iv) $s = 2r$ (定理 6).

先設 $0 < r < s$, 并令 $r = sa$, 于是 $0 < a < 1$; 又令

$$pa^s = u, \quad p = v,$$

因而 $v > 0$ 且 $pa^{sa} = (pa^s)^a p^{1-a} = u^a v^{1-a}$.

于是, 由定理 11, 有

$$\sum u^a v^{1-a} < (\sum u)^a (\sum v)^{1-a}, \quad (2.9.2)$$

除非 u_v/v_v 与 v 无关, 亦即 a_v 与 v 无关. 因之,

$$\left(\frac{\sum pa^{sa}}{\sum p} \right)^{1/sa} < \left(\frac{\sum pa^s}{\sum p} \right)^{1/s},$$

此即(2.9.1).

$r \leq 0$ 且有一 a 为 0 之情形是显然的, 我們可以不去管它. 若每一 a 皆为正, 且 $r = 0 < s$, 則由定理 9 和(2.2.7), 我們就有

$$(\mathfrak{M}_0(a))^r = (\mathfrak{G}(a))^r = \mathfrak{G}(a^r) < \mathfrak{U}(a^r) = (\mathfrak{M}_s(a))^r.$$

余下的两种情形: $r < s < 0$ 和 $r < s = 0$, 根据(2.2.9)即化为已經討論过的情形.

17.¹⁾ 若 $0 < r < s < t$, 則

$$\mathfrak{M}_s^r < (\mathfrak{M}_r)^{\frac{t-s}{t-r}} (\mathfrak{M}_t^r)^{\frac{t-r}{t-r}}, \quad (2.9.3)$$

除非所有异于 0 之 a 皆相等.

我們將参数限制为正, 因为負值或 0 将引起許多麻煩, 值不得我們去作系統的钻研.

我們可以写

$$s = ra + t(1-a) \quad (0 < a < 1).$$

这不等式于是就成为

$$\sum qa^s < (\sum qa^r)^a (\sum qa^t)^{1-a}.$$

1) Liapounoff [1, p. 2].

令 $u = qa^r, v = qa^s$, 这就化为定理 11 的一特别情形, 等号成立的条件是 (u) 与 (v) 成比例, 而这显然是等价于在定理的叙述中所说明的. 讀者应当分辨出定理 16 和定理 17 中等号成立的条件有何不同.

以后我們將看到 (§ 3.6, 定理 87), 定理 17 可以用一种更簡明的形式表出.

2.10. 和数 $\Theta_r(a)$. (i) 令

$$\Theta_r = \Theta_r(a) = (\sum a^r)^{1/r} \quad (r > 0).$$

我們只限于討論正 r 的情形, 而將对于 $r \leq 0$ 构造关于 Θ_r 的一个理論, 这一任务留給讀者作为一个練習.

18. 若 $0 < r < s < t$, 則

$$\Theta_s^t < (\Theta_r)^{\frac{t-r}{t-r}} (\Theta_t)^{\frac{r}{t-r}}, \quad (2.10.1)$$

除非所有异于 0 之 a 皆相等.

这基本上和定理 17 是同一定理. 事实上,

$$\Theta_r(a) = n^{1/r} \mathfrak{M}_r(a), \quad (2.10.2)$$

平均值 $\mathfrak{M}_r(a)$ 是就单位权做成的, 而 (2.10.1) 就化为 (2.9.3), n 的幂为零.

定理 17 和定理 18 之間之共同之处主要可以这样來說明, 即 (2.9.3) 和 (2.10.1) 是依 § 1.4 中之第二种意义为齐次的, 即依記号 Σ 为齐次的. 关于和数, 有一个与定理 16 相应的定理, 但在該定理 (此系由下之 (2.10.3) 表出) 之中, 不等号反了过来; (2.10.3) 关于 Σ 是非齐次的, 它与 (2.9.1) 的关系并不象 (2.10.1) 与 (2.9.3) 的关系那样.

19.¹⁾ 若 $0 < r < s$, 則

$$\Theta_s(a) < \Theta_r(a), \quad (2.10.3)$$

除非所有的 a 除了一个之外皆为 0.

因此不等式关于 a 为齐次, 故可假定 $\sum a^r = 1$, 即 $\Theta_r = 1$ ²⁾.

1) Pringsheim [1], Jensen [2]. Pringsheim 把它的第二个証明归功于 Lüröth.

2) 可参考 § 1.4 中关于这一証明所作的說明.

于是,对每一 v 皆有 $a_v \leq 1$, 因而有 $a_v' \leq a_v$ 及

$$\sum a' \leq \sum a = 1.$$

若不止一个 a 为正, 则至少有一正的 a 小于 1, 因而不等式成立.

定理 19 通常叫做 Jensen 不等式.

(ii) 我們現在添上与定理 4 和定理 3 相对应的关于 $\mathfrak{S}_r(a)$ 的定理.

20. 当 $r \rightarrow \infty$ 时 $\mathfrak{S}_r \rightarrow \max a$.

21. 当 $r \rightarrow 0$ 时 $\mathfrak{S}_r \rightarrow \infty$, 除非所有之 a 除了一个之外皆为 0.

定理 20 可从 (2.10.2) 和定理 4 得出. 要証明定理 21, 只須注意我們有 $\sum a' = N + o(1)$ 即可, 其中 N 为正 a 的个数.

(iii) 由定理 19, 結合定理 11, 可得下述之 Jensen 定理¹⁾.

22. 若 $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ 为正, 且 $\alpha + \beta + \dots + \lambda > 1$, 则

$$\sum a^\alpha b^\beta \dots l^\lambda < (\sum a)^\alpha (\sum b)^\beta \dots (\sum l)^\lambda,$$

除非有一个集中所有之数皆为 0, 或每一集中所有之数除了一个之外皆为 0, 而且在后一种情形, 其为正之数皆有同一之编号.

令 $\alpha = k\alpha', \beta = k\beta', \dots$, 其中 $k > 1$, 且 $\alpha' + \beta' + \dots = 1$. 若 $a^k = A, b^k = B, \dots$, 则由定理 11 和 19, 有

$$\begin{aligned} \sum a^\alpha b^\beta \dots l^\lambda &= \sum A^{\alpha'} B^{\beta'} \dots L^{\lambda'} \\ &\leq (\sum A)^{\alpha'} (\sum B)^{\beta'} \dots (\sum L)^{\lambda'} \\ &= (\sum a^k)^{\alpha/k} \dots (\sum l^k)^{\lambda/k} \leq (\sum a)^\alpha \dots (\sum l)^\lambda. \end{aligned}$$

不等式总在某一处成立, 除非两个定理中等号成立之条件同时得到满足.

(iv) 很自然地我們会去考虑加权和数

$$\mathfrak{S}_r = \mathfrak{S}_r(a) = \mathfrak{S}_r(a, p) = (\sum p a^r)^{1/r}.$$

很明显, 不可能存在一个普遍成立的形如 (2.9.1) 或 (2.10.3) 的关系, 因为当 $p_v = 1$ 时, $\mathfrak{S}_r$ 即为定理 19 中之 $\mathfrak{S}_r$, 而当 $\sum p_v = 1$ 时即为 $\mathfrak{M}_r$. 在这一个方向可能出現的情形是由下之定理决定的.

1) Jensen [2].

23. 关系

$$\mathfrak{A}_r \leq \mathfrak{A}_s, \quad (0 < r < s) \quad (2.10.4)$$

对给定之权 p 和所有之 a 皆成立之充要条件是 $\sum p \leq 1$. 此时不等号总成立, 除非 (a) 为 0 或 $\sum p = 1$ 且所有之 a 皆相等.

关系

$$\mathfrak{A}_r \leq \mathfrak{A}_s, \quad (0 < r < s) \quad (2.10.5)$$

对给定之权 p 及所有之 a 皆成立之充要条件是 $p_v \geq 1$ 对所有之 v 皆成立. 此时不等号总成立, 除非 (a) 为 0, 或 $a_k > 0, p_k = 1$ 而其余之 a 皆为 0.

(i) 若对每一 v 我们取 $a_v = 1$, 则 $\mathfrak{A}_r = (\sum p)^{1/r}$, (2.10.4) 只当 $\sum p \leq 1$ 时才能成立. 若此条件成立, 且 $r = s\alpha$, 则 $0 < \alpha < 1$, 因而我们有

$$\sum pa' = \sum (pa')^\alpha p^{1-\alpha} \leq (\sum pa')^\alpha (\sum p)^{1-\alpha} \leq (\sum pa')^\alpha,$$

此即 (2.10.4). 等号成立之条件显然即为所述.

(ii) 若我们取 $a_k = 1$ 且其余之 a 为 0, 则 $\mathfrak{A}_r = p_k^{1/r}$, 而 (2.10.5) 只当 $p_k \geq 1$ 时成立. 若我们假设此条件满足, 令 $s = r\beta$, 因而 $\beta > 1$, 并假定 $\sum pa' = 1$ (根据齐次性是可以这样做的), 则对每一 $v, pa' \leq 1$, 且

$$\sum pa' = \sum (pa')^\beta p^{1-\beta} \leq \sum (pa')^\beta \leq \sum pa',$$

此即 (2.10.5). 等号成立之条件显然即为所述.

2.11. Minkowski 不等式. 下一个定理是定理 10 的一个推广.

24. 设 r 为有限且不等于 1, 则

$$\mathfrak{M}_r(a) + \mathfrak{M}_r(b) + \cdots + \mathfrak{M}_r(l) > \mathfrak{M}_r(a+b+\cdots+l) \quad (r > 1), \quad (2.11.1)$$

$$\mathfrak{M}_r(a) + \mathfrak{M}_r(b) + \cdots + \mathfrak{M}_r(l) < \mathfrak{M}_r(a+b+\cdots+l) \quad (r < 1), \quad (2.11.2)$$

除非 $(a), (b), \cdots, (l)$ 成比例, 或 $r \leq 0$ 且对某一 v ,

$$a_v = b_v = \cdots = l_v = 0.$$

当 $r = 1$ 时, 对任何 $a, b, \cdots$, 等号皆成立. 定理 10 乃是

$r = 0$ 这一特别情形。主要的結果当 $r = \infty$ 或 $r = -\infty$ 时仍然成立(而且是显然的), 只不过等号成立的条件需要另加叙述。我們把它留給讀者。

我們現取帶有 q 的平均, 并令

$$a + b + \cdots + l = s, \quad \mathfrak{M}_r(s) = S,$$

于是有

$$\begin{aligned} S_r &= \sum q s^r = \sum q a s^{r-1} + \sum q b s^{r-1} + \cdots + \sum q l s^{r-1} \\ &= \sum (q^{1/r} a) (q^{1/r} s)^{r-1} + \cdots + \sum (q^{1/r} l) (q^{1/r} s)^{r-1}. \end{aligned}$$

先設 $r > 1$. 运用定理 13 中之(2.8.3)于右边各和数, 則得

$$S^r \leq (\sum q a^r)^{1/r} (\sum q s^r)^{1/r} + \cdots = S^{r-1} ((\sum q a^r)^{1/r} + \cdots). \quad (2.11.3)$$

等号只当 $(q a^r), (q b^r), \cdots$ 全与 $(q s^r)$ 成比例时成立, 也就是只当 $(a), (b), \cdots$ 成比例时成立。因 S 为正(除非每一集皆为 0), 这就証明了(2.11.1)¹⁾。

其次, 我們假定 $0 < r < 1$. 除非所有之集 $(a), (b), \cdots$ 皆为 0, 总有某一 v 使 $s_v > 0$. 若对某一特定的 v , 有 $s_v = 0$, 則 $a_v = b_v = \cdots = l_v = 0$, 于是我們就可將該 v 略去不予考虑。因此, 我們在進行討論时就可假定 $s_v > 0$ 对所有之 v 皆成立。这样一来, 由定理 13 之(2.8.4)即得(2.11.3), 只不过不等号反了过来, 而証明則可如前得出。

最后, 我們假定 $r < 0$. 若有一 s_v 为 0, 則所有之平均皆为 0; 因此我們可以假定对所有之 v 皆有 $s_v > 0$. 若有一 a_v 为 0, 則 $\mathfrak{M}_r(a) = 0$, 因而可将文字 a 略去²⁾. 在討論时可以假定 $a, b, \cdots$ 皆为正, 所有的事情由定理 13 之(2.8.4)即可得出。

当諸 q 皆相等时, 我們即得

25. 若 r 为有限, 且不等于 0 或 1, 則

$$\begin{aligned} (\sum (a+b+\cdots+l)^r)^{1/r} &< (\sum a^r)^{1/r} + \cdots + (\sum l^r)^{1/r} \\ &\quad (r > 1), \end{aligned} \quad (2.11.4)$$

1) 这一証明属于 F. Riesz^[2, p. 45].

2) 这里用到了(2.2.15)

$$(\sum(a+b+\cdots+l)^r)^{1/r} > (\sum a^r)^{1/r} + \cdots + (\sum l^r)^{1/r} \\ (r < 1), \quad (2.11.5)$$

除非 $(a), (b), \cdots, (l)$ 成比例, 或 $r < 0$ 且对某一 $v, a_v, b_v, \cdots, l_v$ 全为 0.

(2.11.4) 通常称为 Minkowski 不等式¹⁾. 定理 24 只是在外表上比定理 25 更广泛一些, 因为若将 $a, b, \cdots$ 代以 $p^{1/r}a, p^{1/r}b, \cdots$, 则它可从定理 25 得出.

定理 24 可以用一个非常好的对称形式表出²⁾.

26. 設 $\mathfrak{M}^{(\mu)}$ 表示关于附标 μ 所取的带有权 p_μ 的平均, $\mathfrak{M}^{(v)}$ 表示关于 v 所取的带有权 q_v 的平均³⁾; 又設 $0 < r < s < \infty$. 則

$$\mathfrak{M}_r^{(v)} \mathfrak{M}_r^{(\mu)}(a_{\mu v}) < \mathfrak{M}_r^{(\mu)} \mathfrak{M}_s^{(v)}(a_{\mu v}),$$

除非 $a_{\mu v} = b_\mu c_v$.

这結果对于滿足 $r < s$ 之所有 r, s 普遍成立, 只不过要对等号成立的情形加以詳細說明.

我們現就 $0 < r < s < \infty$ 来証明本定理, 而将其它情形留給讀者. 当 $r \leq 0$ 或 r 与 s 中有一为无穷时, 关于等号之成立有着許多补充情况.

令 $s/r = k > 1$, $p_\mu a_{\mu v}^r = A_{\mu v}$, 則所要証之不等式即为

$$\left\{ \sum_{v=1}^n q_v \left(\sum_{\mu=1}^m p_\mu a_{\mu v}^r \right)^{s/r} \right\}^{1/s} < \left\{ \sum_{\mu=1}^m p_\mu \left(\sum_{v=1}^n q_v a_{\mu v}^s \right)^{r/s} \right\}^{1/r}$$

或

$$\left\{ \sum_{v=1}^n q_v \left(\sum_{\mu=1}^m A_{\mu v} \right)^k \right\}^{1/k} < \sum_{\mu=1}^m \left(\sum_{v=1}^n q_v A_{\mu v}^k \right)^{1/k}.$$

当 $\sum q = 1$ 时, 此即化为 (2.11.1), 又因关于 q 为齐次, 故无此条件亦成立.

1) Minkowski [1, pp. 115—117].

2) 定理 26 是在 1929 年由 A. E. Ingham 君告訴我們的. Minkowski 不等式的这一提法亦由 Jessen 独立地得出, 发表在他的論文[1]中. 这篇以及他其后的論文[2]和[3]中包含了許多有趣的推广: 參看定理 136 和定理 137.

3) 我們在这里没有遵守通常对于 q 所作的規定; $\sum q$ 不一定为 1 (虽然我們在証明此不等式时, 是把它轉变为一个可以假定 $\sum q = 1$ 的不等式来証的).

2.12. Minkowski 不等式之一伴随不等式. 下述定理乃是定理 25 的一个类似定理, 不过比较简单.

27. 若 r 为正, 且不等于 1, 则

$$\sum(a + b + \cdots + l)^r > \sum a^r + \sum b^r + \cdots + \sum l^r \quad (r > 1), \quad (2.12.1)$$

$$\sum(a + b + \cdots + l)^r < \sum a^r + \sum b^r + \cdots + \sum l^r \quad (0 < r < 1), \quad (2.12.2)$$

除非每一集 $a_v, b_v, \cdots, l_v$ ($v = 1, 2, \cdots, n$) 中所有之数除一个之外皆为 0.

此由定理 19 立可得出, 盖若(比如說) $r > 1$, 则

$$(a + b + \cdots + l)^r > a^r + b^r + \cdots + l^r,$$

除非所有之 $a, b, \cdots, l$ 除一个之外皆为 0. 我們要注意, (2.12.1) 和 (2.12.2) 的意义和 (2.11.4) 和 (2.11.5) 的方向是相反的.

实际应用中通常所需要的是 (2.11.4) 和 (2.12.2) 的一个結合, 即

28. 若 $r > 0$, 则

$$\begin{aligned} & (\sum(a + b + \cdots + l)^r)^R \\ & \leq (\sum a^r)^R + (\sum b^r)^R + \cdots + (\sum l^r)^R, \end{aligned}$$

其中当 $0 < r \leq 1$ 时 $R = 1$, 当 $r > 1$ 时 $R = \frac{1}{r}$.

2.13. 几个基本不等式的解說和应用. (i) Hölder 不等式和 Minkowski 不等式的几何解釋. Hölder 不等式和 Minkowski 不等式的两个特別简单的情形是

$$(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 < (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2), \quad (2.13.1)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2\}} \\ & < \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \end{aligned} \quad (2.13.2)$$

这当变数取任何实数值时皆成立. 它們表达了这样的两个事实, 即(1)一个实角的余弦在数值上总是小于 1 的, (2)三角形两边之和大于第三边. 除非在(1)中向量 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) 为平

行(具有相同的或相反的方向),在(2)中此二向量为平行且同向.

Minkowski 不等式的常用形式是(3.13.2)在 n 維度量空間中的一个推广,这空間的距离定义为

$$P_1 P_2 = (|x_1 - x_2|^r + |y_1 - y_2|^r + \cdots)^{1/r} \quad (r \geq 1).$$

(2.13.1)的一些最明显的推广并不是联系着一般 r 的 Hölder 不等式来进行的,而是联系着 $r = 2$ 这一情形从另外一个方面的推广来进行的.

29. 若 $\sum a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$ (其中 $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$) 为一正二次型 (系数是实数,但不一定是正数),則

$$(\sum a_{\mu\nu} x_\mu y_\nu)^2 < \sum a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu \sum a_{\mu\nu} y_\mu y_\nu,$$

除非 (x) 与 (y) 成比例.

这可由

$$\sum a_{\mu\nu} (\lambda x_\mu + \mu y_\mu) (\lambda x_\nu + \mu y_\nu)$$

为正这一事实立刻得出: 比較定理 7 的第二个証明. 它在几何上表示(2.13.1)在 n 維空間中的一个推广,这个 n 維空間具有斜坐标或有一非欧测度.

欲闡明定理 15, 我們取 $k = 2$, $A = I^2$, $B = 1$, 并取直角坐标. 于是,該定理即謂,若一向量沿任何方向的射影之长不超过 l , 則該向量之长不超过 l .

(ii) Hadamard 的一个定理¹⁾. 在下一定理中, 我們所涉及的也是一組实的但不一定为正的数 $a_{\mu\nu}$.

30. 設 D 为一行列式, 其元素为

$$a_{\mu\nu} (\mu, \nu = 1, 2, \cdots, n),$$

則

$$D^2 \leq \sum a_{1\kappa}^2 \sum a_{2\kappa}^2 \cdots \sum a_{n\kappa}^2. \quad (2.13.3)$$

等号只当

$$a_{\mu 1} a_{\nu 1} + a_{\mu 2} a_{\nu 2} + \cdots + a_{\mu n} a_{\nu n} = 0 \quad (2.13.4)$$

对每一对不同的 μ, ν (即 $\mu \neq \nu$) 皆滿足时, 或(2.13.3)右边有一

1) Hadamard^[1] 考虑了复元素的行列式, 定理 30 早先已为 Kelvin 发现, 并由 Muir^[2] 証明.

因子为 0 时才成立。

这定理的几何意义是： n 維空間中一个平行多面体的体积不大于过同一个頂点的諸稜之积，且等号只当它們为正交或有一边为 0 时才成立。

設 $\sum c_{\mu\nu}x_{\mu}x_{\nu}$ (其中 $c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}$) 为一正二次型，又設 Δ 为一行列式，其元素为 $c_{\mu\nu}$ ，則方程

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & \cdots \\ c_{21} & c_{22} - \lambda & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0 \quad (2.13.5)$$

有 n 个正根¹⁾，其和为 $\sum c_{\mu\nu}$ ，其积为 Δ 。因之，由定理 9，

$$\Delta \leq \left(\frac{c_{11} + c_{22} + \cdots + c_{nn}}{n} \right)^n. \quad (2.13.6)$$

若 $c_{\mu\mu} > 0$ 对所有之 μ 皆成立，則二次型

$$\sum \frac{c_{\mu\nu}}{\sqrt{c_{\mu\mu}c_{\nu\nu}}} x_{\mu}x_{\nu} = \sum C_{\mu\nu}x_{\mu}x_{\nu}$$

亦为正；若将(2.13.6)运用于此二次型，則得

$$\Delta \leq c_{11}c_{22} \cdots c_{nn}. \quad (2.13.7)$$

这实质上就等价于 Hadamard 定理。蓋二次型

$$\sum (a_{1\kappa}x_1 + a_{2\kappa}x_2 + \cdots + a_{n\kappa}x_n)^2 = \sum c_{\mu\nu}x_{\mu}x_{\nu}$$

为正，除非 $D = 0$ ，又 $\Delta = D^2$ 且

$$c_{\mu\mu} = a_{\mu 1}^2 + a_{\mu 2}^2 + \cdots + a_{\mu n}^2,$$

故(2.13.7)即为(2.13.3)。

欲(2.13.6)中等号成立，(2.13.5)中所有之根必須相等，而这只当 $\mu \neq \nu$ 时 $c_{\mu\nu} = 0$ ，且 $c_{\mu\mu}$ 与 μ 无关时才可能。因之，欲(2.13.7)中之等号成立，必須对于 $\mu \neq \nu$ ， $C_{\mu\nu} = 0$ ，且 $C_{\mu\mu}$ 与 μ 无关。最后的条件必然成立，因 $C_{\mu\mu} = 1$ ，而 $C_{\mu\nu} = 0$ ，即 $c_{\mu\nu} = 0$ ，此即(2.13.4)。

若用 Hermite 型代替二次型，本定理也可推广到复元素之行

1) 参考 Bôcher [1, p. 171].

列式上去。其它之推广¹⁾曾由 Schur^[2] 作出。

下述关于(2.13.7)的巧妙証明是由 Oppenheim²⁾ 得出的。Oppenheim 的論証不仅証明了(2.13.7)，也証明了 Hadamard 定理，而且还可以用来証明下述由 Minkowski³⁾ 和 Fischer⁴⁾ 分別得出的不等式(2.13.8)和(2.13.9)。

任何两个正二次型 $\sum c_{ik}x_ix_k$ 和 $\sum d_{ik}x_ix_k$ 皆可用一个具有单位行列式的綫性变换同时化为平方和⁵⁾，設为 $\sum c_v y_v^2$, $\sum d_v y_v^2$ ，其中 c_v, d_v 为正。于是 $\sum (c_{ik} + d_{ik})x_ix_k$ 即化为 $\sum (c_v + d_v)y_v^2$ ，而这些二次型的行列式 $|c_{ik}|, \dots$ 則滿足关系

$$|c_{ik}| = \prod c_v, \quad |d_{ik}| = \prod d_v, \quad |c_{ik} + d_{ik}| = \prod (c_v + d_v).$$

因之，运用定理 10 于集合 $(c_v), (d_v)$ ，則得

$$|c_{ik}|^{1/n} + |d_{ik}|^{1/n} \leq |c_{ik} + d_{ik}|^{1/n}. \quad (2.13.8)$$

今設 d 的矩陣是从 c 的矩陣先用 -1 乘其前 r 行，然后再用 -1 乘其前 r 列得出的⁶⁾。于是，我們以 2^n 除(2.13.8)，并将其自乘 n 次，則得

$$|c_{ik}| = |c_{11} \cdots c_{nn}| \leq |c_{11} \cdots c_{rr}| |c_{r+1, r+1} \cdots c_{nn}|, \quad (2.13.9)$$

其中 $|c_{11} \cdots c_{rr}|$ 为 $|c_{ik}|$ 中左上角之 r 行 r 列小行列式， $|c_{r+1, r+1} \cdots c_{nn}|$ 为右下角之余子式。重复此項論証，即將(2.13.9)右边之各因子代以两个因子，等等，最后即得(2.13.7)。

(iii) 矩陣之模。設 A 与 B 为两个 n 行 n 列之矩陣，其元素分別为 $a_{\mu\nu}$ 与 $b_{\mu\nu}$ ；諸元素可为复数。矩陣 $A + B$ 与 BA 定义作元素分別为

$$a_{\mu\nu} + b_{\mu\nu}, \quad b_{\mu 1}a_{1\nu} + b_{\mu 2}a_{2\nu} + \cdots + b_{\mu n}a_{n\nu}$$

之矩陣。

1) 可参考 A. L. Dixon [1].

2) Oppenheim [2].

3) Minkowski [2].

4) Fischer [1].

5) Bôcher [1, p. 171].

6) 由是， $\sum d_{ik}x_ix_k$ 乃是由 $\sum c_{ik}x_ix_k$ 将其中的 x_i, x_k ($i, k = 1, 2, \dots, r$) 分別代以 $-x_i, -x_k$ 而得出的(故当 $\sum c_{ik}x_ix_k$ 为正时亦为正)。

31¹⁾. 若矩陣 A 之模 $|A|$ 系定義作

$$|A| = \sqrt{\{\sum |a_{\mu\nu}|^2\}},$$

則

$$|A + B| \leq |A| + |B|, \quad |BA| \leq |B||A|.$$

前一不等式乃是定理 25 当 $r = 2$ 时之一直接推理。第二个不等式可从定理 7 得出，盖因

$$\sum_{\mu, \nu} |b_{\mu 1} a_{1\nu} + \cdots + b_{\mu n} a_{n\nu}|^2 \leq \sum_{\mu, \nu, p, q} |b_{\mu p}|^2 |a_{q\nu}|^2.$$

(iv) 初等几何中之极大与极小。我們的基本不等式在初等几何中有着不少的应用，我們現在从其中引述一些（給讀者作为习题）。

32. 給定周长 $2p$ 之三角形之面积当三边 a, b, c 相等时取极大。

[运用定理 9 于 $p - a, p - b, p - c$.]

33. 若一直角六面体之表面积已經給定，則其体积当此六面体为立方体时为最大。

[設过某一頂点之三条稜为 a, b, c ，并运用定理 9 于 bc, ca, ab 。对于 n 維空間中之平行多面体也有一个类似的定理；若 $k < n$ ，又若 k 維边界之表面积已經給定，則当此平行多面体为直交且其諸稜相等时，其体积为最大。这可将定理 9 和定理 30 結合行列式中的一些恆等式来証明。]

34 定义。若一角錐之底外切于一圓，又若角錐之高之垂足即为此圓之心，則称此角錐为一直角錐。

在一直角錐中各面皆有同一之高，且对底面皆有同样之傾角。

定理。設所給之两角錐有同一之高，其底具有同一之面积和周长；設其中一为直角錐，另一不是，則前者之面积小于后者之面积。

[Lhuillier [1, p. 116]]

1) 参考 Wedderburn [1].

[設 h 为高, b_v 为底的一边之长, p_v 为垂足至 b_v 之垂綫, 則后一角錐之側面积为

$$\frac{1}{2} \sum b_v \sqrt{(h^2 + p_v^2)} > \frac{1}{2} \sqrt{\{(\sum h b_v)^2 + (\sum p_v b_v)^2\}},$$

定理 25 之(2.11.4), 除非所有之 p_v 皆相等.]

(v) 初等分析中用到的某些不等式. 下之定理容易从定理 9 推出, 它在指数函数和对数函数理論中甚为重要.

35. 若 $\xi > -m$, $0 < m < n$, 則

$$\left(1 + \frac{\xi}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{\xi}{n}\right)^n.$$

又若再有 $\xi < m$, 則

$$\left(1 - \frac{\xi}{m}\right)^{-m} > \left(1 - \frac{\xi}{n}\right)^{-n}.$$

36. 若 $\xi > 0$, $\xi \neq 1$, $0 < m < n$, 則

$$n(\xi^{1/n} - 1) < m(\xi^{1/m} - 1).$$

由定理 9, 我們有

$$\left(1 + \frac{\xi}{m}\right)^{\frac{m}{n}} 1^{\frac{n-m}{n}} < \frac{m}{n} \left(1 + \frac{\xi}{m}\right) + \frac{n-m}{n} \cdot 1 = 1 + \frac{\xi}{n}.$$

若 $\xi < m$, 我們可写 $-\xi$ 代替 ξ . 此即証明了定理 35. 若将定理 36 中之 ξ 代以 $\left(1 \pm \frac{\xi}{m}\right)^m$, 則該定理由定理 35 即可得出. ✓

2.14. 几个基本不等式的归納証明. 我們的基本定理是定理 9, 定理 10 (或定理 11), 定理 24 (或定理 25), 簡称之为 G, H, M. 我們从 G 导出 H¹⁾, 又从 H 导出 M; G 是 H 的一个极限情形, H 是 M 的一个特別情形, 或 M 的先行定理.

G 的最簡單情形是

37. (G₀):

$$a^\alpha b^\beta < \alpha a + \beta b \quad (\alpha + \beta = 1).$$

我們先来証明, G 可从 G₀ 用归納法得出.

1) 虽然也給出了 H 的一个独立的証明.

假設我們已對 m 個文字 $a, b, \dots, k$ (或對任何較少的數目) 證明了 G , 又設

$$\alpha + \beta + \dots + \kappa + \lambda = 1, \quad \alpha + \beta + \dots + \kappa = \sigma,$$

則對兩個文字和對 m 個文字利用 G , 即得

$$\begin{aligned} a^\alpha b^\beta \dots k^\kappa l^\lambda &= (a^{\alpha/\sigma} b^{\beta/\sigma} \dots k^{\kappa/\sigma})^\sigma l^\lambda \\ &\leq (a^{\alpha/\sigma} b^{\beta/\sigma} \dots k^{\kappa/\sigma}) \sigma + l \lambda \\ &\leq a \alpha + b \beta + \dots + k \kappa + l \lambda. \end{aligned}$$

最終的結果中等號只當

$$a^{\alpha/\sigma} b^{\beta/\sigma} \dots k^{\kappa/\sigma} = l, \quad a = b = \dots = k$$

時成立, 亦即所有之文字皆相等時成立. 因之, G 對 $m+1$ 個文字成立.

H 和 M 的最簡單情形是

38. (H_0):

$$a_1^\alpha b_1^\beta + a_2^\alpha b_2^\beta < (a_1 + a_2)^\alpha (b_1 + b_2)^\beta \quad (\alpha + \beta = 1).$$

39. (M_0):

$$\begin{aligned} \{ & (a_1 + b_1)^r + (a_2 + b_1)^r \}^{1/r} \\ & < (a_1^r + a_2^r)^{1/r} + (b_1^r + b_2^r)^{1/r} \quad (r > 1) \end{aligned}$$

(當 $r < 1$ 時, 不等式反號). 將我們從 G 得出 H 從 H 得出 M 的推導方法加以特殊化, 即可從 G_0 得出 H_0 , 從 H_0 得出 M_0 . 我們也可利用歸納法從 H_0 和 M_0 推出 H 和 M , 但因這些歸納的證明對我們的論證無關緊要, 我們只大致描繪一下.

(i) 我們有

$$\begin{aligned} a_1^\alpha b_1^\beta + a_2^\alpha b_2^\beta + a_3^\alpha b_3^\beta &\leq (a_1 + a_2)^\alpha (b_1 + b_2)^\beta + a_3^\alpha b_3^\beta \\ &\leq (a_1 + a_2 + a_3)^\alpha (b_1 + b_2 + b_3)^\beta. \end{aligned}$$

這項手續可反復進行, 且不难弄清楚等號出現的情形. 於是我們就得到了定理 13 中之 (2.8.3) (對於各有 n 個數的兩個集合之 H).

其次, 若 $\alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha + \beta = \sigma$, 則有

$$\begin{aligned} \sum a^\alpha b^\beta c^\gamma &= \sum (a^{\alpha/\sigma} b^{\beta/\sigma})^\sigma c^\gamma \leq (\sum a^{\alpha/\sigma} b^{\beta/\sigma})^\sigma (\sum c)^\gamma \\ &\leq (\sum a)^\alpha (\sum b)^\beta (\sum c)^\gamma. \end{aligned}$$

這一手續也可反復進行, 由此即得出一般形式之 H .

我們也可从別的方面施行歸納法，即先增加集合的个数。由此所得到的界于两者之間的推广（对于各有两个数的任意多个集合之 H ）值得分开来叙述。

40. 若 $\alpha + \beta + \cdots + \lambda = 1$ ，則

$$a_1^\alpha b_1^\beta \cdots l_1^\lambda + a_2^\alpha b_2^\beta \cdots l_2^\lambda < (a_1 + a_2)^\alpha (b_1 + b_2)^\beta \cdots (l_1 + l_2)^\lambda,$$

除非 $a_1/a_2 = b_1/b_2 = \cdots = l_1/l_2$ ，或有一集合为 0。

(ii) 同理，我們也可从两个方面推广 M_0 。一方面有

$$\begin{aligned} & \{(a_1 + b_1 + c_1)^r + (a_2 + b_2 + c_2)^r\}^{1/r} \\ & \leq (a_1^r + a_2^r)^{1/r} + \{(b_1 + c_1)^r + (b_2 + c_2)^r\}^{1/r} \\ & \leq (a_1^r + a_2^r)^{1/r} + (b_1^r + b_2^r)^{1/r} + (c_1^r + c_2^r)^{1/r}, \end{aligned}$$

另一方面有

$$\begin{aligned} & \{(a_1 + b_1)^r + (a_2 + b_2)^r + (a_3 + b_3)^r\}^{1/r} \\ & \leq [\{(a_1^r + a_2^r)^{1/r} + (b_1^r + b_2^r)^{1/r}\}^r + (a_3 + b_3)^r]^{1/r} \\ & \leq (a_1^r + a_2^r + a_3^r)^{1/r} + (b_1^r + b_2^r + b_3^r)^{1/r}. \end{aligned}$$

将这些手續反复結合使用，即可得出一般情形。

2.15. 与定理 37 有关的初等不等式。我們可以将 G_0 写成

$$a^a < \{aa + b(1-a)\}b^{a-1}$$

或

$$a^a - b^a < ab^{a-1}(a-b) \quad (0 < a < 1),$$

此乃分析教科书中重要的一組不等式之一。整个这一組不等式将在下述定理 41 中表出。这定理很重要，值得給出一个真正符合于 § 1.7 中的准則的从本元出发的直接証明。

41. 若 x 与 y 为正且不相等，則

$$\begin{aligned} rx^{r-1}(x-y) & > x^r - y^r > ry^{r-1}(x-y) \\ & (r < 0 \text{ 或 } r > 1), \end{aligned} \quad (2.15.1)$$

$$\begin{aligned} rx^{r-1}(x-y) & < x^r - y^r < ry^{r-1}(x-y) \\ & (0 < r < 1). \end{aligned} \quad (2.15.2)$$

当 $r = 0$, $r = 1$ 或 $x = y$ 时，等号显然成立。我們先把这定理化为它的几种情形中的一种情形。

(i) 我們可設 r 为正. 盖若假定 (2.15.1) 当 $r > 1$ 时已經得到証明, 又假定 $r < 0$, $r = -s$, 因而 $s + 1 > 1$. 于是

$$\begin{aligned} x^r - y^r &= x^{-s} - y^{-s} = x^{-s} y^{-s-1} (y^{s+1} - x^s y) \\ &= x^{-s} y^{-s-1} \{ y^{s+1} - x^{s+1} - x^s (y - x) \} \\ &> x^{-s} y^{-s-1} s x^s (y - x) = r y^{r-1} (x - y). \end{aligned}$$

(2.15.1) 中之另一不等式可以同法处理.

(ii) 今設將 (2.15.1) 中左右两边之不等式分別記作 (1a) 和 (1b), (2.15.2) 之左右两边分別記作 (2a) 和 (2b). 若交換 x, y , 則 (1b) 和 (2b) 就变为 (1a) 和 (2a). 因此只須証明 (1b) 和 (2b) 即可.

(iii) 根据齐次性, 我們現可假定 $y = 1$.

定理 41 之証明現在化为下一定理之証明.

42. 若 x 为正且不等于 1, 則

$$x^r - 1 > r(x - 1) \quad (r > 1), \quad (2.15.3)$$

$$x^r - 1 < r(x - 1) \quad (0 < r < 1). \quad (2.15.4)$$

若在 (2.15.3) 中令 $r = 1/s$, $x = y^{1/r} = y^s$, 則它变为 (2.15.4), 不过是以 y, s 代替 x, r . 因此, 只須証明 (2.15.3) 即可.

若 q 为大于 1 的一个整数¹⁾, $y > 1$, 則

$$qy^q > 1 + y + \cdots + y^{q-1} = \frac{y^q - 1}{y - 1} > q.$$

若 $0 < y < 1$, 則不等式反号. 以 x 代 y^q , 則無論在何种情形皆有

$$\frac{x - 1}{x} < q(x^{1/q} - 1) < x - 1. \quad (2.15.5)$$

其次, 我們有

$$\begin{aligned} \frac{y^{q+1} - 1}{q + 1} - \frac{y^q - 1}{q} &= \frac{y - 1}{q(q + 1)} (qy^q - y^{q-1} - y^{q-2} - \cdots - 1) \\ &= \frac{(y - 1)^2}{q(q + 1)} \{ y^{q-1} + (y^{q-1} + y^{q-2}) + \cdots + (y^{q-1} + y^{q-2} + \cdots + 1) \}. \end{aligned}$$

1) 在这里我們放弃了通常对 q 和 p 的意义所作之約定.

花括号中包含了 $\frac{1}{2}q(q+1)$ 項, 每項皆在 y^q 和 1 之間, 于是有

$$\frac{1}{2}(y-1)^2 \leq \frac{y^{q+1}-1}{q+1} - \frac{y^q-1}{q} \leq \frac{1}{2}y^q(y-1)^2$$

(2.15.6)

因而若 p 为任何大于 q 之整数, 則

$$\frac{1}{2}(p-q)(y-1)^2 \leq \frac{y^p-1}{p} - \frac{y^q-1}{q} \leq \frac{1}{2}(p-q)y^p(y-1)^2$$

(2.15.7)

但由(2.15.5), 若 $x > 1$, 則有

$$\frac{(x-1)^2}{x^2} < q^2(x^{1/q}-1)^2 < (x-1)^2;$$

若 $0 < x < 1$, 則不等式反号. 因之, 若在(2.15.7)中以 x 代 y^q , 則得

$$\frac{p-q}{2q} \frac{(x-1)^2}{x^2} \leq \frac{x^{p/q}-1}{p/q} - (x-1) \leq \frac{p-q}{2q} x^{p/q}(x-1)^2$$

(2.15.8)

今設 $r > 1$. 若 r 为有理数, 我們令 $r = p/q$; 若 r 为无理数, 作 $p/q \rightarrow r$. 無論在何种情形皆有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(r-1) \frac{(x-1)^2}{x^2} &\leq \frac{x^r-1}{r} - (x-1) \\ &\leq \frac{1}{2}(r-1)x^r(x-1)^2 \quad (r > 1, x \geq 1), \end{aligned}$$

(2.15.9)

此显然包含(2.15.3).

这就証明了定理 42 和定理 41, 但若得出当 $r < 1$ 时与(2.15.9)相应之不等式, 这对于我們将会是有用的. 我們現于(2.15.7)中以 x 代 y^p , 并利用(2.15.5), 不过以 p 代 q , 則得

$$\frac{p-q}{2p} \frac{(x-1)^2}{x^2} \leq x-1 - \frac{x^{q/p}-1}{q/p} \leq \frac{p-q}{2p} x(x-1)^2$$

(2.15.10)

$$\frac{1}{2}(1-r)\frac{(x-1)^2}{x^2} \leq x-1-\frac{x^r-1}{r} \leq \frac{1}{2}(1-r)x(x-1)^2$$

$$(0 < r < 1, x \geq 1). \quad (2.15.11)$$

我們寧可把(2.15.3)的證明做得比需要的更精確,為的是要得出“二階”不等式(2.15.6)–(2.15.11),它們本身就是有意義的。若我們只要證明(2.15.3),我們可以如下進行。若 p 與 q 為整數,且 $p > q$,代替(2.15.6),我們就只寫

$$\frac{y^{q+1}-1}{q+1} > \frac{y^q-1}{q},$$

因而

$$\frac{y^p-1}{p} > \frac{y^q-1}{q}.$$

由是,對於有理數 r ,我們就得到了(2.15.3),經過取極限,就得

$$x^r-1 \geq r(x-1)$$

對於任何 $r > 1$ 皆成立。今若 r 為無理數,我們可寫 $r = \alpha s$,其中 α 與 s 皆大於1,且 α 為有理數。於是

$$\begin{aligned} x^r-1 &= (x^s)^\alpha-1 > \alpha(x^s-1) \\ &\geq \alpha s(x-1) = r(x-1), \end{aligned}$$

故(2.15.3)普遍成立。

關於滿足我們的要求的定理41的其他證明,可參考 Stolz 和 Gmeiner [1, pp. 202–208]和 Pringsheim [1]。Pringsheim 利用此結果得出了 H 的一個初等證明。Radon^[1, p. 135]從定理41推出了 H 和 M ,但他是利用微分法來證明這一點的。教科書中所載的定理41的證明,一般只限於有理數 r ;參考(比如)Chrystal [1, pp. 42–45], Hardy [1, p. 135]。

2.16. 定理3的初等證明。 在上節中我們順便證明了一些比定理41和定理42中所說的要精密的不等式。我們並不強調這點,因為利用微分法,不難求出更為精密的不等式(參看§4.2);但還是值得簡單的指出,若有需要,如何利用這些不等式去把定理3的證明“初等化”,

我們先注意, 对于固定的正 a 和小的(正的或負的) r , 我們有

$$a^r = 1 + O(r); \quad (2.16.1)$$

对于固定的 q 和小的 u , 有

$$(1 + u)^q = 1 + qu + O(u^2); \quad (2.16.2)$$

对于小的 r , 有

$$\{1 + O(r^2)\}^{1/r} = 1 + O(r). \quad (2.16.3)$$

这些公式可从上节之結果导出, 我們把它們的証明留給讀者.

今設 r 甚小, 由(2.16.1), 我們有 $a_v^r = 1 + u_v$, 其中 $u_v = O(r)$; 又由(2.16.2), 有

$$a_v^{q_v r} = (1 + u_v)^{q_v} = 1 + q_v u_v + O(r^2).$$

因之

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{M}_r} &= \left(\frac{a_1^{q_1 r} \cdots a_n^{q_n r}}{q_1 a_1^r + \cdots + q_n a_n^r} \right)^{1/r} \\ &= \left\{ \frac{(1 + u_1)^{q_1} \cdots (1 + u_n)^{q_n}}{q_1(1 + u_1) + \cdots + q_n(1 + u_n)} \right\}^{1/r} \\ &= \left\{ \frac{1 + q_1 u_1 + \cdots + q_n u_n + O(r^2)}{1 + q_1 u_1 + \cdots + q_n u_n} \right\}^{1/r} \\ &= \{1 + O(r^2)\}^{1/r} = 1 + O(r) \rightarrow 1. \end{aligned}$$

2.17. Чебышев (Tchebychef) 不等式. 我們已經知道(定理 24) $\mathfrak{M}_r(a + b)$ 和 $\mathfrak{M}_r(a) + \mathfrak{M}_r(b)$ 是可以比較的 (§ 1.6). 自然就会問 $\mathfrak{M}_r(ab)$ 是不是可以和 $\mathfrak{M}_r(a) \mathfrak{M}_r(b)$ 相比較. 下述定理 43 說明事实并非如此.

若对于所有之 μ, ν , 皆有

$$(a_\mu - a_\nu)(b_\mu - b_\nu) \geq 0,$$

我們就称 (a) 与 (b) 排法相似; 若对所有之 μ, ν , 上之不等式皆反号, 則称 (a) 与 (b) 为排法相反. 显而易見, 若附标有一排列 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$ 使 $a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, \cdots, a_{\nu_n}$ 和 $b_{\nu_1}, b_{\nu_2}, \cdots, b_{\nu_n}$ 皆为非降序列, 則 (a) 与 (b) 为排法相似. 若 $a_{\nu_1}, \cdots$ 为非升, 而 $b_{\nu_1}, \cdots$ 为非降, 則 (a) 与 (b) 排法相反; 其逆亦真.

43.¹⁾ 若 $r > 0$, 且 (a) 与 (b) 排法相似, 則

$$\mathfrak{M}_r(a)\mathfrak{M}_r(b) < \mathfrak{M}_r(ab), \quad (2.17.1)$$

除非所有之 a 或所有之 b 皆相等. 若 (a) 与 (b) 排法相反, 則不等式反号.

由(2.2.7), 我們只須討論 $r = 1$ 的情形即可. 由是,

$$\begin{aligned} \sum p \sum pab - \sum pa \sum pb &= \sum p_\mu \sum p_\nu a_\nu b_\nu - \sum p_\mu a_\mu \sum p_\nu b_\nu \\ &= \sum \sum (p_\mu p_\nu a_\nu b_\nu - p_\mu p_\nu a_\mu b_\nu) = \sum \sum (p_\nu p_\mu a_\mu b_\mu - p_\nu p_\mu a_\nu b_\mu) \\ &= \frac{1}{2} \sum \sum (p_\mu p_\nu a_\nu b_\nu - p_\mu p_\nu a_\mu b_\nu + p_\nu p_\mu a_\mu b_\mu - p_\nu p_\mu a_\nu b_\mu) \\ &= \frac{1}{2} \sum \sum p_\mu p_\nu (a_\mu - a_\nu)(b_\mu - b_\nu) \geq 0, \end{aligned}$$

或

$$\mathfrak{A}(a)\mathfrak{A}(b) \leq \mathfrak{A}(ab),$$

只要序列排法相似.

我們可以决定等号出現之情形如下. 依照本节早先所作之說明, 我們可以假定 (a) 与 (b) 为非降. 上之二重和包含一項

$$p_1 p_n (a_1 - a_n)(b_1 - b_n),$$

而这只当所有之 a 或所有之 b 皆相等时才为 0.

一个直接的推論是: 若 r 为正, 且 $(a), (b), \dots, (l)$ 全为排法相似, 則

$$\mathfrak{M}_r(a)\mathfrak{M}_r(b) \cdots \mathfrak{M}_r(l) < \mathfrak{M}_r(ab \cdots l);$$

特別, 若 m 为大于 1 之整数, 則

$$\mathfrak{M}_r(a) < \mathfrak{M}_{mr}(a).$$

这包含定理 6, 但包含于定理 16 中.

本节开头所提出之問題包含在一个更为廣泛的問題之中, 這問題由下之定理所解决.

44. 設 $r, s, \dots, v$ 皆为正, 則 $\mathfrak{M}_r(ab \cdots l)$ 与 $\mathfrak{M}_s(a), \mathfrak{M}_t(b),$

1) 此定理在积分方面的类似定理属于 Чебышев. 参考 Hermite [1, pp. 46—47], Franklin [1], Jensen [1] 以及定理 236. 当 $r = 1$ 时, $\mathfrak{M}_r = \mathfrak{A}$, 此不等式对任何实的排法相似之 a, b 皆成立.

..., $\mathfrak{M}_r(l)$ 为可比較之充要条件是

$$\frac{1}{r} \geq \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \cdots + \frac{1}{v}; \quad (2.17.2)$$

此时有

$$\mathfrak{M}_r(ab \cdots l) \leq \mathfrak{M}_r(a)\mathfrak{M}_r(b) \cdots \mathfrak{M}_r(l). \quad (2.17.3)$$

条件之为充分这一点可从定理 12 和定理 16 立刻得出。若我們將(2.17.3)中之每一集都取作 $(1, 0, 0, \cdots, 0)$, 我們立即看出(2.17.2)也是必要的。要找一個對於任何 $r, s, \cdots$ 皆成立的与(2.17.3)相反的一般性的不等式是不可能的, 因为 $a_\nu b_\nu \cdots l_\nu$ 可能对每一 ν 皆为 0 而右边仍然可以为正。

2.18. Muirhead 定理. 在本节以及其下四节中我們皆假定 a 严格为正。我們令

$$\sum! F(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

表示从 $F(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 經 a 的各种可能排列而得到的 $n!$ 个項所成之和。我們只討論特殊情形

$$F(a_1, a_2, \cdots, a_n) = a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n} (a_\nu > 0, a_\nu \geq 0).$$

令

$$[a] = [a_1, a_2, \cdots, a_n] = \frac{1}{n!} \sum! a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n}.$$

显而易見, $[a]$ 对 a 之任何排列不变, 因此若兩組 a 只在排列上有差异时, 我們可以把它們看为同一。我們可以把形如 $[a]$ 之平均称为对称平均。

特別有

$$[1, 0, 0, \cdots, 0] = \frac{(n-1)!}{n!} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \mathfrak{A}(a),$$

$$\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n} \right] = \frac{n!}{n!} a_1^{1/n} a_2^{1/n} \cdots a_n^{1/n} = \mathfrak{G}(a),$$

此即具有单位权之算术平均和几何平均。当 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ 时, $[a]$ 即为 $\mathfrak{A}(a)$ 和 $\mathfrak{G}(a)$ 之一共同推广。

一般說来, $[a']$ 与 $[a]$ 是不能按照 § 1.6 中之意义作比較的。本节以及下面两节中所解决的問題就是决定可比条件的問題。

当 (α) 与 (α') 可以排列得使之满足下述三个条件:

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n; \quad (2.18.1)$$

$$\alpha'_1 \geq \alpha'_2 \geq \cdots \geq \alpha'_n, \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n; \quad (2.18.2)$$

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_v \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_v \\ (1 \leq v < n) \quad (2.18.3)$$

时, 则称 (α') 为 (α) 所控制 (majorised), 并记作

$$(\alpha') \prec (\alpha).$$

第二个条件本身并非一个限制, 因为我们将 (α') 和 (α) 按任意次序排列; 但它对于第三个条件的叙述则是重要的. 显然有

$$(\alpha) \prec (\alpha).$$

45. $[\alpha']$ 与 $[\alpha]$ 对于所有正值 x 为可比较之充要条件是: (α') 和 (α) 中有一个为另一个所控制. 若 $(\alpha') \prec (\alpha)$, 则

$$[\alpha'] \leq [\alpha]. \quad (2.18.4)$$

等号只当 (α') 和 (α) 完全相同或所有之 α 皆相等时成立¹⁾.

2.19. Muirhead 定理的证明. (1) 条件为必要的. 我们显然可以假定 (2.18.2) 成立, 且 (2.18.4) 对所有之正 x 也成立. 取所有之 x 皆等于 x , 则得

$$x^{\Sigma \alpha'} = [\alpha'] \leq [\alpha] = x^{\Sigma \alpha}.$$

这只有当 (2.18.1) 成立时才能够既对大的 x 又对小的 x 皆成立.

其次, 我们取

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_v = x, \quad \alpha_{v+1} = \cdots = \alpha_n = 1,$$

x 为充分大. 因 (α') 与 (α) 为按降序排列, 故 $[\alpha']$ 和 $[\alpha]$ 中 x 的最高次幂之指数分别为

$$\alpha'_1 + \alpha'_1 + \cdots + \alpha'_v, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_v.$$

显而易见, 前者不能超过后者, 此即证明 (2.18.3).

(2) 条件为充分的. 这一点的证明是相当麻烦的, 我们需要一个新的定义和两条引理.

我们定义诸 α 之一特殊类型的线性变换, 而称之为变换 T .

1) 定理 45 主要属于 Muirhead^[1]; 但 Muirhead 只考虑了整的 α .

这个变换如下。設 a_k 与 a_l 为两个不相等之 a , 前者較大; 令

$$a_k = \rho + \tau, \quad a_l = \rho - \tau \quad (0 < \tau \leq \rho). \quad (2.19.1)$$

今若

$$0 \leq \sigma < \tau \leq \rho, \quad (2.19.2)$$

則由

$$\left. \begin{aligned} a'_k &= \rho + \sigma = \frac{\tau + \sigma}{2\tau} a_k + \frac{\tau - \sigma}{2\tau} a_l, \\ a'_l &= \rho - \sigma = \frac{\tau - \sigma}{2\tau} a_k + \frac{\tau + \sigma}{2\tau} a_l, \\ a'_v &= a_v \quad (v \neq k, v \neq l) \end{aligned} \right\} \quad (2.19.3)$$

定义一变换 T . 若 (a') 系从 (a) 經一变换 T 而得到, 則写 $a' = Ta$. 这定义并不一定含有 a 或 a' 是按降序排列的意思.

显而易见, 若下述两个引理得到証明, 則我們的可比条件的充分性即成立, 而且在定理 45 中关于等号情形所說的一切也就得到証明.

引理 1. 若 $a' = Ta$, 則 $[a'] \leq [a]$, 等号只当所有之 a 皆相等时成立.

引理 2. 若 $(a') \prec (a)$, 但 (a') 不恆等于 (a) , 則 (a') 可从 (a) 經連續运用有限多个变换 T 后得出.

引理 1 的証明. 我們可以将 (a) 和 (a') 加以排列, 使得 $k = 1, l = 2$. 于是

$$\begin{aligned} & n!2[a] - n!2[a'] \\ &= n!2[\rho + \tau, \rho - \tau, a_3, \dots] - n!2[\rho + \sigma, \rho - \sigma, a_3, \dots] \\ &= \sum! a_3^{a_3} \dots a_n^{a_n} (a_1^{\rho+\tau} a_2^{\rho-\tau} + a_1^{\rho-\tau} a_2^{\rho+\tau} - a_1^{\rho+\sigma} a_2^{\rho-\sigma} - a_1^{\rho-\sigma} a_2^{\rho+\sigma}) \\ &= \sum! (a_1 a_2)^{\rho-\tau} a_3^{a_3} \dots a_n^{a_n} (a_1^{\tau+\sigma} - a_2^{\tau+\sigma})(a_1^{\tau-\sigma} - a_2^{\tau-\sigma}) \geq 0, \end{aligned} \quad (2.19.4)$$

等号只当所有之 a 皆相等时成立.

引理 2 的証明. 我們假定条件 (2.18.2) 成立, 并将差数 $a_v - a'_v$ 中不为 0 者之个数称为 (a) 与 (a') 的异度 (discrepancy); 若异度为 0, 則此二集合为同一. 我們現用归納法来証明此引理, 即假定其当异度小于 r 时成立而来証明它在异度为 r 时亦成立.

于是我們就假定 $(a') \prec (a)$, 且假定异度为 $r > 0$. 因由

(2.18.1), $\sum(\alpha_v - \alpha'_v) = 0$, 且这些差数并非皆为 0, 故其中必有为正者和为负者; 又由(2.18.3), 第一个不为 0 者必为正, 因此我們可求出 k 与 l , 使得

$$\alpha'_k < \alpha_k, \alpha'_{k+1} = \alpha_{k+1}, \dots, \alpha'_{l-1} = \alpha_{l-1}, \alpha'_l > \alpha_l^{1)}, \quad (2.19.5)$$

我們取 $\alpha_k = \rho + \tau$, $\alpha_l = \rho - \tau$, 有如(2.19.1), 并定义

$$\sigma = \max(|\alpha'_k - \rho|, |\alpha'_l - \rho|). \quad (2.19.6)$$

于是, 因 $\alpha_k > \alpha_l$, 故 $0 < \tau \leq \rho$. 又因 $\alpha'_k \geq \alpha'_l$, 故

$$\alpha'_l - \rho = -\sigma, \quad \alpha'_k - \rho = \sigma$$

中总有一个成立²⁾; 因 $\alpha'_k < \alpha_k$, 而 $\alpha'_l > \alpha_l$, 故 $\sigma < \tau$. 因之

$$0 \leq \sigma < \tau \leq \rho,$$

正如(2.19.2)所云者.

我們現今

$$\alpha''_k = \rho + \sigma, \alpha''_l = \rho - \sigma, \alpha''_v = \alpha_v \quad (v \neq k, v \neq l). \quad (2.19.7)$$

若 $\alpha'_k - \rho = \sigma$, 則 $\alpha''_k = \alpha'_k$; 若 $\alpha'_l - \rho = -\sigma$, 則 $\alpha''_l = \alpha'_l$ ³⁾. 因数对 α_k, α'_k 和 α_l, α'_l 各对 (α') 和 (α) 之間的异度 r 提供了一个单位, 故 (α') 和 (α'') 之間的异度就比 r 为小, 它是 $r - 1$ 或 $r - 2$.

其次, 我們將(2.19.7)与(2.19.3)加以比較, 并注意(2.19.2)成立, 則可看出 (α'') 可由 (α) 經一变换 T 而得到.

最后, 我們来証 (α') 系由 (α'') 所控制. 欲明此理, 我們必須証明当用 α'' 代 α 时, 与(2.18.1), (2.18.2), (2.18.3)相对应之条件皆成立. 对于第一个条件, 我們有

$$\alpha''_k + \alpha''_l = 2\rho = \alpha_k + \alpha_l, \quad \sum \alpha' = \sum \alpha = \sum \alpha''. \quad (2.19.8)$$

对于第二个条件, 我們先注意

$$\begin{aligned} \alpha'_k &\leq \rho + |\alpha'_k - \rho| \leq \rho + \sigma = \alpha''_k, \\ \alpha'_l &\geq \rho - |\alpha'_l - \rho| \geq \rho - \sigma = \alpha''_l, \end{aligned}$$

1) $\alpha_l - \alpha'_l$ 为第一个负差, $\alpha_k - \alpha'_k$ 为在它之前的最后一个正差. 課文中假定 $l - k > 1$; $l - k = 1$ 的情况是較容易的.

2) 可能两个同时成立.

3) 同样, 可能这两个方程皆成立.

因而由(2.19.5), 有

$$\begin{aligned} \alpha''_{k-1} = \alpha_{k-1} &\geq \alpha_k = \rho + \tau > \rho + \sigma \\ &= \alpha''_k \geq \alpha'_k \geq \alpha'_{k+1} = \alpha_{k+1} = \alpha''_{k+1}, \\ \alpha''_{l-1} = \alpha_{l-1} &= \alpha'_{l-1} \geq \alpha'_l \geq \alpha'_l \\ &= \rho - \sigma > \rho - \tau = \alpha_l \geq \alpha_{l+1} = \alpha''_{l+1}. \end{aligned}$$

关于諸 α'' 的不等式即为所要的不等式。最后, 我們要来証明

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_v \leq \alpha''_1 + \alpha''_2 + \cdots + \alpha''_v.$$

由(2.19.7)和(2.18.3), 上式当 $v < k$ 或 $v \geq l$ 时成立; 因它对 $v = k-1$ 成立, 且 $\alpha'_k \leq \alpha''_k$, 故它对 $v = k$ 亦成立; 又因它对 $v = k$ 成立, 且对 $k < v < l$, α'_v 与 α''_v 相同, 故它对 $k < v < l$ 也成立。

于是, 我們就証明了 (α') 为 (α'') 所控制, 而 (α'') 乃是由 (α) 經一变换 T 所得, 它与 (α') 之异度小于 r , 这証明了引理 2, 因而也就完全証明了定理 45¹⁾。

2.20. 一个另外的定理. 对于 (α) 与 (α') , 若存在 n^2 个数 $p_{\mu\nu}$, 使得

$$p_{\mu\nu} \geq 0, \sum_{\mu=1}^n p_{\mu\nu} = 1, \sum_{\nu=1}^n p_{\mu\nu} = 1, \quad (2.20.1)$$

及

$$\alpha'_\mu = p_{\mu 1}\alpha_1 + p_{\mu 2}\alpha_2 + \cdots + p_{\mu n}\alpha_n, \quad (2.20.2)$$

則称 (α') 为 (α) 之一均值 (average). 因条件(2.20.1)对諸 μ 或諸 ν 之間的一置換并无影响, 故此定义正如 § 2.18 中之定义一样, 与諸 α 或諸 α' 之次序无关. 方程(2.19.3)說明当(2.19.2)成立时, $(\rho + \sigma, \rho - \sigma, \alpha_3, \cdots)$ 是 $(\rho + \tau, \rho - \tau, \alpha_3, \cdots)$ 的一个均值. (2.20.1)中之最后两个条件也可表述如下: $\sum \alpha'$, 当表示成諸 α 之一函数时, 与 $\sum \alpha$ 相同, 且若每一 α 皆为 1, 則每一 α' 皆为 1. 由此可知, 这一关系是可传递的; 若 (α') 为 (α) 之一均值, (α'') 为 (α') 之一均值, 則 (α'') 为 (α) 之一均值. 由此以及 § 2.19 中之引理 2 可知, 若 $(\alpha') \prec (\alpha)$, 則 (α') 为 (α) 之一均值.

1) 关于另外的証明, 可参考定理 74 和定理 75.

其逆亦真。蓋若假定(2.20.1)和(2.20.2)成立，則將諸方程(2.20.2)相加即得(2.18.1)。最后，若假定 (α) 与 (α') 按降幂排列，并令

$$p_{1\nu} + p_{2\nu} + \cdots + p_{m\nu} = k_\nu,$$

則由(2.20.1)，有 $k_\nu \leq 1$ 且 $\sum k_\nu = m$ ；因而

$$\begin{aligned} & \alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_m \\ & \leq k_1 \alpha_1 + \cdots + k_{m-1} \alpha_{m-1} + (m - k_1 - \cdots - k_{m-1}) \alpha_m \\ & \leq (\alpha_1 - \alpha_m) + \cdots + (\alpha_{m-1} - \alpha_m) + m \alpha_m \\ & = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m, \end{aligned}$$

此即(2.18.3)。

于是，我們已經証明了下述两个定理。

46. (α') 为 (α) 之一均值的充要条件是 $(\alpha') \prec (\alpha)$ 。

47. $[\alpha']$ 与 $[\alpha]$ 为可比較之充要条件是 (α') 与 (α) 中有一为另一之一均值。若 (α') 为 (α) 之一均值，則 $[\alpha'] \leq [\alpha]$ ，等号成立之条件与定理 45 同。

2.21. 关于对称平均的其它定理。 (1) 定理 45 与定理 47 滿足了两个目的。第一，無論是哪一個定理，皆給出了一个簡單的判別法，用以決定两个平均 $[\alpha]$ 与 $[\alpha']$ 是不是可以比較的；第二，定理 45 的証明給我們指出，如何反复运用变换(2.19.3)和公式(2.19.4)，把两个可比較的的平均之差分解成一个各項显然为正之和。比如說，我們对于(具有单位权的)算术平均和几何平均定理就得到了一个新的而且是有趣的証明。事实上，

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(a^n) - \mathfrak{G}(a^n) &= [n, 0, 0, \cdots, 0] - [1, 1, \cdots, 1] \\ &= ([n, 0, 0, \cdots, 0] - [n-1, 1, 0, \cdots, 0]) \\ &\quad + ([n-1, 1, 0, \cdots, 0] - [n-2, 1, 1, 0, \cdots, 0]) \\ &\quad + ([n-2, 1, 1, 0, \cdots, 0] - [n-3, 1, 1, 1, 0, \cdots, 0]) + \cdots \\ &= \frac{1}{2(n!)} \{ \sum! (a_1^{n-1} - a_2^{n-1})(a_1 - a_2) \\ &\quad + \sum! (a_1^{n-2} - a_2^{n-2})(a_1 - a_2)a_3 \\ &\quad + \sum! (a_1^{n-3} - a_2^{n-3})(a_1 - a_2)a_3a_4 + \cdots \}. \end{aligned}$$

因为除了 $a_r = a_s$ 外,

$$(a_r - a_s)(a_r^v - a_s^v) > 0,$$

由此即得定理¹⁾.

(2) 48. 若 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$, 則

$$\mathfrak{G}(a) < [\alpha] < \mathfrak{U}(a),$$

除非 $[\alpha]$ 就是 $\mathfrak{G}(a)$ 或 $\mathfrak{U}(a)$, 或者所有之 a 皆相等.

这定理²⁾說明, 所有的一次齐次式 $[\alpha]$ 与 $\mathfrak{G}(a)$ 和 $\mathfrak{U}(a)$ 皆可比較, 虽然它們自身之間一般不是都可比較的. 要証明这点, 我們現运用定理 47; 因

$$\frac{1}{n} = \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n} + \cdots + \frac{\alpha_n}{n},$$

且 $\alpha_\mu = \alpha_\mu \cdot 1 + \alpha_{\mu+1} \cdot 0 + \cdots + \alpha_n \cdot 0 + \alpha_1 \cdot 0 + \cdots + \alpha_{\mu-1} \cdot 0$, 故 $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right)$ 是 (α) 之一均值, (α) 是 $(1, 0, \cdots, 0)$ 之一均值. 我們也可从定理 45 直接推出定理 48.

(3) 我們加上两个具有同类性質的定理, 但只給出証明的綱要.

49. 若 $0 < \sigma \leq 1$, 則 $[\alpha'] \leq [\alpha]^\sigma$ 之充要条件为 $(\alpha') \prec (\sigma\alpha)$. 若 $\sigma > 1$, 則条件为必要, 但非充分.

[要証明条件为必要, 可跟随 § 2.19(1) 的綫索进行. 要証明条件为充分, 可結合定理 45 和定理 11 来做. 作为一个例子, 我們有

$$[r, 0, 0, \cdots] \leq [s, 0, 0, \cdots]^{\sigma} \quad (0 < r < s);$$

此即 $\mathfrak{M}_r(a) \leq \mathfrak{M}_s(a)$ (定理 16), 其权为 1. 此一例子說明, 当 $\sigma > 1$ 时, 条件不再是充分的.]

50. 若 r, p, a 为正, 且

$$T_r = \sum p_v a_v^r = \mathfrak{T}_r$$

(用 § 2.10 (iv) 之記号), 則

1) 这一証明在 Muirhead 的工作之前即已知道; 参考 Hurwitz [1].

2) 是由 L. Schur 教授告訴我們的.

$$T_{a'_1} T_{a'_2} \cdots T_{a'_n} \leq T_{a_1} T_{a_2} \cdots T_{a_n}$$

对所有的 a 与 p 皆成立之充要条件是 $(a') \prec (a)$.

[条件之为必要, 可如前证明. 欲证其为充分, 我们可用定理 46 和 Hölder 不等式, 由此即得

$$\begin{aligned} T_{a'_\mu} &= T_{s_{\mu 1} a_1 + s_{\mu 2} a_2 + \cdots + s_{\mu m} a_m} \\ &\leq (T_{a_1})^{s_{\mu 1}} (T_{a_2})^{s_{\mu 2}} \cdots (T_{a_m})^{s_{\mu m}}. \end{aligned}$$

为了避免与 § 2.10 的符号矛盾, 我们已将符号作了轻微的改变. 两边相乘即得所要之结果.]

2.22. n 个正数之初等对称函数. 若

$$\begin{aligned} &(x + a_1)(x + a_2) \cdots (x + a_n) \\ &= x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_n \\ &= x^n + \binom{n}{1} p_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} p_2 x^{n-2} + \cdots + p_n, \end{aligned}$$

则 c_r 即为诸 a 之第 r 个初等对称函数, 即每次取 r 个不同之 a 作成之积之和, 而 p_r 即为这些积之均值. 在本节中, 我们要讨论有关此诸 p_r 的两个众所周知的定理. 我们写 $c_0 = p_0 = 1$.

按照 § 2.18 的记号,

$$\begin{aligned} c_r &= \frac{1}{r!(n-r)!} \sum a_1 a_2 \cdots a_r, \\ p_r &= \frac{r!(n-r)!}{n!} c_r = [1, 1, \cdots, 1, 0, 0, \cdots, 0], \end{aligned}$$

其中有 r 个 1 和 $n-r$ 个 0. 又 $p_1 = \mathfrak{A}(a)$, $p_n = \mathfrak{B}^n(a)$, 其权为 1. 不同之 p_r 具有不同之次数, 故为不可比较¹⁾; 但它们之间却由一些非线性不等式所联系.

51. $p_{r-1} p_{r+1} < p_r^2$ ($1 \leq r < n$), 除非所有之 a 皆相等.

52. $p_1 > p_2^{1/2} > p_3^{1/3} > \cdots > p_n^{1/n}$, 除非所有之 a 皆相等.

定理 51 是由牛顿²⁾得出的, 实际上它对于实数 a 皆成立, a 不一定为正; 在 § 4.3 中, 我们将依据微分法, 给出这个更广泛的定理

1) 这是定理 45 的一个简单情形.

2) Newton [1, p. 173]. 也参考 Maclaurin [2].

的一个証明. 定理 52 属于 Maclaurin¹⁾.

定理 52 是定理 51 的一个推論, 盖由

$$(p_0 p_2)(p_1 p_3)^2(p_2 p_4)^3 \cdots (p_{r-1} p_{r+1})^r < p_1^2 p_2^4 p_3^6 \cdots p_r^{2r},$$

即得

$$p_{r+1}^r < p_r^{r+1} \text{ 或 } p_r^{1/r} > p_{r+1}^{1/(r+1)}.$$

这一点說明, 加上 § 4.3 的証明, 就解决了这两个定理. 但利用本章的方法来考虑它們的証明还是有意义的.

(i) 利用 § 2.6 (iii) 的方法作出定理 52 的証明. 我們先証明一个与定理 51 类似但要弱一些的定理.

$$53.^{2)} c_{r-1} c_{r+1} < c_r^2.$$

这定理比定理 51 弱, 因 $p_{r-1} p_{r+1} < p_r^2$ 就是

$$\frac{(r+1)(n-r+1)}{r(n-r)} c_{r-1} c_{r+1} < c_r^2.$$

要証明此定理, 我們可注意, $c_{r-1} c_{r+1} - c_r^2$ 中之一典型項为

$$a_1^2 a_2^2 \cdots a_{r-s}^2 a_{r-s+1} \cdots a_{r+s},$$

而这项以系数

$$\binom{2s}{s-1} - \binom{2s}{s} < 0$$

出現.

若 $r < s$, 則由定理 53 即得

$$c_{r-1} c_s < c_r c_{s-1}. \quad (2.22.1)$$

我們現在可以証明定理 52 如下. 若諸 a 不全相等, 令 $a_1 = \min a$, $a_2 = \max a$, 于是

$$a_1 < a_i < a_2, \quad (2.22.2)$$

其中

$$a_1 = p_\mu^{1/\mu}.$$

1) Maclaurin [2], 也可参考 Schlömilch [1]. 不等式 $p_1 > p_n^{1/n}$ 是定理 9 的一种情形.

2) 如同定理 51 和定理 52 一样, 这定理是对正的 a 来說的. 但如証明中所指出, 它对非真的 a 也成立, 除非 $c_r = 0$ (即除 $r-1$ 个 a 之外, 其它之 a 皆为 0).

我們用 a_1 和 a_2 分別代替 α_1 和 α_2 , 而选取 a_2 使得 p_μ 不動. 然後證明, 對於 $\nu > \mu$, 任何 p_ν 經此代換之後皆增大. 則所要之結果將如同 § 2.6 (iii) 中一樣得出.

我們有

$$\binom{n}{\mu} p_\mu = c_\mu = a_1 a_2 c'_{\mu-2} + (a_1 + a_2) c'_{\mu-1} + c'_\mu,$$

其中 c'_r 乃是 a_1 和 a_2 以外的 $n-2$ 個數所做成的 c_r . 因 p_μ 不變, 故

$$\begin{aligned} a_1 a_2 c'_{\mu-2} + (a_1 + a_2) c'_{\mu-1} + c'_\mu \\ = a_1 a_2 c'_{\mu-2} + (\alpha_1 + \alpha_2) c'_{\mu-1} + c'_\mu, \\ (a_1 a_1 - a_1 a_2) c'_{\mu-2} = -(\alpha_1 + \alpha_2 - a_1 - a_2) c'_{\mu-1}, \quad (2.22.3) \end{aligned}$$

$$(a_1 c'_{\mu-2} + c'_{\mu-1}) a_2 = a_1 a_2 c'_{\mu-2} + (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1) c'_{\mu-1}. \quad (2.22.4)$$

由(2.22.2)可知, 由(2.22.4)所定義之 a_2 之值為正.

又若 p_ν 變為 p_ν^* , 則

$$\binom{n}{\nu} (p_\nu^* - p_\nu) = (\alpha_1 a_2 - a_1 a_2) c'_{\nu-2} + (\alpha_1 + \alpha_2 - a_1 - a_2) c'_{\nu-1};$$

因而 $p_\nu^* - p_\nu$ 與

$$(\alpha_1 + \alpha_2 - a_1 - a_2) \left(\frac{c'_{\nu-1}}{c'_{\nu-2}} - \frac{c'_{\mu-1}}{c'_{\mu-2}} \right)$$

具有同樣之符號. 由(2.22.1), 第二個因子為負; 由(2.22.3)及(2.22.2),

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\alpha_1 + \alpha_2 - a_1 - a_2) &= \operatorname{sgn}(a_1 a_2 - \alpha_1 \alpha_2) \\ &= \operatorname{sgn}\{\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2 - a_1 - a_2) + a_1 a_2 - \alpha_1 \alpha_2\} \\ &= \operatorname{sgn}\{(\alpha_1 - a_1)(\alpha_1 - a_2)\} = -1. \end{aligned}$$

故得 $p_\nu^* > p_\nu$, 此即證明定理.

(ii) 利用歸納法作出的定理 51 的證明¹⁾. 假設定理 51 已經對 $n-1$ 個數 $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 得到了證明, 又假設 c'_r, p'_r 就是這

1) 這證明是由 A. L. Dixon, A. E. Jolliffe 和 M. H. A. Newman 相互無關地告訴我們的.

$n-1$ 个数所作成的 c_r, p_r . 我們先假定这 $n-1$ 个数不全相等, 于是

$$c_r = c'_r + a_n c'_{r-1},$$

因而

$$p_r = \frac{n-r}{n} p'_r + \frac{r}{n} a_n p'_{r-1}.$$

由此即得

$$n^2(p_{r-1}p_{r+1} - p_r^2) = A + Ba_n + Ca_n^2,$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \{(n-r)^2 - 1\} p'_{r-1} p'_{r+1} - (n-r)^2 p'^2_r, \\ B &= (n-r+1)(r+1) p'_{r-1} p'_r + \\ &\quad + (n-r-1)(r-1) p'_{r-2} p'_{r+1} - 2r(n-r) p'_{r-1} p'_r, \\ C &= (r^2 - 1) p'_{r-2} p'_r - r^2 p'^2_{r-1}. \end{aligned}$$

因 $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 不全相等, 故由归纳法假设, 有

$$p'_{r-1} p'_{r+1} < p'^2_r, \quad p'_{r-2} p'_r < p'^2_{r-1}, \quad p'_{r-2} p'_{r+1} < p'_{r-1} p'_r,$$

故

$$\begin{aligned} A &< -p'^2_r, \quad B < 2p'_{r-1} p'_r, \quad C < -p'^2_{r-1}, \\ n^2(p_{r-1}p_{r+1} - p_r^2) &< -(p'_r - a_n p'_{r-1})^2 \leq 0. \end{aligned}$$

此即证明定理。当

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1}$$

时, 结果仍然成立, 盖此时有 $a_n \neq a_1 = p'_r/p'_{r-1}$.

定理 51 也可利用 § 2.21(1) 中所讨论的那种类型的恒等式来证明。

54.

$$p_r^2 - p_{r-1}p_{r+1} = \frac{1}{r(r+1) \binom{n}{r} \binom{n}{r+1}} \sum_{i=0}^{r-1} \binom{2i}{i} \frac{(r, i)}{i+1},$$

其中

$$(r, i) = \sum a_1^2 \cdots a_{r-i-1}^2 a_{r-i} \cdots a_{r+i-1} (a_{r+i} - a_{r+i+1})^2,$$

求和记号是对诸 a 按所述形式作成的所有乘积而取者。

55.

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{n!}{(r-1)!(n-r-1)!} \right\}^2 (p_r^2 - p_{r-1}p_{r+1}) \\
&= (n-1) \sum (a_1 - a_2)^2 (c_{r-1}^{n-2})^2 \\
& \quad + \frac{2!(n-3)}{(r-1)(n-r-1)} \sum (a_1 - a_2)^2 (a_3 - a_4)^2 (c_{r-2}^{n-4})^2 \\
& \quad + \frac{3!(n-5)}{(r-1)(r-2)(n-r-1)(n-r-2)} \\
& \quad \times \sum (a_1 - a_2)^2 (a_3 - a_4)^2 (a_5 - a_6)^2 (c_{r-3}^{n-6})^2 + \dots,
\end{aligned}$$

其中 c_{r-1}^{n-2} 乃是一个和数，它的項是由异于 a_1, a_2 之 $n-2$ 个 a 中每次取 $r-1$ 个作成之积，余类推。

定理 54 属于 Muirhead^[1]，定理 55 属于 Jolliffe^[1]。定理 55 给出定理 51 的更一般形式的(对正负 a) 一个“直观的”证明，定理 51 是在本节开头提到的。

2.23. 关于有定形式(definite form)的一点说明。 在 § 2.21

(1) 中所证明的 Hurwitz 和 Muirhead 恒等式指出：当 $a > 0$ 时，

$$a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n - na_1a_2 \dots a_n$$

可以表示成一个和数，其中每一項显然是非负的。

若令 $a_1 = x_1^2, a_2 = x_2^2, \dots$ ，则得

$$\begin{aligned}
& x_1^{2n} + \dots + x_n^{2n} - nx_1^2x_2^2 \dots x_n^2 \\
&= \frac{1}{2(n-1)!} \{ \sum! (x_1^{2n-2} - x_2^{2n-2})(x_1^2 - x_2^2) + \dots \}. \quad (2.23.1)
\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}
& (x_1^{2n-2} - x_2^{2n-2})(x_1^2 - x_2^2) \\
&= (x_1^2 - x_2^2)^2 (x_1^{2n-4} + x_1^{2n-6}x_2^2 + \dots + x_2^{2n-4})
\end{aligned}$$

是 $(x_1^2 - x_2^2)x_1^{n-2}$ 等等多項式的平方和，故(2.23.1)的右边是一平方和。最后，因

$$\begin{aligned}
& x_1^{2n} + \dots + x_{2n}^{2n} - 2nx_1x_2 \dots x_{2n} \\
&= x_1^{2n} + \dots + x_n^2 - nx_1^2 \dots x_n^2 \\
& \quad + x_{n+1}^{2n} + \dots + x_{2n}^{2n} - nx_{n+1}^2 \dots x_{2n}^2 \\
& \quad + n(x_1 \dots x_n - x_{n+1} \dots x_{2n})^2,
\end{aligned}$$

故得

$$F = x_1^{2n} + \cdots + x_{2n}^{2n} - 2nx_1x_2 \cdots x_{2n} = \sum_i P_i^2, \quad (2.23.2)$$

其中諸 P_i 为 n 次多項式。例如

$$\begin{aligned} & x^6 + y^6 + z^6 + u^6 + v^6 + w^6 - 6xyzuvw \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) \{ (y^2 - z^2)^2 \\ & \quad + (z^2 - x^2)^2 + (x^2 - y^2)^2 \} \\ & \quad + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \{ (v^2 - w^2)^2 \\ & \quad + (w^2 - u^2)^2 + (u^2 - v^2)^2 \} + 3(xyz - uvw)^2 \end{aligned}$$

即為 $9 + 9 + 1 = 19$ 个实多項式之一平方和。

一个实形式乃是 m 个实变数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 之一实系数齐次多項式 $F(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 。若一形式 F 在变数之某一区域内不变号，比如說，若 $F \geq 0$ ，則称此 F 在該区域内为有定的。我們可将有定形式分为正形式和負形式。显然只須考虑正形式即可。例如，形式(2.23.2)在变数的整个实值区域内为正的。显而易见，具有此項性質之一形式必为偶数次。

若在某一区域中 $F > 0$ ，則称 F 在該区域中为严格正的。

形式(2.23.2)以及定理 7 和定理 55 中所討論的形式（以 x 代 a ），皆可表为实多項式之平方和。因而自然要問，是不是这就是有定形式之一共同性質。若 $F \geq 0$ 对所有实 x 成立，是不是就有

$$F = \sum_i P_i^2,$$

其中 P_i 为实多項式。

这一問題已为 Hilbert¹⁾ 全部解决。这里由于篇幅的限制，只能作一些零星的說明。我們先注意，有两种情形答案是可立刻得出的。記 F 之次数为 $2n$ ，变数的个数为 m 。

1) Hilbert [1]，參看附录 1。

若 $m = 2$, 即 $F = F(x, y)$, 而 n 为任意的, 则 F 的任何实因子 $ax + by$ 必以偶乘幂出现, 复因子必以共轭对 $ax + by, \bar{a}x + \bar{b}y$ 出现. 因之, 适当的集中因子, 则得

$$F = p^2(q + ir)(q - ir) = (pq)^2 + (pr)^2,$$

其中 p, q, r 为实多项式.

代数中有一个熟知的定理¹⁾, 即 m 个变数之任何定二次型皆可表为至多 m 个实线性型之平方和. 于是在下述两种情形, 即

$$(1) \quad m = 2, \quad n \text{ 为任意的};$$

$$(2) \quad m \text{ 为任意的}, \quad 2n = 2,$$

答案是肯定的.

Hilbert 发现了第三种情形

$$(3) \quad m = 3, \quad 2n = 4,$$

并证明了, 任何三元正四次型皆可表为三个实二次型的平方和. 他又证明了, 在所有其它情形, 答案是否定的, 即存在 m 个变数的 $2n$ 次有定形式, 它不可能以所说的形式表出.

于是, Hilbert 提出了下面的定理: 任何正的 F 皆可表为

$$F = \sum_i R_i^2,$$

其中 R_i 是一实有理函数. 一个与之等价的定理是: 任何正的 F 皆可表为实形式的平方和之商²⁾.

Hilbert³⁾ 对 (x, y, z) 的三元形式给出了这两个定理的一个非常困难的证明. 普遍性的定理是由 Artin⁴⁾ 首先证明的. Artin 的证明非常值得注意, 而且相当简单, 但它所依据的是近世抽象代数的观念, 以至于使得我们不可能把它放到这里来讲.

1) 比如可参考 Bôcher [1, 144—154].

2) 前一定理显然隐含第二定理(分母只有一平方). 又因

$$\frac{\sum g_i^2}{\sum h_j^2} = \sum_{i,j} \left(\frac{g_i h_j}{\sum h_j^2} \right)^2,$$

故第二定理隐含第一定理.

3) Hilbert [2].

4) Artin [1].

2.24. 关于严格正型的一个定理. § 2.23 中一些相当零散的說明乃是我們这里所討論的比較簡單的問題的一个自然引导. 我們这里所討論的是在正 x 这一区域严格为正的形式. 我們将要証明定理与 § 2.23 中所述者相似, 即断言一正的形式可以表成这样的一种形式, 使得它的正的性质从直观上就可以看出. 形式的次数現在不再一定要是偶数.

56.¹⁾ 若形式 $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 对

$$x \geq 0, \quad \sum x > 0$$

 严格为正, 則 F 可表成

$$F = \frac{G}{H},$$

其中 G 和 H 皆是正系数形式. 特別, 我們可以假定

$$H = (x_1 + x_2 + \dots + x_m)^p,$$

其中 p 为适当的数.

为书写簡單起見, 我們假定 $m = 3$; 对于一般的 m , 並沒有任何原則上的不同.

函数 $F(x, y, z)$ 在閉域

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1 \quad (2.24.1)$$

中为正且連續, 故在該域中有一正的极小值 μ . 令

$$F(x, y, z) = \sum_n A_{\alpha\beta\gamma} \frac{x^\alpha y^\beta z^\gamma}{\alpha! \beta! \gamma!}, \quad (2.24.2)$$

其中求和記号系就

$$\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = n \quad (2.24.3)$$

而取者; 又令

$$\phi(x, y, z; t) = t^n \sum_n A_{\alpha\beta\gamma} \binom{xt^{-1}}{\alpha} \binom{yt^{-1}}{\beta} \binom{zt^{-1}}{\gamma}, \quad (2.24.4)$$

其中 $t > 0$, $\binom{xt^{-1}}{\alpha}, \dots$ 則为寻常的二項系数, 即

1) Pólya [3]. 这定理(除了最后一句)早先曾由 Poincaré^[1] 对 $m = 2$, 由 Meissner^[2] 对 $m = 3$ 給了証明. 原則上 Meissner 的方法可运用到一般情形, 但不能导出这样简单的結果.

$$\binom{xt^{-1}}{0} = 1,$$

$$t^a \binom{xt^{-1}}{a} = \frac{x(x-t)(x-2t)\cdots\{x-(a-1)t\}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots a},$$

$a = 1, 2, 3, \cdots$.

显而易见, 当 $t \rightarrow 0$ 时,

$$\phi(x, y, z; t) \rightarrow F(x, y, z);$$

又若写

$$\phi(x, y, z; 0) = F(x, y, z),$$

则 ϕ 在

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1, 0 \leq t \leq 1$$

中为連續. 因而有一 ϵ , 使得对于 $0 < t < \epsilon$ 及(2.24.1)中所有之 x, y, z , 皆有

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z; t) &> \phi(x, y, z; 0) - \frac{1}{2} \mu \\ &= F(x, y, z) - \frac{1}{2} \mu \geq \frac{1}{2} \mu > 0. \end{aligned} \quad (2.24.5)$$

又, 我們有

$$(x + y + z)^{k-n} = (k-n)! \sum_{k-n} \frac{x^\kappa y^\lambda z^\mu}{\kappa! \lambda! \mu!}, \quad (2.24.6)$$

求和記号系就

$$\kappa \geq 0, \lambda \geq 0, \mu \geq 0, \kappa + \lambda + \mu = k - n$$

而取者. 将(2.24.2)与(2.24.6)相乘, 即得

$$\begin{aligned} (x + y + z)^{k-n} F \\ = (k-n)! \sum_n \sum_{k-n} A_{\alpha\beta\gamma} \frac{x^{a+\kappa} y^{b+\lambda} z^{c+\mu}}{\alpha! \kappa! \beta! \lambda! \gamma! \mu!}. \end{aligned}$$

令

$$\alpha + \kappa = a, \beta + \lambda = b, \gamma + \mu = c,$$

则 a, b, c 系在

$$a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, a + b + c = k \quad (2.24.7)$$

中变化, α, β, γ 系在

$$0 \leq \alpha \leq a, 0 \leq \beta \leq b, 0 \leq \gamma \leq c, \alpha + \beta + \gamma = n \quad (2.24.8)$$

中变化,由此即得

$$\begin{aligned} & (x+y+z)^{k-n} F \\ &= (k-n)! \sum_k \frac{x^a y^b z^c}{a! b! c!} \sum' A_{\alpha\beta\gamma} \binom{a}{\alpha} \binom{b}{\beta} \binom{c}{\gamma}. \end{aligned} \quad (2.24.9)$$

在(2.24.9)中, Σ' 表示关于 α, β, γ 在(2.24.8)中求和;但因当 $\alpha > a, \beta > b, \dots$ 时, $\binom{a}{\alpha} = 0, \binom{b}{\beta} = 0, \dots$, 故此求和可由在(2.24.3)上所取之求和来代替,即由 $\sum_n$ 来代替. 于是就得到

$$\begin{aligned} & (x+y+z)^{k-n} F \\ &= (k-n)! \sum_k \frac{x^a y^b z^c}{a! b! c!} \sum_n A_{\alpha\beta\gamma} \binom{a}{\alpha} \binom{b}{\beta} \binom{c}{\gamma} \\ &= (k-n)! k^n \sum_k \phi\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}; \frac{1}{k}\right) \frac{x^a y^b z^c}{a! b! c!}. \end{aligned} \quad (2.24.10)$$

由(2.24.5),若 k 充分大,这里的 ϕ 皆为正,这就证明了定理.

(1) 对于一个任与的形式 F , 要决定它是否对于正的 x 严格为正,这定理给出了一个系统的手续. 我们反复以 Σx 去乘,若此形式为正,则迟早总要得出一个具有正系数的形式.

对于

$$F = x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n - (n - \epsilon)x_1 x_2 \dots x_n,$$

其中 ϵ 为正且很小,来讨论这一手续的做法,是会有教育意义的. 在

$$\phi = (x_1 + \dots + x_n)^{nq} F$$

中,

$$x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$$

的系数,当有一 i 为 0 时必为正,其中 $i_1 + i_2 + \dots + i_n = n(q+1)$. 若 $i_1 \geq 1, \dots, i_n \geq 1$, 则为

$$\frac{(nq)!}{(i_1 - n)! i_2! i_3! \cdots} + \frac{(nq)!}{i_1! (i_2 - n)! i_3! \cdots} + \cdots - (n - \varepsilon) \frac{(nq)!}{(i_1 - 1)! (i_2 - 1)! \cdots},$$

其符号与

$$\begin{aligned} \phi(i_1, i_2, \cdots, i_n) &= i_1(i_1 - 1) \cdots (i_1 - n + 1) \\ &+ i_2(i_2 - 1) \cdots (i_2 - n + 1) + \cdots - (n - \varepsilon) i_1 i_2 \cdots i_n \end{aligned}$$

相同。我們要求 ϕ 对所有之 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 皆为正。

若 $i_1, i_2, \cdots$ 不全等于 $q + 1$ ，則其中必有一个小于 $q + 1$ ，設其为 i_1 ；也有一个大于 $q + 1$ ，設其为 i_2 。将 i_1, i_2 分別改为 $i_1 + 1, i_2 - 1$ ，則 ϕ 即改变了(減少了)

$$\begin{aligned} &n\{i_1(i_1 - 1) \cdots (i_1 - n + 2) \\ &\quad - (i_2 - 1)(i_2 - 2) \cdots (i_2 - n + 1)\} \\ &\quad - (n - \varepsilon) i_3 \cdots i_n (i_2 - i_1 - 1) < 0. \end{aligned}$$

因之，若 ϕ 当每一 i 皆为 $q + 1$ 时为正，則其对所有之 i 皆为正。但当每一 i 皆为 $q + 1$ 时， ϕ 将是正的，只要

$$n(q + 1)q(q - 1) \cdots (q - n + 2) > (n - \varepsilon)(q + 1)^n$$

或

$$\left(1 - \frac{1}{q + 1}\right) \left(1 - \frac{2}{q + 1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n - 1}{q + 1}\right) > 1 - \frac{\varepsilon}{n},$$

更不用說¹⁾当

$$q + 1 > \frac{n^2(n - 1)}{2\varepsilon}$$

了。若此条件滿足，則 ϕ 中所有之系数皆为正。

由是可知，当 $x \geq 0$ ， $\sum x > 0$ 时， $F > 0$ 。令 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，我們还可得出形如 $\sum x^n \geq n \Pi x$ 的平均值定理的别的証明。

(2) 若写

$$x_m = 1 - x_1 - \cdots - x_{m-1},$$

我們可以得出一个关于 $m - 1$ 个变数的一般非齐次多项式的定

1) 参考定理 58。

理.

57. 若一(非齐次)多项式 $f(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$ 在区域 $x_1 \geq 0, \dots, x_{m-1} \geq 0, x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1} \leq 1$ 内为正, 则 $f(x)$ 可表为

$$f(x) = \sum c x_1^{\alpha_1} \cdots x_{m-1}^{\alpha_{m-1}} (1 - x_1 - \cdots - x_{m-1})^{\alpha_m},$$

其中诸 α 为非负整数, 诸 c 为正.

这定理是 Hausdorff¹⁾ 之一定理的推广.

各种定理和各种例²⁾

58. 设 $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ 皆大于 -1 , 且或全为正, 或全为负, 则

$$(1 + \alpha)(1 + \beta) \cdots (1 + \lambda) > 1 + \alpha + \beta + \cdots + \lambda.$$

[对于 $\alpha = \beta = \cdots = \lambda$ 这种情形, 可参考 James Bernoulli [1, 5, p. 112].]

59. 若 $c > 0$, 则对所有(实的或复的) a, b , 有

$$|a + b|^2 \leq (1 + c)|a|^2 + \left(1 + \frac{1}{c}\right)|b|^2.$$

[参看 Bohr [1, p. 78].]

60. 设 $\mathfrak{U}_n, \mathfrak{G}_n$ 为 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的具有单位权的算术平均和几何平均, $\mathfrak{U}_{n+1}, \mathfrak{G}_{n+1}$ 为 $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ 的相应平均, 则

$$n(\mathfrak{U}_n - \mathfrak{G}_n) < (n + 1)(\mathfrak{U}_{n+1} - \mathfrak{G}_{n+1}),$$

除非

$$a_{n+1} = \mathfrak{G}_n.$$

[这一定理是由 R. Rado 告诉我们的, 它体现出平均值定理的另一证明. 若写 $a_{n+1} = x^{n+1}, \mathfrak{G}_n = y^{n+1}$, 则所要证明的不等式即为

$$x^{n+1} - (n + 1)xy^n + ny^{n+1} > 0,$$

1) Hausdorff [1]. Hausdorff 取 $m = 2$.

2) 下述定理中, 有一些只不过是读者的习题, 但大部分则是有某种独自的意义的.

而这由定理 41 即可得出.]

61.

$$ab \leq \frac{a^r}{r} + \frac{b^{r'}}{r'} \quad (a > 0, b > 0, r > 1),$$

等号当 $b = a^{r-1}$ 时成立.

[这是定理 37 的另一形式. 对这定理以及下面两个定理, 可参考 Young [1, 5, 6].]

62.

$$uv \leq u \frac{u^p - 1}{p} + \left(\frac{1 + pv}{1 + p} \right)^{(1+p)/p} \left(u > 0, v > -\frac{1}{p}, p > 0 \right).$$

[在定理 61 中以 $1 + p$ 代 r , 以 $u, (1 + pv)/(1 + p)$ 代 a, b .]

63.

$$uv \leq u \log u + e^{v-1} \quad (u > 0).$$

[在定理 62 中令 $p \rightarrow 0$, 也可参考 § 4.4(5).]

64. 若 $a > 0, a_1 a_2 \cdots a_n = l^n$, 则

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) > (1 + l)^n,$$

除非所有之 a 皆相等.

[Chrystal [1, p. 51]. 定理 40 之例题.]

65. 若 a 与 b 为正, 且 $p > 1$ 或 $p < 0$, 则

$$\sum \frac{a^p}{b^{p-1}} > \frac{(\sum a)^p}{(\sum b)^{p-1}},$$

除非 (a) 与 (b) 成比例. 若 $0 < p < 1$, 则不等式反号.

[Radon [1, p. 1351]: 定理 13 的轉換.]

66. 若 $a > 0$, 则 $\sum a \sum a^{-1} > n^2$, 除非所有之 a 皆相等.

[利用定理 7 或 9 或 16 或 43.]

67.

$$\sum (a + b) \sum \frac{ab}{a + b} < \sum a \sum b,$$

除非 (a) 与 (b) 成比例.

[Milne [1].]

68.

$$\sum(a+b+c)\sum\frac{bc+ca+ab}{a+b+c}\sum\frac{abc}{bc+ca+ab} < \sum a \sum b \sum c,$$

除非 $(a), (b), (c)$ 成比例.

69. 若 $0 < r < s$, 且

$$M_r(a, b) = \left(\frac{a^r + b^r}{2} \right)^{1/r},$$

則

$$\begin{aligned} \sum M_r(a, b) \sum M_{-r}(a, b) &< \\ &< \sum M_s(a, b) \sum M_{-s}(a, b) < \sum a \sum b, \end{aligned}$$

除非 (a) 与 (b) 成比例.

70. 若 $0 < k < 1$, 且对所有之 b ,

$$\sum ab \geq A(\sum b^{k'})^{1/k'},$$

則 $\sum a^k \geq A^k$.

[这是定理 15 对于 $0 < k < 1$ 这种情形的一个类似定理 (此时 $k' < 0$). 若所有之 a 皆为正, 則定义 b 如下:

$$ab = a^k, \quad b = a^{k-1}, \quad b^{k'} = a^k,$$

于是

$$(i) \quad \sum a^k \geq A(\sum a^k)^{1/k'}, \quad \sum a^k \geq A^k.$$

若所有之 a 皆为 0, 則 A 必为 0, 因而就没有什么需要証明的. 若其中有一些但不是全部为 0, 我們就假定在一具有 μ 个元素之集 E 中 $a > 0$, 在具有 $\nu = n - \mu$ 个元素之余集 CE 中 $a = 0$; 并在 E 中定义 b 如上, 在 CE 中定义 $b = G$. 則

$$\begin{aligned} \sum a^k &= \sum ab \geq A \left(\sum_E a^k + \nu G^{k'} \right)^{1/k'} \\ &= A \left(\sum a^k + \nu G^{k'} \right)^{1/k'}. \end{aligned}$$

令 $G \rightarrow \infty$, 我們又得到 (i).]

71. 若 $0 < h \leq a_v \leq H$, $0 < k \leq b_v \leq K$, 則

$$1 \leq \frac{\sum a^2 \sum b^2}{(\sum ab)^2} \leq \frac{1}{4} \left\{ \sqrt{\left(\frac{HK}{hk}\right)} + \sqrt{\left(\frac{hk}{HK}\right)} \right\}^2.$$

[参考 Pólya 和 Szegő [1, I, 57, p. 213], 該处給出了等号成立的条件.]

72.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{M}_{r+1}^{r+1}(a)}{\mathfrak{M}_r(a)} = \mathfrak{M}_{\infty}(a).$$

若所有之 a 皆为正, 則对于 $-\infty$ 也有一个类似的定理.

73. 若

$$\frac{\mathfrak{A}(a) - \mathfrak{B}(a)}{\mathfrak{A}(a)} \leq \varepsilon < 1,$$

此处之平均值系就单位权做成者, 則

$$1 + \xi < \frac{a_v}{\mathfrak{A}} < 1 + \xi',$$

其中 ξ 和 ξ' 分别为方程

$$(1+x)e^{-x} = (1-\varepsilon)^n$$

的負根和正根.

[參看 Pólya 和 Szegő [1, I, 58, p. 215].]

74. 若

$$[\gamma'_1, \dots, \gamma'_k] \leq [\gamma_1, \dots, \gamma_k], [\delta'_1, \dots, \delta'_l] \leq [\delta_1, \dots, \delta_l]$$

对于所涉及的变数的所有值皆成立, 則

$$[\gamma'_1, \dots, \gamma'_k, \delta'_1, \dots, \delta'_l] \leq [\gamma_1, \dots, \gamma_k, \delta_1, \dots, \delta_l].$$

[由前一假設及和数之定义, 有

$$[\gamma'_1, \dots, \gamma'_k, \delta_1] \leq [\gamma_1, \dots, \gamma_k, \delta_1].$$

重复此項論証, 有

$$(i) [\gamma'_1, \dots, \gamma'_k, \delta_1, \dots, \delta_l] \leq [\gamma_1, \dots, \gamma_k, \delta_1, \dots, \delta_l].$$

同理, 利用第二假設, 有

$$(ii) [\gamma'_1, \dots, \gamma'_k, \delta'_1, \dots, \delta'_l] \leq [\gamma'_1, \dots, \gamma'_k, \delta_1, \dots, \delta_l].$$

所要之結果由(i)和(ii)即可得出.]

75. 若 $(\alpha') \prec (\alpha)$, 且 α 与 α' 系按降序排列, 則存在一最大

的非負 δ , 使得

$$(i) \quad (\beta) = (\alpha'_1 + \delta, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{n-1}, \alpha'_n - \delta) \prec (\alpha).$$

若 δ 取這一數值, 則

$$(ii) \quad (\alpha'_1, \alpha'_n) \prec (\beta_1, \beta_n),$$

且對 1 與 $n-1$ 之間(兩端包含在內)的某一 k , 有

$$(iii) \quad (\beta_1, \dots, \beta_k) \prec (\alpha_1, \dots, \alpha_k), \\ (\beta_{k+1}, \dots, \beta_n) \prec (\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n).$$

[由定義顯然可以看出: (a)(i) 對 $\delta = 0$ 成立, (b) 使得它成立的 δ 所成之集為一閉集, (c) 若它對某一正 δ 成立, 則它對任何較小的正 δ 也成立. 因之, 存在一最大的非負 δ , 使得(i)和(ii)皆成立.

若 δ 取此數值, 則或 (a) $\beta_n = \alpha'_n - \delta$, 或對某一 $k < n$, 有

$$(b) \quad \beta_1 + \dots + \beta_k = \alpha'_1 + \dots + \alpha'_k + \delta = \alpha_1 + \dots + \alpha_k;$$

否則我們就可將 δ 增大而不影響(i). 在情形 (a),

$$\sum_1^{n-1} \alpha_v \leq \sum_1^n \alpha_v = \sum_1^n \beta_v = \sum_1^{n-1} \beta_v \leq \sum_1^{n-1} \alpha_v,$$

因而有 $\beta_1 + \dots + \beta_{n-1} = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}$, 此即 (b) 當 $k = n-1$ 之情形. 因之, (b) 在任何情況下皆成立. 因而(iii)由定義即可得出.

R. Rado 將定理 74 和定理 75 告訴了我們, 並用它得出了 Muirhead 判別法 (定理 45) 的充分性的一個新而巧妙的證明. 由 48 頁之引理 1, 結果當 $n = 2$ 時成立. 我們現假定 $n > 2$, 又假定條件(2.18.1), (2.18.2)和(2.18.3)皆滿足, 且結果對變數個數小於 n 時皆成立. 於是, 由歸納法假設, $[\alpha'_1, \alpha'_n] \leq [\beta_1, \beta_n]$, $[\beta_1, \dots, \beta_k] \leq [\alpha_1, \dots, \alpha_k]$, $[\beta_{k+1}, \dots, \beta_n] \leq [\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n]$. 因之, 將定理 74 運用兩次, 則得

$$\begin{aligned} [\alpha'_1, \dots, \alpha'_n] &= [\alpha'_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, \alpha'_n] \leq [\beta_1, \dots, \beta_n] \\ &= [\beta_1, \dots, \beta_k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_n] \leq [\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n] \\ &= [\alpha_1, \dots, \alpha_n]. \end{aligned}$$

76. 若 $a > 0$, r 與 s 為正整數, 則

$$\sum a_1' a_2' \cdots a_r' \sum \frac{1}{a_1^s a_2^s \cdots a_r^s} > \binom{n}{r} \binom{n}{s},$$

除非所有之 a 皆相等.

[此乃定理 66 之推广. 由定理 45, 有

$$[r, r, \cdots (s \text{ 次}), 0, 0, \cdots, 0] > \left[\frac{rs}{n}, \frac{rs}{n}, \cdots, \frac{rs}{n} \right].$$

将 r 与 s 交换, 并以 $1/a$ 代 a , 然后做成相应之不等式, 再相乘即得.]

77. 設 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 系按照 § 2.22 中所定义, 又設諸 a 为正, 則

$$p_1^{a_1'} p_2^{a_2'} \cdots p_n^{a_n'} \leq p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}$$

对所有的正 a 皆成立之充要条件是: 对 $1 \leq m \leq n$, 有

$$\begin{aligned} a_m' + 2a_{m+1}' + \cdots + (n-m+1)a_n' \\ \geq a_m + 2a_{m+1} + \cdots + (n-m+1)a_n, \end{aligned}$$

当 $m=1$ 时取等号.

[充分性可从定理 51 得出; 必要性可依照 § 2.19(1) 中的途径証明. Dougall^[1] 根据一个恆等式对整数 a 給出了一个証明. 对于某些特别情形, 例如

$$p_{\mu-\lambda} p_{\mu+\lambda} \leq p_{\mu-\kappa} p_{\mu+\kappa} \quad (0 \leq \kappa < \lambda < \mu),$$

$$p_{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_r} \leq p_{\mu_1} p_{\mu_2} \cdots p_{\mu_r},$$

可参考 Kritikos [1].]

$$78. \text{ 平均值 } \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \cdots, 0 \right] \text{ 与 } \left[\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 0, \cdots, 0 \right]$$

不可比較.

[定理 45 的例和定理 48 的說明.]

79. 若 $a > 0$, P_μ 为 μ 个不同的 a 之积的 μ 次根的算术平均, 則

$$P_1 > P_2 > \cdots > P_n,$$

除非所有之 a 皆相等.

[Smith [1, p. 440], 定理 45 之例;

$$\begin{aligned}
[1, 0, 0, \dots, 0] &> \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0\right] \\
&> \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \dots, 0\right] > \dots]
\end{aligned}$$

80. 若 $\mu \geq 0$, 且 x, y, z 为正, 則

$$\begin{aligned}
&x^\mu(x-y)(x-z) + y^\mu(y-z)(y-x) \\
&\quad + z^\mu(z-x)(z-y) > 0,
\end{aligned}$$

除非 $x = y = z$.

81. 若 $v \geq 0, \delta > 0$, 諸 a 为正且不相等, 則

$$\begin{aligned}
&[v + 2\delta, 0, 0, a_4, \dots] \\
&\quad - 2[v + \delta, \delta, 0, a_4, \dots] + [v, \delta, \delta, a_4, \dots] > 0.
\end{aligned}$$

[这結果是由 I. Schur 告訴我們的, 它并不是定理 45 的一个推論, 但可从定理 80 取 $\mu = v/\delta$ 得出.]

第三章 关于一个任意函数的平均, 凸函数論

3.1. 定义. 平均值 $\mathfrak{M}_\phi(a)$ 和 $\mathfrak{G}(a)$ 具有

$$\mathfrak{M}_\phi(a) = \phi^{-1}\{\sum q\phi(a)\} \quad (3.1.1)$$

的形式, 其中 $\phi(x)$ 是函数

$$x^r \text{ 或 } \log x,$$

而 $\phi^{-1}(x)$ 则表示 $\phi(x)$ 的反(逆)函数。一件很自然的事情, 就是去討論就一个服从适当条件的任意函数 ϕ 而做成的形如(3.1.1)的更为一般的平均。要加之于 ϕ 的最为明显的条件就是它应当是連續的和严格单調的。在这种情形, 它的反函数 ϕ^{-1} 存在, 且满足同样的条件。

我們需要用到下述的預备定理。

82. 若 (i) $\phi(x)$ 在 $H \leq x \leq K$ 中为連續且严格单調,

(ii) $H \leq a_v \leq K \quad (v = 1, 2, \dots, n),$

(iii) $q_v > 0, \quad \sum q_v = 1,$

則(1)在 (H, K) 中有唯一的 $\mathfrak{M}$, 使得

$$\phi(\mathfrak{M}) = \sum q\phi(a), \quad (3.1.2)$$

(2) $\mathfrak{M}$ 总是大于某一些 a 而小于另一些 a , 除非这些 a 皆相等。

因 $\phi(x)$ 为連續, 且当 x 从 H 增加到 K 时, 它从 $\phi(H)$ 或增加到或减少到 $\phi(K)$, 而 $\sum q\phi(a)$ 則界于这两者之間, 故恰有一 $\mathfrak{M}$ 滿足(3.1.2)。由

$$\sum q\{\phi(\mathfrak{M}) - \phi(a)\} = 0,$$

故必有些項为正, 有些項为負, 除非全为 0。因之, $\mathfrak{M} - a$ 有时为正有时为負, 除非它常为 0。

我們已經假定 $\phi(x)$ 在閉区間 (H, K) 中为連續, 但若 $\phi(x)$

在 $H < x < K$ 中为連續且严格单增, 且当 $x \rightarrow H$ 时 $\phi(x) \rightarrow -\infty$, 或当 $x \rightarrow K$ 时 $\phi(x) \rightarrow +\infty$, 上述之論証仍然有效, 只要我們在这时將 $\phi(H)$ 解釋为 $-\infty$, 或將 $\phi(K)$ 解釋为 $+\infty$, 且当 $\sum q\phi(a) = -\infty$ 时, 將 $\mathfrak{M}$ 解釋为 H , 当 $\sum q\phi(a) = +\infty$ 时, 將 $\mathfrak{M}$ 解釋为 K . 在这里, H 可以是一 ∞ , 或 K 可以是 $+\infty$; 一个特別重要的情形是 $H = 0, K = +\infty$ 的情形. 在下述之定义中, 以及本章今后关于 $\mathfrak{M}_\phi$ 的性质所作的各种討論中, 总是假定 ϕ 为严格单調, 且或在閉区間中連續, 或其变化之情况系如刚才所說.

我們令¹⁾

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_\phi &= \mathfrak{M}_\phi(a) = \mathfrak{M}_\phi(a, q) \\ &= \phi^{-1}\{\sum q\phi(a)\} = \phi^{-1}\{\mathfrak{A}[\phi(a)]\}.\end{aligned}\quad (3.1.3)$$

权 q 乃是其和为 1 的任意正数, 当我们比較两种平均时, 总是认为这些平均的权皆相同. 当 $\phi(x) = x, \log x, x^r$ 时, $\mathfrak{M}_\phi$ 分別化为 $\mathfrak{A}, \mathfrak{G}, \mathfrak{M}_r$.

3.2. 等价平均. 当函数 ϕ 給定时, 平均 $\mathfrak{M}_\phi$ 即已决定. 我們要問, 逆命題是否成立: 若对于所有之 a 和 q , $\mathfrak{M}_\phi = \mathfrak{M}_\chi$, 是不是 ϕ 必然与 χ 是同一函数? 这問題由下之定理来回答.

83²⁾.

$$\mathfrak{M}_\phi(a) = \mathfrak{M}_\chi(a) \quad (3.2.1)$$

对所有之 a 及 q 成立之充要条件是

$$\chi = \alpha\phi + \beta, \quad (3.2.2)$$

其中 α 与 β 为常数, 且 $\alpha \neq 0$.

在下述之論証中, 我們总是假定 ϕ 与 χ 在閉区間 (H, K) 中为連續. 容易看出, 只要經過简单的变化, 这项論証也适用于 §3.1 中所述的例外情形. 我們真正証明的比所說的要多, 就是說, 我們証明了(3.2.2)是(3.2.1)对所有的 a 和 q 皆成立的充分条件, 又

1) 在本章中我們系直接定义 $\mathfrak{M}_\phi$, 然后从定义推出它的性质. 在第六章中 (§§ 6.19—6.22), 我們將指出, $\mathfrak{M}_\phi$ 何如“从公理”去定义, 就是說, 从規定它的特征性质出发去定义.

2) Knopp[2], Jessen[2].

証明了它是(3.2.1)对所有由两个变数所成的組和任意的权皆成立的必要条件。后面 (§ 3.7) 我們还要証明更多一些，即証明：欲(3.2.1)对所有之二变数组和一对固定的权皆成立，(3.2.2)也是必要的。

(i) 若(3.2.2)成立，則

$$\begin{aligned}\chi\{\mathfrak{M}_\chi(a)\} &= \sum q\chi(a) = \sum q\{\alpha\psi(a) + \beta\} \\ &= \alpha\sum q\psi(a) + \beta = \alpha\psi\{\mathfrak{M}_\psi(a)\} + \beta = \chi\{\mathfrak{M}_\psi(a)\},\end{aligned}$$

因而 $\mathfrak{M}_\chi = \mathfrak{M}_\psi$ ，故条件为充分的。

(ii) 要証明条件为必要的，我們只須假定(3.2.1)对所有之二变数组和权皆成立。

在(3.2.1)中，取

$$n = 2, \quad a_1 = H, \quad a_2 = K, \quad q_1 = \frac{K-t}{K-H}, \quad q_2 = \frac{t-H}{K-H},$$

其中 $H < t < K$ 。于是对 $H < t < K$ ，有

$$\begin{aligned}\psi^{-1}\left\{\frac{K-t}{K-H}\psi(H) + \frac{t-H}{K-H}\psi(K)\right\} \\ = \chi^{-1}\left\{\frac{K-t}{K-H}\chi(H) + \frac{t-H}{K-H}\chi(K)\right\};\end{aligned}\quad (3.2.3)$$

而这对于 $t = H$ 和 $t = K$ 也成立。若我們將此公共值記作 x ，則当 t 从 H 变到 K 时， x 取 (H, K) 中所有之值，且

$$\begin{aligned}\frac{K-t}{K-H}\psi(H) + \frac{t-H}{K-H}\psi(K) &= \psi(x), \\ \frac{K-t}{K-H}\chi(H) + \frac{t-H}{K-H}\chi(K) \\ &= \frac{\psi(K) - \psi(x)}{\psi(K) - \psi(H)}\chi(H) + \frac{\psi(x) - \psi(H)}{\psi(K) - \psi(H)}\chi(K) \\ &= \alpha\psi(x) + \beta,\end{aligned}$$

其中 α 和 β 与 x 无关。因之，对于 (H, K) 中所有之 x ，有

$$x = \chi^{-1}\{\alpha\psi(x) + \beta\};$$

而此即(3.2.2)。这就完全証明了定理 83。

这(指后面的几句话——譯者)就是定理 83 的一个系,它有时是有用处的. 因 $-\phi$ 是 ϕ 的一綫性函数,故若 ϕ 为单降,則 $-\phi$ 为单增,因之,若有必要,我們常常可以假定在 $\mathfrak{M}_\phi(x)$ 中所包含之 ϕ 为一增函数.

定理 83 也可以用来說明,什么緣故尽管定义不同,但 $\mathfrak{M}_0 = \textcircled{0}$ 仍然可以很自然地包含在第二章內的平均值 $\mathfrak{M}_r$ 之中. 因当 $r \neq 0$ 时,

$$\phi_r(x) = \int_1^x t^{r-1} dt = \frac{x^r - 1}{r}$$

是 x^r 的一綫性函数,故由定理 83, 有

$$\mathfrak{M}_r(a) = \mathfrak{M}_{\phi_r}(a).$$

因 $\phi_0(x) = \log x$, 故此方程当 $r = 0$ 时仍成立.

3.3. 平均 $\mathfrak{M}_r$ 的一特征性質. 我們自然要問,第二章中的諸平均是不是具有任何簡單的性質,使得可以把它們从这里所討論的較為广泛的平均中特別刻划出来.

84¹⁾. 設 $\phi(x)$ 在开区間 $(0, \infty)$ 內为連續,又設

$$\mathfrak{M}_\phi(ka) = k\mathfrak{M}_\phi(a) \quad (3.3.1)$$

对所有正的 a, q, k 皆成立,則 $\mathfrak{M}_\phi(a)$ 即为 $\mathfrak{M}_r(a)$. 換言之,平均 $\mathfrak{M}_r$ 是 $\mathfrak{M}_\phi$ 中唯一的齊次平均.

(3.3.1)当然并不隱含 $\phi = x^r$ (或 $\log x$); 盖由定理 83,我們可用 $\alpha\phi + \beta$ 代 ϕ 而不改变 $\mathfrak{M}_\phi$.

(3.3.1)当 $\phi = x^r$ 或 $\phi = \log x$ 时显然成立. 我們現在假定 (3.3.1)成立,而来求出 ϕ 的形式. 根据定理 83, 我們可以假定

$$\phi(1) = 0; \quad (3.3.2)$$

因为我們可将 $\phi(x)$ 代以 $\phi(x) - \phi(1)$.

我們將(3.3.1)写成

$$\mathfrak{M}_\phi(a) = k^{-1}\mathfrak{M}_\phi(ka) = k^{-1}\phi^{-1}\{\sum q\phi(ka)\} = \mathfrak{M}_\psi(a),$$

其中

1) Nagumo[1], de Finetti[1], Jessen[4]. 下述是 de Finetti 的証明的一个簡單的变形,它是由 Jessen 告訴我們的.

$$\phi(x) = \phi(kx).$$

由定理 83¹⁾, 即得

$$\phi(kx) = \alpha(k)\phi(x) + \beta(k), \quad (3.3.3)$$

其中 $\alpha(k)$ 和 $\beta(k)$ 是 k 的函数, 且 $\alpha(k) \neq 0$; 由 (3.3.2) 和 (3.3.3), 即得

$$\phi(k) = \beta(k). \quad (3.3.4)$$

若将 (3.3.4) 代入 (3.3.3), 并以 y 代 k , 则对所有正的 x 和 y , 有

$$\phi(xy) = \alpha(y)\phi(x) + \phi(y). \quad (3.3.5)$$

同理, 有

$$\phi(xy) = \alpha(x)\phi(y) + \phi(x); \quad (3.3.6)$$

而由 (3.3.5) 和 (3.3.6), 即得

$$\frac{\alpha(x) - 1}{\phi(x)} = \frac{\alpha(y) - 1}{\phi(y)}.$$

这两个函数中的每一个必然要化为一常数 c , 故得 $\alpha(y) = 1 + c\phi(y)$. 于是, 由 (3.3.5) 即得

$$\phi(xy) = c\phi(x)\phi(y) + \phi(x) + \phi(y). \quad (3.3.7)$$

在讨论这一函数方程时, 我们必须区分两类情形:

(1) 若 $c = 0$, 则 (3.3.7) 即化为古典方程

$$\phi(xy) = \phi(x) + \phi(y).$$

最一般的对 $x > 0$ 为连续的解是³⁾ $\phi = C \log x$.

(2) 若 $c \neq 0$, 则令 $c\phi(x) + 1 = f(x)$, 于是该方程即化为

$$f(xy) = f(x)f(y),$$

它的通解是 $f = x^r$. 因之,

$$\phi(x) = \frac{x^r - 1}{c}.$$

1) 若我们引用 § 3.2 中在定理 83 的叙述之后所提到的该定理的更为精确的形式, 则对定理 84, 我们即将得到一个更为精确的形式, 其中齐次性只是对某些类的变数集或权作假定.

2) 假定 $x \approx 1$, $y \approx 1$. 因 (3.3.7) 对 x 或 y 为 1 时显然成立, 故此种除外情形无关重要.

3) Cauchy [1, pp. 103—105].

3.4. 可比較性. 我們對於 α 的函数的“可比較性”所作的一般說明 (§ 1.6) 引起了下面的一個問題：任與兩個函数 ϕ 和 χ ，各在 (H, K) 中為連續且嚴格單調，是不是 $\mathfrak{M}_\phi$ 和 $\mathfrak{M}_\chi$ 可以比較；就是說，是否存在一個不等式

$$\mathfrak{M}_\phi \leq \mathfrak{M}_\chi \quad (3.4.1)$$

(或相反的不等式)，它對所有之 a 和 q 皆成立？

我們令

$$\chi\{\phi^{-1}(x)\} = \phi(x),$$

於是， ϕ 為連續且嚴格單調，並有逆函数 $\phi^{-1} = \phi\chi^{-1}$ 。我們又令

$$x = \phi(a), \quad a = \phi^{-1}(x),$$

則 x 乃是 $\phi(H)$ 和 $\phi(K)$ 之間的一任意的數。且若 χ 為單增，則 (對所有之 q) (3.4.1) 即變為

$$\phi(\sum qx) \leq \sum q\phi(x); \quad (3.4.2)$$

若 χ 為單降，則上之不等式反號。

於是，我們就得到了

85. 若 ϕ 和 χ 為連續且嚴格單調，則 $\mathfrak{M}_\phi$ 和 $\mathfrak{M}_\chi$ 為可比較之充要條件是 $\phi = \chi\phi^{-1}$ 必須滿足 (3.4.2)，或滿足與之相反的不等式。

下面我們將對這類函数作詳細的考察。

對於任意的權 p ，(3.4.2) 變為

$$\phi\left(\frac{\sum px}{\sum p}\right) \leq \frac{\sum p\phi(x)}{\sum p}. \quad (3.4.3)$$

3.5. 凸函数. § 3.4 中之函数 ϕ 乃是兩個單調函数的結式，因而本身為單調；但我們現在要來討論一個只服從 (3.4.2) 的函数 ϕ 。

(3.4.2) 的最簡單的情形是

$$\phi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{\phi(x) + \phi(y)}{2}. \quad (3.5.1)$$

滿足 (3.4.2) 的函数也滿足 (3.5.1)，但滿足 (3.5.1) 的函数類却廣泛得多。不過，我們將證明，這兩個不等式對於服從某些並不十分窄狹的條件的函数來說却是等價的。

在某一區間中滿足(3.5.1)的函數稱為在該區間內是凸的 (Convex)。若 $-\phi$ 為凸的，則 ϕ 即為凹的。我們也可以在一個开区間內來定義凸性和凹性。我們最好是容許函數在區間的端點可以取無限值；顯而易見，若區間為有限，則這樣的值對凸函數必為正，對凹函數必為負。

凸函數論的基礎是由 Jensen¹⁾[2] 奠定的。在幾何上，(3.5.1) 即表示曲綫 $y = \phi(x)$ 的任一條弦的中點必在該曲綫之上方或在該曲綫上；這裡的曲綫是指任一圖形，不一定為連續。不等式

$$\phi(q_1x_1 + q_2x_2) \leq q_1\phi(x_1) + q_2\phi(x_2) \quad (3.5.2)$$

(對於所有之 q) 說明整條弦皆在曲綫的上方或在曲綫上，而一般的不等式(3.4.2)則表明曲綫上任何多個任意加權的點的重心或在曲綫的上方，或在曲綫上。從幾何直觀可以看出，當曲綫為連續時，從最弱的條件(3.5.1)也可以推出較強的條件(3.5.2)，但我們將看出，通過我們的分析，還可得出更多的東西。我們可以取(3.4.2)或(3.5.2)來作為我們的凸性的定義，但我們還是依照 Jensen 從最弱的定義出發。最自然的定義或許是(3.5.2)和在 §3.19 中所討論的另外一個。但若將假設尽可能減少，這是有某種邏輯上的興趣的。

對於有限的或可列的數集，下一個凸性或凹性的定義有時是有用處的。對於集 $a_1, \dots, a_n$ ，若有

$$2a_v \leq a_{v-1} + a_{v+1} \quad (v = 2, 3, \dots, n-1),$$

即若此集之第二差分為非負，則稱此集為凸的。

於是，我們就可將定理 51 以帶有“ $\leq$ ”這種不很確切的形式表示成：集 $\log p$ 為凹的；完全的定理是： $\log p$ 為嚴格凹的（參看 §3.8），除非所有之 a 皆相等。當諸 p 的冪的兩個乘積可比較時，它們之間成立的不等式總可從 $\log p$ 的凹性導出（實質上就象從定理 51 導出定理 52）。這是定理 77 的核心。

3.6. 連續凸函數。 我們現在來研究使得(3.4.2)和(3.5.1)為

1) 雖然 Hölder^[1] 在 Jensen 之前曾討論過不等式(3.4.2)。

等价的最简单的情形.

若 $\phi(x)$ 满足(3.5.1), 则有

$$\begin{aligned} 4\phi\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) &\leq 2\phi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + 2\phi\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right) \\ &\leq \phi(x_1) + \phi(x_2) + \phi(x_3) + \phi(x_4), \end{aligned}$$

等等. 于是我们就证明了对一系列特别的 n , 即 $n = 2^m$, 有

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \\ \leq \frac{\phi(x_1) + \phi(x_2) + \cdots + \phi(x_n)}{n}. \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

要证明(3.6.1)普遍成立, 只须证明若它对 n 成立, 则它对 $n-1$ 也成立¹⁾. 于是我们就假定(3.6.1)对 n 个数已经证明, 并设给定了 $n-1$ 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$. 取 x_n 为此 $n-1$ 个数的(具有相等的权的)算术平均 $\mathfrak{A}$, 并运用(3.6.1), 即得

$$\begin{aligned} \phi(\mathfrak{A}) &= \phi\left\{\frac{(n-1)\mathfrak{A} + \mathfrak{A}}{n}\right\} \\ &= \phi\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + \mathfrak{A}}{n}\right) \\ &\leq \frac{\phi(x_1) + \phi(x_2) + \cdots + \phi(x_{n-1}) + \phi(\mathfrak{A})}{n}. \end{aligned}$$

因而有

$$\phi(\mathfrak{A}) \leq \frac{\phi(x_1) + \phi(x_2) + \cdots + \phi(x_{n-1})}{n-1},$$

此即(3.6.1), 不过是以 $n-1$ 代 n . 故(3.6.1)普遍成立.

其次, 若假定在(3.6.1)中诸 x 是由一些适当选取的组所组成, 各组具有同样的 x , 则对于任何可通约的 q 即得(3.4.2).

最后, 若 $\phi(x)$ 为连续, 则我们可以在诸 q 上不加任何限制而证明(3.4.2); 盖我们可以将诸 q 代以可通约的近似值然后取极限即可. 由是即得

1) 在这里我们系依照 § 2.6 (ii) 中的途径. 关于更直接地按照 Cauchy 的证法所作出的证明, 可参考 Jensen[2].

86. 任何連續凸函數滿足(3.4.2).

作為一個應用，我們現來考慮定理 17. 若 $s = \frac{1}{2}(r + t)$, 則由定理 7, 即得

$$(\sum p a^s)^2 \leq \sum p a^r \sum p a^t,$$

或

$$\{\mathfrak{M}_s^r(a)\}^2 \leq \mathfrak{M}_r^r(a) \mathfrak{M}_t^r(a),$$

或

$$\log \mathfrak{M}_s^r(a) \leq \frac{1}{2} \{ \log \mathfrak{M}_r^r(a) + \log \mathfrak{M}_t^r(a) \}.$$

換言之,

87. $\log \mathfrak{M}_r^r(a) = r \log \mathfrak{M}_r(a)$ 是 r 的一凸函數.

借助定理 86 (或重複證明此定理時所用的論述), 我們由此即可得出定理 17 (除了關於等號情形所作的詳細描述之外).

3.7. 一個另外的定義¹⁾. 在 § 3.5 中, 我們刻劃一個凸函數時系利用這樣的事實, 即曲綫 $y = \phi(x)$ 的任一弦的中點在該曲綫的上方或在該曲綫上. Riesz 和 Jessen 曾經指出一個有趣的同時在應用中有时也是重要的事實²⁾, 即當 $\phi(x)$ 為連續時, 只須要求弦上有一個點在曲綫的上方或在曲綫上即可.

88. 若 $\phi(x)$ 為連續, 又若曲綫 $y = \phi(x)$ 的每一條弦, 除了端點之外, 至少有一個點在曲綫的上方或在曲綫上, 則每一條弦上的每一點皆在曲綫的上方或在曲綫上, 因而 $\phi(x)$ 為凸的.

設 PQ 為一弦, R 為弦上在曲綫下的一點, 則在 PR 上有一點 S , 它是曲綫與 PR 最後相交之點; 在 RQ 上有一點 T , 它是曲綫與 RQ 最初相交之點: S 可以就是 P 而 T 可以就是 Q , 弦 ST 全部在曲綫之下, 這與假設相矛盾.

這一點說明對定理 86 給出了另一証明. 若 $\phi(x)$ 為凸的, 則任一弦的中點必在曲綫的上方或曲綫上. 因之, 正如我們已證明的, 弦的每一點皆在曲綫的上方或曲綫上. 就是說,

$$\phi(q_1 x_1 + q_2 x_2) \leq q_1 \phi(x_1) + q_2 \phi(x_2),$$

1) M. Riesz[1], Jessén[2].

2) 例如參考 § 8.13.

若 $q_1 > 0, q_2 > 0, q_1 + q_2 = 1$, 但在其他方面, q_1 和 q_2 为任意. 然后我們就可用歸納法来进行. 若 $q_1 + q_2 + q_3 = 1$, 則

$$\begin{aligned}
 & \phi(q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3) \\
 &= \phi\left\{q_1x_1 + (q_2 + q_3)\frac{q_2x_2 + q_3x_3}{q_2 + q_3}\right\} \\
 &\leq q_1\phi(x_1) + (q_2 + q_3)\phi\left(\frac{q_2x_2 + q_3x_3}{q_2 + q_3}\right) \\
 &\leq q_1\phi(x_1) + (q_2 + q_3)\frac{q_2\phi(x_2) + q_3\phi(x_3)}{q_2 + q_3} \\
 &= q_1\phi(x_1) + q_2\phi(x_2) + q_3\phi(x_3), \quad (3.7.1)
 \end{aligned}$$

如此类推以至一般.

定理 88 的一个系是

89. 若 $\phi(x)$ 为連續, 又若 $y = \phi(x)$ 的每一弦皆与曲綫相交于一异于端点之点, 則 $\phi(x)$ 为綫性的.

由定理 88, 每一弦上的每一点皆在曲綫上方或在曲綫上. 但在定理 88 的假設和結論中若將“在上方”代之以“在下方”, 該定理仍成立. 因之, 曲綫的每一弦皆与曲綫相合.

由定理 89, 我們还可导出 §3.2 中所提到的定理 83 的改进. 設

$$\phi^{-1}\{q_1\phi(a_1) + q_2\phi(a_2)\} = \chi^{-1}\{q_1\chi(a_1) + q_2\chi(a_2)\}$$

对固定的 q_1, q_2 和任意的 a 成立. 令 $\chi\phi^{-1} = \phi, \phi(a) = x, a = \phi^{-1}(x)$, 則得

$$\phi(q_1x_1 + q_2x_2) = q_1\phi(x_1) + q_2\phi(x_2),$$

因而 $y = \phi(x)$ 的每一条弦总有一点在此曲綫上. 由定理 89, ϕ 为綫性的.

3.8. 諸基本不等式中的等号. 我們現假定 $\phi(x)$ 为連續, 且为凸函数, 而来考虑(3.5.1), (3.5.2), (3.4.2)中之等号何时出現.

假定 $x_1 < x_3 < x_2$ 且 $x_3 = q_1x_1 + q_2x_2$, 又假定 $P_1, P_2, \dots$ 是曲綫 $y = \phi(x)$ 上与 $x_1, x_2, \dots$ 相应之点. 若 $\phi(x)$ 在 (x_1, x_2) 內不是綫性的, 則在 (x_1, x_2) 中必存在一点 x_4 , 使得 P_4 处在直綫 P_1P_2 之下. 今設(比如說) x_4 在 (x_1, x_3) 內, 于是 x_3 就在 (x_4, x_2)

內, P_3 即在 P_1P_2 上或在它的下面, 因而位于 P_1P_2 之下. 于是, (3.5.2) 中不等号成立. 由是可知, (3.5.2) 中之等号只当 $\phi(x)$ 在 (x_1, x_2) 內为綫性时才能出現.

这一結論很容易推广到一般性不等式(3.4.2)上去. 比如說, 假設当 $n = 3$ 时等号出現, 又設 $x_1 < x_2 < x_3$, 則(3.7.1)中所有之不等号必皆化为等号, 因而 $\phi(x)$ 在各区間

$$\left(x_1, \frac{q_2x_2 + q_3x_3}{q_2 + q_3}\right), (x_2, x_3)$$

內必为綫性, 故在 (x_1, x_3) 內亦为綫性.

由是我們已經証明了

90. 若 $\phi(x)$ 为連續, 且为凸的, 則

$$\phi(\sum qx) < \sum q\phi(x), \quad (3.8.1)$$

$$\phi\left(\frac{\sum px}{\sum p}\right) < \frac{\sum p\phi(x)}{\sum p}, \quad (3.8.2)$$

除非(i)所有之 x 皆相等, 或(ii) $\phi(x)$ 在一包含所有之 x 的区間內为綫性.

91. 一連續凸曲綫之任一弦, 除了它的端点之外, 全部都在該曲綫之上, 或与該曲綫相合.

若对于每一对不相等的 x, y , 皆有

$$\phi\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{1}{2} \{\phi(x) + \phi(y)\}, \quad (3.8.3)$$

則称 $\phi(x)$ 为严格凸的. 因一严格凸函数在任何区域内不可能为綫性, 故任何这类函数, 若为連續, 必滿足(3.8.1)和(3.8.2), 除非所有之 x 皆相等.

3.9. 定理 85 的新的表达和推广¹⁾. 我們可将定理 85 改述成下之形式:

92. 若 χ 和 ψ 皆为連續, 且为严格单調, 又設 χ 为单增, 則 $\mathfrak{M}_\psi \leq \mathfrak{M}_\chi$ 对所有之 a 和 q 成立之充要条件是 $\phi = \chi\psi^{-1}$ 为凸

1) Jessen[2,3].

的¹⁾.

在这种情况下, 我们就说 χ 关于 ψ 为凸的. 由是, 当 $s \geq r > 0$ 时, χ 关于 r 为凸的.

曲线 $y = \phi(x)$ 具有参数表示

$$x = \phi(t), \quad y = \chi(t).$$

过曲线上与 $t = t_1$ 和 $t = t_2$ 相应之点之弦为

$$x = \psi(t), \quad y = \phi^*(t),$$

其中

$$\phi^*(t) = \frac{\phi(t_2) - \phi(t)}{\phi(t_2) - \phi(t_1)} \chi(t_1) + \frac{\phi(t) - \phi(t_1)}{\phi(t_2) - \phi(t_1)} \chi(t_2)$$

乃是形如

$$\alpha\psi(t) + \beta$$

的一函数, 它在 $t = t_1$ 和 $t = t_2$ 时分别取值 $\chi(t_1)$ 和 $\chi(t_2)$. 我们称 $y = \phi^*(x)$ 为 $y = \chi(x)$ 之 ψ 弦. 欲使 χ 关于 ψ 为凸的, 其必要且充分之条件为 $\chi \leq \phi^*$, 即 χ 之任一 ψ 弦上的每一点皆在曲线的上方或在曲线上.

定理 92 可以推广如下: 设

$$a = a_{v_1, v_2, \dots, v_m}$$

是 m 个变数 $v_1, v_2, \dots, v_m$ 的一函数, 又设

$$\mathfrak{M}_{\psi_m}^{v_m} \dots \mathfrak{M}_{\psi_2}^{v_2} \mathfrak{M}_{\psi_1}^{v_1}(a)$$

是关于 $v_1, v_2, \dots, v_m$ 相继取平均所得之结果.

93. 设 ψ_μ 与 χ_μ 为连续, 且为严格单调, 又设 χ_μ 为单增, 则

$$\mathfrak{M}_{\psi_m}^{v_m} \dots \mathfrak{M}_{\psi_1}^{v_1}(a) \leq \mathfrak{M}_{\chi_m}^{v_m} \dots \mathfrak{M}_{\chi_1}^{v_1}(a)$$

对所有之 a 和 q 成立之充要条件是每一 χ_μ 关于相应之 ψ_μ 为凸的.

不言而喻, 在算子 $\mathfrak{M}_{\psi_\mu}$ 和 $\mathfrak{M}_{\chi_\mu}$ 中所包含的权皆是相同的, 虽然它们一般是随着 μ 而变. 条件之为充分可由定理 92 立刻得出. 要看出它们是必要, 我们只需假定 a 是一单一的 v_μ 的函数即可.

3.10. 两次可微的凸函数. 我们把关于凸函数的一般性质的

1) 关于条件之必要性, 我们所证明的实际要多些: 参看关于定理 83 所作的说明.

进一步討論放到 § 3.18, 而在現在来討論这种函数的一个特別重要的子类, 即具有二次导数的凸函数类.

94. 設 $\phi(x)$ 在开区間 (H, K) 中具有二次导数 $\phi''(x)$, 則 $\phi(x)$ 在該区間內为一凸函数之充要条件是

$$\phi''(x) \geq 0^1. \quad (3.10.1)$$

(i) 条件是必要的. 將(3.5.1)中之 $\frac{1}{2}(x+y)$ 和 $\frac{1}{2}(x-y)$ 分別代以 t 和 h , 并假定 $x > y$, 因而 $h > 0$, 則对于所有使得 $t+h, t-h, t$ 属于所說之区間內之 t 和 h , 皆有

$$\phi(t+h) + \phi(t-h) - 2\phi(t) \geq 0. \quad (3.10.2)$$

今設 $\phi''(t) < 0$, 則有正数 δ 和 h , 使得当 $0 < u \leq h$ 时, 有

$$\phi'(t+u) + \phi'(t-u) < -\delta u.$$

將此不等式两边从 $u=0$ 到 $u=h$ 取积分, 則得

$$\phi(t+h) + \phi(t-h) - 2\phi(t) < -\frac{1}{2}\delta h^2,$$

此与(3.10.2)相矛盾.

(ii) 条件为充分的. 我們現証明 ϕ 滿足(3.4.2). 事实上, 若 $X = \sum qx$, 則对 X 与 x_v 間的某一 ξ_v , 有

$$\phi(x_v) = \phi(X) + (x_v - X)\phi'(X) + \frac{1}{2}(x_v - X)^2\phi''(\xi_v),$$

因而有

$$\sum q\phi(x) \geq \phi(X) = \phi(\sum qx).$$

若 $\phi''(x) > 0$, 則等号只当各 x 皆等于 X 时成立. 于是我們就証明了

95²⁾. 若 $\phi''(x) > 0$, 則 $\phi(x)$ 为严格凸的, 且滿足(3.8.1)和

1) 实际应用中重要的情形是 ϕ'' 在开区間內存在的情形(如定理中所說). 但通常我們都希望把凸性設在閉区間之中. 因 $\phi'' \geq 0$, ϕ' 和 ϕ 在临近区間的端点时为单調, 故趨于一有限或无限之极限; ϕ' 可能在左端趨于 $-\infty$ 而在右端趨于 $+\infty$, ϕ 則可以在任一端趨于 $+\infty$. 在一閉区間之中, 若函数在各端点之值不小于其在該端点之极限, 則該函数为凸的.

2) Hölder[1].

(3.8.2), 除非所有之 x 皆相等.

3.11. 二次可微凸函数的性质之应用. 結合定理 85 和定理 95 ((ii) 之部分) 的証明, 我們就得到了下面的定理, 它在应用中特別有用.

96. 若 ϕ 和 χ 为严格单調, χ 为单增, $\phi = \chi\psi^{-1}$, 且 $\phi'' > 0$, 則 $\mathfrak{M}_\phi < \mathfrak{M}_\chi$, 除非所有之 a 皆相等.

例. (1) 若 $\phi = \log x$, $\chi = x$, 則 $\phi = \chi\psi^{-1} = e^x$. 定理 96 即化为定理 9.

(2) 若 $\phi = x^r$, $\chi = x^s$, 其中 $0 < r < s$, 則 $\phi = \chi^{r/s}$, $\phi'' > 0$. 由定理 96 即得出定理 16 (关于正指数的情形). 定理 16 之其它情形也可同法导出.

(3) 設 $\phi = x^k$, 其中 k 不是 0 或 1, 則当 $k < 0$ 或 $k > 1$ 时, ϕ 在 $(0, \infty)$ 中为凸的, 当 $0 < k < 1$ 时为凹的. 設 $k > 1$, 运用定理 95, 即得

$$\sum qx < (\sum qx^k)^{1/k}$$

或

$$\sum px < (\sum px^k)^{1/k} (\sum p)^{1/k'},$$

除非所有之 x 皆相等. 若令 $px = ab$, $px^k = a^k$, 則得定理 13 ($k > 1$ 的情形). 其它情形可同法推出.

(4) 設 $\phi = \log(1 + e^x)$, 因而

$$\phi''(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} > 0;$$

又設(3.8.1)中之橫标和权分別为 $\log(a_2/a_1)$, $\log(b_2/b_1)$, $\dots$ 和 $\alpha, \beta, \dots$, 則得

$$a_1^\alpha b_1^\beta \cdots l_1^1 + a_2^\alpha b_2^\beta \cdots l_2^1 < (a_1 + a_2)^\alpha (b_1 + b_2)^\beta \cdots (l_1 + l_2)^1,$$

除非 $a_2/a_1 = b_2/b_1 = \dots$ (定理 40: 关于任意多个由两个数所成之集之 H).

(5) 設 $\phi = (1 + x^r)^{1/r}$, 其中 r 不是 0 或 1, 又設(3.8.2)中之橫标和权分別为 $a_2/a_1, b_2/b_1, \dots$ 和 $a_1, b_1, \dots$. 在这种情形, 当 $r > 1$ 时 ϕ 为凸的, 当 $r < 1$ 时 ϕ 为凹的. 我們有(比如說)

$$\{(a_1 + b_1 + \cdots + l_1)^r + (a_2 + b_2 + \cdots + l_2)^r\}^{1/r} < \\ < (a_1^r + a_2^r)^{1/r} + (b_1^r + b_2^r)^{1/r} + \cdots + (l_1^r + l_2^r)^{1/r},$$

只要 $r > 1$ 且 $a_2/a_1, b_2/b_1, \cdots$ 不全相等(关于任意多个由两个数所成之集之 M)。要記住, H 和 M 皆可用归納法推广到由更多的数所成之集上去。

(6) 97. 若 $a > 0, p > 0$, 則

$$\exp\left(\frac{\sum p \log a}{\sum p}\right) < \frac{\sum pa}{\sum p} < \exp\left(\frac{\sum pa \log a}{\sum pa}\right),$$

除非所有之 a 皆相等。

上式中我們把 q 写成 p , 这是为了对称的緣故。若令 $\phi(x) = \log x$, 这是一凹函数, 則前一不等式即 (3.8.2) 反号。它与 G (定理 9) 等价。若令 $\phi(x) = x \log x$, 这是一凸函数, 則后一不等式即 (3.8.2)。

3.12. 多变量凸函数. 設 D 为平面 (x, y) 上之一凸域, 即包含連結其中任何两点的整个直綫段的一域¹⁾。若函数 $\Phi(x, y)$ 在 D 中处处有定义, 且对 D 中所有之 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 有

$$\Phi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \{\Phi(x_1, y_1) + \Phi(x_2, y_2)\}, \quad (3.12.1)$$

則称 $\Phi(x, y)$ 在 D 中为凸的²⁾。这个定义比要求函数分別关于 x 和 y 具有凸性要强些; 例如 xy 对每一 y 是 x 的一凸函数, 对每一 x 是 y 的一凸函数, 但它却不是 x 和 y 的凸函数。

刚才所下的定义有一另外的形式, 它用起来常常要方便些。設 x, y, u, v 已經給定, 而来考虑使得 $(x + ut, y + vt)$ 属于 D 的 t 值(若存在的話)。因 D 为凸的, 故这种值做成一區間(它可能为

1) 只須考虑矩形域即可, 但应加之于 D 的自然限制却是凸性。关于与凸域或一般的域有关的拓扑問題的討論, 不在我們的計劃之內。

2) 关于单变数凸函数的概念, 还有一个更广泛些的推广, 它在函数論中甚为重要, 但我們將不予討論。若函数 $\Phi(x, y)$ 在任一圆的圆心之值不超过它在圓周上的值的平均, 則称之为次調和的。特別, 若 Φ 为两次可微, 且

$$\nabla^2 \Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} \geq 0,$$

則它是次調和的。关于次調和函数的理論, 可参考 F. Riesz[5, 9], Montel[1]。

空集)。于是,若对每一组 x, y, u, v , 函数

$$\chi(t) = \Phi(x + ut, y + vt) \quad (3.12.2)$$

在所說的 t 区間內为 t 之一凸函数,則称 $\Phi(x, y)$ 在 D 內为凸的。这定义和先前所給的定义等价。盖若

$$x + ut_1 = x_1, y + vt_1 = y_1, x + ut_2 = x_2, y + vt_2 = y_2,$$

則(3.12.1)即变为

$$\chi\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \{\chi(t_1) + \chi(t_2)\}.$$

若 $-\Phi$ 为凸的,則 Φ 称为凹的。

若 $z = \Phi(x, y)$ 为直角坐标系中一曲面之方程,則(3.12.1)即謂:曲面的任一弦之中点常在曲面的相应点上或其上方。若曲面为連續,則可推知整个弦皆在曲面上或上方,且曲面上任何多个随意加权之点之重心常在曲面上或上方。这就是下之定理中所述者。

98. 若 $\Phi(x, y)$ 为連續,且为凸的,則

$$\Phi(\sum qx, \sum qy) \leq \sum q\Phi(x, y). \quad (3.12.3)$$

此定理之証明,除了在記号上一些明显之改变外,与定理 86 之証明相同。

也有一个与定理 88 相应之定理;只須断言曲面沒有一条弦(除了它的端点之外)全部在曲面之下即可。§ 3.7 中所有其它之注释經明显的改变之后仍然成立。

与定理 94 和定理 95 相应的定理是

99. 若 $\Phi(x, y)$ 在一开域 D 內为两次可微,則其在 D 內为一凸函数之充要条件是二次型

$$Q = \Phi_{xx}u^2 + 2\Phi_{xy}uv + \Phi_{yy}v^2$$

对于所有之 u, v 及 D 中所有之 (x, y) 皆为正¹⁾。

若 Q 严格为正²⁾,則(3.12.3)中不等号成立,除非所有之 x 和所

1) $Q \geq 0$.

2) 除 $u = v = 0$ 外 $Q > 0$.

有之 y 皆相等。

(1) 条件为必要的。若 (x, y) 属于 D ，则由(3.12.2)定义之 $\chi(t)$ 在 $t = 0$ 的一邻域内为凸的。因而由定理 94, $\chi''(0) \geq 0$, 即 $Q \geq 0$ 。

(2) 条件为充分的。若

$$\sum q = 1, \quad X = \sum qx, \quad Y = \sum qy,$$

则

$$\begin{aligned} \Phi(x_v, y_v) &= \Phi(X, Y) + (x_v - X)\Phi_x^0 + (y_v - Y)\Phi_y^0 \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ (x_v - X)^2 \Phi_{xx}^1 + 2(x_v - X)(y_v - Y)\Phi_{xy}^1 + (y_v - Y)^2 \Phi_{yy}^1 \}, \end{aligned}$$

其中指标 0 表示点 (X, Y) , 指标 1 表示连接此点与 (x_v, y_v) 之直线上的某一点。由此即得

$$\sum q \Phi(x, y) \geq \Phi(X, Y) = \Phi(\sum qx, \sum qy).$$

若 Q 严格为正, 且等号成立, 则对所有之 v , $x_v = X$, $y_v = Y$ 。

注意 Q 为正的充要条件是

$$\Phi_{xx} \geq 0, \quad \Phi_{yy} \geq 0, \quad \Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}^2 \geq 0, \quad (3.12.4)$$

严格为正的充要条件是

$$\Phi_{xx} > 0, \quad \Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}^2 > 0. \quad (3.12.5)$$

若(3.12.4)中第三个不等式成立, 而前两个不等式以反号成立, 则它为负。

讀者可将本节之定理和定义推广到两个以上变数的函数之情形。

3.13. Hölder 不等式之推广。 我們可将 Hölder 不等式写成

$$\mathfrak{A}(ab) \leq \mathfrak{M}_F(a) \mathfrak{M}_G(b) \quad (3.13.1)$$

或

$$\sum qab \leq F^{-1}\{\sum qF(a)\} G^{-1}\{\sum qG(b)\} \quad (3.13.2)$$

之形式, 其中 $F(x) = x^r$ ($r > 1$), $G(x) = x^{r'}$, r' 同平常一样, 乃是在 § 2.8 的意义下与 r 共轭的指数。若令

$$\begin{aligned} \phi &= F^{-1}, \quad \psi = G^{-1}, \quad F(a) = x, \quad G(b) = y, \\ a &= \phi(x), \quad b = \psi(y), \end{aligned}$$

則得

$$\sum q\phi(x)\psi(y) \leq \phi(\sum qx)\psi(\sum qy), \quad (3.13.3)$$

其最简单的情形是

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ \phi(x_1)\psi(y_1) + \phi(x_2)\psi(y_2) \} \\ & \leq \phi \left\{ \frac{1}{2} (x_1 + x_2) \right\} \psi \left\{ \frac{1}{2} (y_1 + y_2) \right\}, \end{aligned}$$

它表示这样的一个事实，即 $\phi(x)\psi(y)$ 是 x 和 y 的凸函数。当（恰如这里的情形） ϕ 和 ψ 为連續时，它即等价于更一般的不等式 (3.13.3)。因之，将上之論証（具有任意的 ϕ 和 ψ ）倒轉，則得

100. 若 F 和 G 为連續且严格單調，則 $\mathfrak{A}(ab)$ 与 $\mathfrak{M}_F(a)\mathfrak{M}_G(b)$ 可比較之充要条件是 $F^{-1}(x)G^{-1}(y)$ 为二变数 x 与 y 之凹或凸函数。在前一情形，(3.13.1)成立，在后一情形，不等式反号。

我們可取 $F(x) = x^r$, $G(y) = y^s$ 作为一例。此时由定理 100 和定理 99 即得

$$\mathfrak{A}(ab) \leq \mathfrak{M}_r(a)\mathfrak{M}_s(b),$$

只要 $r > 1$, $s > 1$, 且 $(r-1)(s-1) \geq 1$ 。若 $r < 1$, $s < 1$, $(1-r)(1-s) \geq 1$, 則不等式反号。这些就是仅有的可以比較的情形¹⁾。在論証中， $r = 0$ 和 $s = 0$ 这两种情形排除在外，但若用指数去代替方次，这两种情形也可包括进去。

对于 Hölder 不等式，我們或許可以寻求一个更为直接的推广。Hölder 不等式謂：若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 x 的互逆的正方次，且或

$$F(x) = xf(x), \quad G(x) = xg(x), \quad (a)$$

或

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad G(x) = \int_0^x g(t)dt, \quad (b)$$

則(3.13.1)成立，因而我們可以期望，它对于别的互逆函数对 f 和 g 也成立，下之定理指出，这样的推广是不可能的。

1) 比較定理 44.

101. 設 $f(x)$ 為一連續且嚴格單增的函數，它當 $x = 0$ 時為 0，且當 $x > 0$ 時具有二次連續導數；又設 $g(x)$ 為其反函數（它必然具有同樣的性質）。設 $F(x)$ 和 $G(x)$ 由 (a) 或 (b) 定義，且 (3.13.1) 對所有正的 a, b 皆成立，則 f 必為 x 的一方次，且 (3.13.1) 就是 Hölder 不等式。

我們來討論情形 (a)¹⁾。若我們象在定理 100 的證明中那樣，將 F^{-1} 和 G^{-1} 寫成 ϕ 和 ψ ，則 $\phi(x)\psi(x)$ 必為 x 和 y 的一凹函數。由定理 99 和 (3.12.4)²⁾，即知對於所有正的 x 和 y ，有 $\phi'' \leq 0$ ， $\psi'' \leq 0$ 和

$$\{\phi'(x)\psi'(y)\}^2 \leq \phi(x)\psi(y)\phi''(x)\psi''(y). \quad (3.13.4)$$

若 $\phi(x) = u$ ， $\psi(x) = v$ ，則得

$$x = F(u) = uf(u), \quad \frac{x}{u} = f(u), \quad u = g\left(\frac{x}{u}\right),$$

$$x = \frac{x}{u} g\left(\frac{x}{u}\right) = G\left(\frac{x}{u}\right), \quad \frac{x}{u} = \psi(x) = v,$$

因而有

$$\phi(x)\psi(x) = x. \quad (3.13.5)$$

由是有

$$\phi''(x)\psi(x) + 2\phi'(x)\psi'(x) + \phi(x)\psi''(x) = 0,$$

由 (3.13.4) 即得

$$(\phi''\psi + \phi\psi'')^2 = 4\phi'^2\psi'^2 \leq 4\phi\psi\phi''\psi'',$$

式中所有之變量皆是 x 。上式只當

$$\psi''\phi = \phi\psi'' = -\phi'\psi', \quad \phi''\phi + \phi'\psi' = 0$$

或 $\phi'\psi'$ 為一常數時始能成立。因之，由 (3.13.5)， $x\phi'/\phi$ 為一常數。在此種情形， ϕ 和其它之函數皆為 x 之方次。

3.14. 關於單調函數的一些定理。 在這裡我們搜集了一些後面將要用到的簡單定理。其中第一個定理正如同 (3.4.2) 刻劃出連續凸函數一樣刻劃出了單調函數。

1) 關於情形 (b)，可參考 Cooper[4]。

2) 將記號作適當的改變。

$$(\sum p)\phi(\sum x) \leq \sum p\phi(x) \quad (3.14.1)$$

对所有正的 x 和 p 成立之充要条件是 $\phi(x)$ 对 $x > 0$ (依广义) 单降. 相反的不等式类似地刻划单增函数.

若 $\phi(x)$ 为严格单降, 且 x 的个数大于 1, 则严格不等式成立.

(i) 若 ϕ 单降, 则 $\phi(\sum x) \leq \phi(x)$, 因而有 (3.14.1).

(ii) 若在 (3.14.1) 中取 $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = h$, $p_1 = 1$, $p_2 = p$, 则得

$$(1+p)\phi(x+h) \leq \phi(x) + p\phi(h).$$

令 $p \rightarrow 0$, 则可看出 $\phi(x+h) \leq \phi(x)$.

当 $\phi(x) = x^{\alpha-1}$ ($0 < \alpha < 1$), $p = x$, 即得定理 19.

103.

$$f(\sum x) \leq \sum f(x) \quad (3.14.2)$$

对所有的正 x 成立之充分条件是 $x^{-1}f(x)$ 为单降. 若 $x^{-1}f(x)$ 为严格单降, 且 x 的个数大于 1, 则有严格的不等式.

盖若令 $f(x) = x\phi(x)$, 则 (3.14.2) 即变为 (3.14.1), 其中 $p = x$. 这条件并不是必要的, 盖 (3.14.2) 对于所有使得

$$f(x) > 0, \quad \max f(x) \leq 2 \min f(x)$$

之 $f(x)$ 皆成立; 例如 $f(x) = 3 + \cos x$.

104. 若

$$\phi(\sum px) \leq \sum p\phi(x) \quad (3.14.3)$$

对所有正的 x 和 p 成立, 则 $\phi(x)$ 为 x 的一倍数.

若在 (3.14.3) 中取 $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $p_1 = y/2x$, $p_2 = \frac{1}{2}$, 则得

$$\frac{\phi(y)}{y} \leq \frac{\phi(x)}{x}.$$

1) Jensen[2]. Jensen 并没有提到条件的必要性.

因 x 和 y 可以交換, 故 ϕ/x 为一常数.

3.15. 具有任意函数的和数: Jensen 不等式的推广. 我們
可以定义包含一任意函数 ϕ 的“和数”, 同样也可以定义相应的平
均. 令

$$\mathfrak{S}_{\phi}(a) = \phi^{-1}\{\sum \phi(a)\},$$

其中 $\phi(x)$ 和在 § 3.1 中一样为一連續且严格单調之函数; 但这里
还需要多假定一些, 因为 $\sum \phi(a)$ 并不(如象 $\sum q\phi(a)$ 那样)是 $\phi(a)$
的值的平均, 因而不一定是 $\phi(x)$ 的一个可能值. 因此, 我們
假定 $\phi(x)$ 对所有之正 x 皆为正, 且当 $x \rightarrow 0$ 或当 $x \rightarrow \infty$ 时趋于
 ∞ . 我們也假定諸 a 皆为正, 而当有某些 a 为 0 时, 我們就註讀者
自己去考虑作适当的修改¹⁾.

105²⁾. 若 ψ 和 χ 为連續, 严格单調, 且为正, 則当 (1) ψ 和 χ 朝
相反方向变化时, 或 (2) ψ 和 χ 朝相同方向变化而 χ/ψ 为单調时,
 $\mathfrak{S}_{\psi}$ 和 $\mathfrak{S}_{\chi}$ 可比較.

在情形(1), 若 ψ 为单降而 χ 为单增, 則

$$\mathfrak{S}_{\psi} \leq \mathfrak{S}_{\chi}. \quad (3.15.1)$$

在情形(2), 若 χ/ψ 为单降, 則(3.15.1)成立. 情形(1)中等号只当
仅有一个 a 时才成立, 若 χ/ψ 为严格单調, 在情形(2)中情况亦
然.

在情形(1), 当 χ 为单增时, 有

$$\mathfrak{S}_{\chi}(a) \geq \chi^{-1}\{\chi(\max a)\} = \max a.$$

同理, 有 $\mathfrak{S}_{\psi}(a) \leq \min a$.

在情形(2), 設 ϕ 和 χ 为单增, 并令

$$\phi(a) = x, \quad a = \phi^{-1}(x), \quad \chi\phi^{-1} = f,$$

則(3.15.1)化为(3.14.2), 其当 $x^{-1}f(x)$ 为单降时, 即当

1) 例如設 $\phi(x) = x^r$, 其中 $r > 0$ (§2.10 的情形). 此时 $\phi(0) = 0$, 因而就不必
将象 $(1, 1)$ 和 $(1, 1, 0)$ 这样的两組 a 加以区别. 若 $\phi(0)$ 为正, 这样的两組 a 就
必須給以区分, 因而定理 105 中关于等号成立的情形的判断就变得很麻煩. 若
 $x \rightarrow 0$ 时 $\phi(x) \rightarrow \infty$, 則有任一 a 为 0 时, $\mathfrak{S}_{\phi}(a) = 0$.

2) 这定理的实质部分属于 Cooper^[2].

$$\frac{f\{\phi(x)\}}{\phi(x)} = \frac{\chi(x)}{\phi(x)}$$

为单降时成立. 若 ϕ 和 χ 为单降, 则(3.15.1)化为(3.14.2)的反号, 其当 f/χ 为单增, 或 χ/ϕ 为单降时成立.

讀者不难辨別等号成立的情形. 当 $\phi = x^r$, $\chi = x^r$ 时即得定理 19.

我們也可以定义与 § 2.10 (iv) 中之和相类似的加权和, 即

$$\mathfrak{I}_\phi(a) = \phi^{-1}\{\sum p\phi(a)\},$$

其中諸 p 为任意的正数. $\mathfrak{I}_\phi$ 当 $\sum p = 1$ 时化为 $\mathfrak{M}_\phi$, 当每一 p 皆为 1 时化为 $\mathfrak{S}_\phi$.

3.16. Minkowski 不等式的推广. 若 $\phi(x) = x^r$, 其中 $r > 1$, 則有

$$\mathfrak{M}_\phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \{\mathfrak{M}_\phi(a) + \mathfrak{M}_\phi(b)\}, \quad (3.16.1)$$

$$\mathfrak{S}_\phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \{\mathfrak{S}_\phi(a) + \mathfrak{S}_\phi(b)\}, \quad (3.16.2)$$

$$\mathfrak{I}_\phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \{\mathfrak{I}_\phi(a) + \mathfrak{I}_\phi(b)\}, \quad (3.16.3)$$

所有这些不等式本质上都是等价的, 且皆包含在定理 24 之中.

对于一般的 ϕ , 这些不等式并不等价, 它們全都具有形式

$$2\phi^{-1}\left\{\sum p\phi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\} \leq \phi^{-1}\{\sum p\phi(a)\} + \phi^{-1}\{\sum p\phi(b)\}, \quad (3.16.4)$$

不过諸权 p 之間的差別現在却有重要意义. 在(3.16.1)中, $\sum p = 1$; 在(3.16.2)中, $p = 1$; 在(3.16.3)中, 諸 p 为任何正数. 我們称此三种情形为情形(I), (II), (III). 在討論它們时, 我們將假定对 $\alpha > 0$, 有

$$\phi > 0, \quad \phi' > 0.$$

不等式(3.16.4)謂, 对于給定之 p , $\phi^{-1}\{\sum p\phi(x)\}$ 是 n 个变数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 之一凸函数; 或按照 § 3.12¹⁾,

1) 我們把 § 3.12 中的結果从两个变数推广到 n 个变数这种明显的推广看作是当然成立的事情.

$$\chi(t) = \phi^{-1}\{\sum p\phi(x + ut)\}$$

对于所有使得 $x + ut$ 为正的 t , 都是 t 的凸函数, 其中諸 x, p, u 为固定之数, 諸 x 和 p 为正数. 若 ϕ 为二次可微, 則由定理 94, 此条件等价于 $\chi''(0) \geq 0$. 經直接計算即得

$$\{\phi'(\chi)\}^3 \chi'' = \{\phi'(\chi)\}^2 \sum p u^2 \phi''(x) - \phi''(\chi) \{\sum p u \phi'(x)\}^2, \quad (3.16.5)$$

其中

$$\chi = \chi(0) = \phi^{-1}\{\sum p\phi(x)\}, \quad (3.16.6)$$

且 $\chi'' = \chi''(0)$. 因此, 我們要去考虑, 在什么情况之下有

$$\{\phi'(\chi)\}^2 \sum p u^2 \phi''(x) - \phi''(\chi) \{\sum p u \phi'(x)\}^2 \geq 0. \quad (3.16.7)$$

容易看出, 若不在 ϕ'' 的符号上加以限制, (3.16.7) 一般不能成立. 例如設 $\phi' > 0$, 又設 ϕ'' 为連續, 且有时为負. 于是我們可选取 x_1 和 x_2 , 使得 $\phi''(x_1) < 0$, $\phi''(x_2) < 0$, 又可选取 u_1 和 u_2 , 使得

$$p_1 u_1 \phi'(x_1) + p_2 u_2 \phi'(x_2) = 0.$$

在此种情形, (3.16.7) 对 $n = 2$ 即化为

$$\{\phi'(\chi)\}^2 \{p_1 u_1^2 \phi''(x_1) + p_2 u_2^2 \phi''(x_2)\} \geq 0,$$

而这是不对的. 因此下面我們將假定

$$\phi > 0, \quad \phi' > 0, \quad \phi'' > 0.$$

我們可将 (3.16.7) 写成

$$\psi(\chi) = \frac{\phi'^2(\chi)}{\phi''(\chi)} \geq \frac{\{\sum p u \phi'(x)\}^2}{\sum p u^2 \phi''(x)}. \quad (3.16.8)$$

但由定理 7,

$$\begin{aligned} (\sum p u \phi')^2 &= \left\{ \sum \sqrt{(p \phi'')} u \cdot \sqrt{\left(\frac{p \phi'^2}{\phi''}\right)} \right\}^2 \\ &\leq \sum p u^2 \phi'' \sum p \frac{\phi'^2}{\phi''}. \end{aligned} \quad (3.16.9)$$

故若

$$\psi(\chi) \geq \sum p \frac{\{\phi'(x)\}^2}{\phi''(x)} = \sum p \phi(x) \quad (3.16.10)$$

对所有之 x 成立, 則 (3.16.8) 对所有之 x, u 必然成立. 此外, 若

$$u = \frac{\phi'(x)}{\phi''(x)} \quad (v = 1, 2, \dots, n),$$

則(3.16.9)中等号成立, 因而(3.16.10)是(3.16.8)成立的一个充要条件. 最后, 若令 $y = \phi(x)$,

$$\Phi(y) = \psi(x) = \psi\{\phi^{-1}(y)\} = \frac{\{\phi'[\phi^{-1}(y)]\}^2}{\phi''\{\phi^{-1}(y)\}}, \quad (3.16.11)$$

則(3.16.10)即变成

$$\Phi(\sum p y) \geq \sum p \Phi(y). \quad (3.16.12)$$

我們現在分別来考虑情形(I), (II), (III).

(i) 在情形(I), (3.16.12)成立之充要条件是 $\Phi(y)$ 为 y 之一凹函数.

(ii) 在情形(II), (3.16.12)即(3.14.2)之反号, 且以 y, Φ 代 x, f , (3.16.2)成立之一充分(虽然不是必要)条件是 Φ/y 为 y 之一增函数, 或者, 也是一样, $\phi\phi''/\psi'^2$ 为 x 之一单降函数.

(iii) 在情形(III), 經适当的變化, (3.16.12)即化为(3.14.3). 它只当 $\Phi(y)$ 是 y 的一倍数, 或当 $\phi\phi''/\psi'^2$ 为一常数时才能普遍成立, 此时 ϕ 即为下列形式之一:

$$(ax + b)^c \quad (a > 0, c > 1^1), \quad e^{ax+b}. \quad (3.16.13)$$

在此种情形, 它确实成立.

条件(i)和(ii)还有另外的形式, 这些形式可以更好的表出它們之間相互的关系. 我們將假定 $\phi^{(IV)}$ 为連續, 这样做并不会严重影响結果的好处. 于是, 由

$$\Phi(y) = \frac{\phi'^2(x)}{\phi''(x)}$$

即得

$$\begin{aligned} \Phi'(y) &= \frac{d}{dx} \frac{\phi'(x)}{\phi''(x)} + 1, \\ \Phi''(y) &= \frac{1}{\phi'(x)} \frac{d^2}{dx^2} \frac{\phi'(x)}{\phi''(x)}. \end{aligned}$$

1) 因 $\phi'' > 0$.

因之, $\Phi(y)$ 当且仅当 $\phi'(x)/\phi''(x)$ 为凹时为凹, 换言之, 即当 $\phi'\phi''/\phi'^2$ 为单增时为凹. 这就是(i)之另外形式, 而(ii)之一另外的形式则是“ ϕ/ϕ' 为凸函数”.

总括我们的结果, 即得

106¹⁾. 设 $\phi^{(iv)}$ 为连续, 且 $\phi > 0, \phi' > 0, \phi'' > 0$, 则

(i) (3.16.1)成立的充要条件是 ϕ'/ϕ'' 为凹的, 或 $\phi'\phi''/\phi'^2$ 为单增;

(ii) (3.16.2)成立的充分 (但不是必要的) 条件是 ϕ/ϕ' 为凸的, 或 $\phi\phi''/\phi'^2$ 为单降;

(iii) (3.16.3)成立的充要条件是 ϕ 为(3.16.13)中的一函数.

当(比如说) $\phi > 0, \phi' < 0, \phi'' > 0$, 或当这些不等式皆反号时, 我们让读者自己去提出这一定理的变形. 一件有教益的事情是去证明(i)(从某一 x 之后)当 $\phi = x^p/\log x$ 时成立, 其中 $p > 1$, 但当 $\phi = x^p \log x$ 时则不然; 对于(ii), 情况正好相反.

3.17. 集合的比较. 定理 105 谓, 对于一对给定的函数 ϕ 和 χ 及所有的 a , 有

$$\Theta_\phi(a) \leq \Theta_\chi(a).$$

本节的定理则属于另一种不同的形式, 它包含给定的集合 (a) 和 (a') 及一个变动的函数 ϕ . 我们现在来考虑在什么条件之下, 对于给定的 a 和 a' 及所有属于某一类之函数 ϕ , 有

$$\Theta_\phi(a') \leq \Theta_\phi(a),$$

或者, 对于单增的 ϕ 来说也是同一回事, 有

$$\begin{aligned} \phi(a'_1) + \phi(a'_2) + \cdots + \phi(a'_n) \\ \leq \phi(a_1) + \phi(a_2) + \cdots + \phi(a_n). \end{aligned} \quad (3.17.1)$$

107. 设集合 (a) 和 (a') 系按从小到大排列, 则(3.17.1)对于所有连续且单增的函数 ϕ 皆成立的充要条件是

$$a'_v \leq a_v \quad (v = 1, 2, \cdots, n).$$

条件之为充分是显而易见的. 要证明它为必要, 我们可假定

1) 这一类型早先的结果属于 Bosanquet^[1]; Bosanquet 考虑了情形(II).

对于某一 μ , 有 $a'_\mu > a_\mu$ 和 $a_\mu < b < a'_\mu$, 并假定 $\phi^*(x)$ 系定义为

$$\phi^*(x) = 0 \quad (x \leq b), \quad \phi^*(x) = 1 \quad (x > b).$$

于是

$$\sum \phi^*(a') \geq \mu > \mu - 1 \geq \sum \phi^*(a).$$

故(3.17.1)对于 ϕ^* 不成立, 因而对于 ϕ^* 的一个适当选取的連續单增的逼近也不成立.

下一个定理和 §§ 2.18—2.20 中的定理有关.

108. 欲使(3.17.1)对于所有之連續凸函数 ϕ 成立, 其必要且充分的条件是: 或(1) $(a') \prec (a)$, 即 (a') 依 § 2.18 之意义为 (a) 所控制, 或(2) (a') 依 § 2.20 之意义是 (a) 之一均值.

若这些条件皆满足, 且 $\phi''(x)$ 对所有之 x 存在且为正, 则在(3.17.1)中, 等号只当 (a) 和 (a') 恆等时才出现¹⁾.

我們业已証明(定理 46) 这两个条件是等价的, 因此只須証明前者为必要后者为充分即可. 我們可以假定 (a) 和 (a') 系按降序排列.

(i) 条件(1)是必要的. 条件(1)謂

$$a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_v \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_v \\ (v = 1, 2, \cdots, n); \quad (3.17.2)$$

在 $v = n$ 时取等号.

函数 x 和 $-x$ 在任何区間內都是連續且凸的. 故若(3.17.1)成立, 則 $\sum a' \leq \sum a$, $\sum(-a') \leq \sum(-a)$, 即 $\sum a' = \sum a$, 此即(3.17.2)中当 $v = n$ 时以等号成立的情形.

其次, 令

$$\phi(x) = 0 \quad (x \leq a_v), \quad \phi(x) = x - a_v \quad (x > a_v),$$

則 $\phi(x)$ 在任何区間內为連續且凸的, 且 $\phi(x) \geq 0$, $\phi(x) \geq x - a_v$. 因之,

1) Schur^[2] 証明了(2)是一个充分条件, 关于等号出現情况的說明也是属于他的. 对于完整的定理, 可参考 Hardy, Littlewood 和 Pólya^[3], Karamata^[1] 考虑了条件(1).

$$\begin{aligned} a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_v - va_v &\leq \\ &\leq \sum \phi(a') \leq \sum \phi(a) = a_1 + a_2 + \cdots + a_v - va_v, \end{aligned}$$

此即(3.17.2).

(ii) 条件(2)是充分的. 若 (a') 为 (a) 之一均值, 则对于所有之 μ 和 v , 有

$$a'_\mu = p_{\mu 1}a_1 + p_{\mu 2}a_2 + \cdots + p_{\mu n}a_n,$$

其中

$$p_{\mu v} \geq 0, \quad \sum_{\mu=1}^n p_{\mu v} = 1, \quad \sum_{v=1}^n p_{\mu v} = 1.$$

若 ϕ 为凸的, 则

$$\phi(a'_\mu) \leq p_{\mu 1}\phi(a_1) + \cdots + p_{\mu n}\phi(a_n). \quad (3.17.3)$$

于是, (3.17.1) 经求和即可得出.

(iii) 若在(3.17.1)中等号成立, 则(3.17.3)必对于所有之 μ 以等号成立.

若 $\phi''(x) > 0$, 且每一 $p_{\mu v}$ 皆为正, 则由定理 95 可知, 所有之 a 皆相等. 在此种情形, 所有之 a' 也皆相等, 且两者具有同样的公共值.

但一般说来, 某些 $p_{\mu v}$ 可能为 0. 若 $p_{\mu v} > 0$, 亦即 a_v 在关于 a'_μ 的公式中真正出现, 则称 a'_μ 和 a_v 是直接有联系的; 若某两个元素(不管是 a 或 a') 可由一串元素连成一链, 链中相邻的两个元素都是直接有联系的, 则称该两元素是有联系的.

我们现在来考虑与 a_1 有联系的所有之元素做成的集 C . 我们可将此集写成(若有必要, 可将元素的编号加以改变)

$$(C) \quad a_1, a_2, \cdots, a_r, a'_1, a'_2, \cdots, a'_s.$$

在 C 中每一 a' 的表达式中, 只出现 C 中之 a 而无其他的 a , 同时也没有别的 a' 使得在它的表达式中真正出现 C 中之 a . 于是, 利用诸 p 的和之性质, 即得

$$s = \sum_{\mu=1}^r \sum_{v=1}^r p_{\mu v} = \sum_{v=1}^r \sum_{\mu=1}^r p_{\mu v} = r,$$

故 C 所包含的 a' 与其所包含的 a 一样多. 由定理 95 和(3.17.3)中

之等式，可知与一 a' 直接有联系的所有之 a 都等于该 a' 。因之，所有有联系的 a 和 a' 皆相等，因而 C 包含每一集中之 r 个全都等于 a 的元素。

从 a_{r+1} 出发重复此項論証，如是进行，我們即可断言： (a) 和 (a') 两者皆是由一些各由相同元素做成之块所組成，相对应的块中之元素之值相同。

我們已經順便証明了

$$109. \text{ 若 } \phi''(x) > 0, p_{\mu\nu} > 0, \sum_{\mu} p_{\mu\nu} = 1, \sum_{\nu} p_{\mu\nu} = 1, a'_{\mu} = \sum_{\nu} p_{\mu\nu} a_{\nu}, \text{ 則}$$

$$\sum \phi(a') < \sum \phi(a), \quad (3.17.4)$$

除非所有之 a 和 a' 皆相等。

若所有之 a' 皆相等，(3.17.4) 即为定理 95 之一特別情形。

定理 108 的一个常用到的特別情形是

$$110. \text{ 若 } \phi(x) \text{ 为連續且凸，并且 } |h'| \leq |h|, \text{ 則}$$

$$\phi(x-h') + \phi(x+h') \leq \phi(x-h) + \phi(x+h). \quad (3.17.5)$$

3.18. 凸函数的其他的普遍性質。 从 § 3.6 开始，我們假定了 $\phi(x)$ 为連續。我們現在将放弃这一假設而来考虑 (3.5.1) 的直接推論。下述諸定理的总的論断就是：一个凸函数要么就很規則，要么就很不規則；特別，一个不“完全不規則”的凸函数必为連續（因而連續性的假設比原来意料到的要少限制人得多）。

111. 設 $\phi(x)$ 在开区間 (H, K) 內为凸的，且在 (H, K) 內的某一区間中为上有界，則 $\phi(x)$ 在开区間 (H, K) 內为連續。 此外， $\phi(x)$ 还处处具有左导数和右导数；右导数不小于左导数，且两个导数皆随 x 而增加。

由此可知，不連續凸函数在任一区間內皆为无界。

我們先証明 $\phi(x)$ 在 (H, K) 內之任一区間中为上有界。証明核心就是这点。§ 3.6 之論証指出，对于任何有理数 q ，有

$$\phi(\sum qx) \leq \sum q\phi(x);$$

只是从有理数 q 到无理数 q 的过程中我們才用到連續性的假設。

今設 i 是 (h, k) ，并設 ϕ 在 i 中的上界為 G ，我們只須證明 ϕ 在 (l, h) 和 (k, m) 中為上有界即可，其中 l 和 m 是滿足關係 $H < l < h < k < m < K$ 的任何數。若 x 屬於 (l, h) ，則在 i 中可得一 ξ ，使得 x 將 (l, ξ) 分成有理數之比。於是， $\phi(x)$ 就小於一個由 $\phi(l)$ 和 G 所決定的界，因而在 (l, h) 中為上有界。同理，它在 (k, m) 中亦必為上有界。

要詳細敘述這一論證，我們現今令 h 表示 i 之左端， G 為 ϕ 在 i 中的上界，并假定

$$H < l < x < h,$$

我們可以選取整數 m 和 $n > m$ ，使得

$$\xi = l + \frac{n}{m}(x - l)$$

屬於 i ，因而

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi\left\{\frac{m\xi + (n-m)l}{n}\right\} \leq \frac{m}{n}\phi(\xi) + \frac{n-m}{n}\phi(l) \\ &\leq \frac{m}{n}G + \frac{n-m}{n}\phi(l) \leq \max\{G, \phi(l)\}.\end{aligned}$$

因而 $\phi(x)$ 在 (l, h) 中為上有界。

在證明定理的其餘部分時，我們可以只限於討論 (H, K) 內之一區間 (H', K') ，或者，也是一樣，我們可以假定 ϕ 在原區間內為上有界。於是我們就假定 $\phi(x)$ 在 (H, K) 內 $\leq G$ ， $H < x < K$ ， m 和 $n > m$ 皆為正整數， δ 是一充分小的（正的或負的）數，使得 $x + n\delta$ 仍屬於 (H, K) 。於是，

$$\begin{aligned}\phi(x + m\delta) &= \phi\left\{\frac{m(x + n\delta) + (n-m)x}{n}\right\} \\ &\leq \frac{m}{n}\phi(x + n\delta) + \frac{n-m}{n}\phi(x)\end{aligned}$$

或

$$\frac{\phi(x + n\delta) - \phi(x)}{n} \geq \frac{\phi(x + m\delta) - \phi(x)}{m} \quad (m < n).$$

以 $-\delta$ 代 δ ，并結合此二不等式，則得

$$\begin{aligned}\frac{\phi(x+n\delta)-\phi(x)}{n} &\geq \frac{\phi(x+m\delta)-\phi(x)}{m} \\ &\geq \frac{\phi(x)-\phi(x-m\delta)}{m} \geq \frac{\phi(x)-\phi(x-n\delta)}{n} \quad (3.18.1)\end{aligned}$$

(中間的不等式可由 ϕ 的凸性直接得出).

若在(3.18.1)中取 $m=1$, 并記住 $\phi \leq G$, 則可看出

$$\begin{aligned}\frac{G-\phi(x)}{n} &\geq \phi(x+\delta)-\phi(x) \\ &\geq \phi(x)-\phi(x-\delta) \geq \frac{\phi(x)-G}{n}.\end{aligned} \quad (3.18.2)$$

我們現假定 $\delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, 但要同時使得 $x \pm n\delta$ 保持在區間之內. 于是, 由(3.18.2)可知, $\phi(x+\delta)$ 和 $\phi(x-\delta)$ 趨于 $\phi(x)$, 因而 ϕ 為連續.

其次, 我們假定 $\delta > 0$, 并在(3.18.1)中以 $\frac{\delta}{n}$ 代替 δ , 則得

$$\begin{aligned}\frac{\phi(x+\delta)-\phi(x)}{\delta} &\geq \frac{\phi(x+\delta')-\phi(x)}{\delta'} \\ &\geq \frac{\phi(x)-\phi(x-\delta')}{\delta'} \geq \frac{\phi(x)-\phi(x-\delta)}{\delta}, \quad (3.18.3)\end{aligned}$$

其中 $\delta' = m\delta/n$ 乃是小于 δ 的 δ 的任何有理倍數. 因 ϕ 為連續, (3.18.3) 對任何 $\delta' < \delta$ 皆成立. 由是可知, 當 δ 單調下降趨于 0 時, 左右兩端的商數分別單降和單增, 因而各趨于一極限. 因之, ϕ 具有右方和左方導數 ϕ'_r 和 ϕ'_l , 且 $\phi'_l \leq \phi'_r$.

最后, 我們可以寫 $x-\delta' = x_1, x = x_2, x+\delta = x_3$ (或 $x-\delta = x_1, x = x_2, x+\delta' = x_3$), 于是, 由(3.18.3)即得

$$\frac{\phi(x_3)-\phi(x_2)}{x_3-x_2} \geq \frac{\phi(x_2)-\phi(x_1)}{x_2-x_1}.$$

更有進者, 若 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 則得

$$\frac{\phi(x_4)-\phi(x_3)}{x_4-x_3} \geq \frac{\phi(x_2)-\phi(x_1)}{x_2-x_1}.$$

令 $x_3 \rightarrow x_4, x_2 \rightarrow x_1$, 則得

$$\phi'_r(x_4) \geq \phi'_l(x_4) \geq \phi'_r(x_1) \geq \phi'_l(x_1), \quad (3.18.4)$$

这就完全証明了定理.

由上所述显然可以看出, 若 $x_1 \leq x_2 < x_3 \leq x_4$, 則

$$\phi'_l(x_4) \geq \frac{\phi(x_3) - \phi(x_2)}{x_3 - x_2} \geq \phi'_r(x_1). \quad (3.18.5)$$

定理 111 关于常微系数 $\phi'(x)$ 的存在与否并没有作什么論断. 但容易証明, 至多除了 x 的一可列集之外, $\phi'(x)$ 常存在. 函数 $\phi_l(x)$, 作为一个单調函数, 至多除了一个这类的集之外为連續. 若它在 x_1 为連續, 則由(3.18.4), $\phi'_r(x)$ 位于 $\phi'_l(x_1)$ 和 $\phi'_l(x_4)$ 之間; 但当 $x_4 \rightarrow x_1$ 时 $\phi'_l(x_4)$ 趋于 $\phi'_l(x_1)$, 故 $\phi'_r(x_1) = \phi'_l(x_1)$, 因而当 $x = x_1$ 时 $\phi'(x)$ 存在.

由(3.18.5)显然也可看出, 若 $\phi(x)$ 在一开区間 (a, b) 中为連續且为凸的, 則对于 (a, b) 的任何閉子区間內的所有 x 和 x' ,

$$\left| \frac{\phi(x') - \phi(x)}{x' - x} \right|$$

为有界.

3.19. 連續凸函数的其他性質. 我們現在假定 $\phi(x)$ 为連續且凸的. 由(3.18.5)可知, 若 $H < \xi < K$, 且

$$\phi'_l(\xi) \leq \lambda \leq \phi'_r(\xi),$$

則直綫

$$y - \phi(\xi) = \lambda(x - \xi) \quad (3.19.1)$$

全部都在此曲綫之下(在曲綫上或其下方). 換言之,

112. 若 $\phi(x)$ 为連續且凸的, 則过曲綫 $y = \phi(x)$ 的每一点至少有一直綫, 它全在曲綫之下.

过曲綫上一点且全在曲綫一边(上边或下边)的直綫叫做該曲綫的支撐綫 (Stützgerade). 若 $\phi(x)$ 为凹的, 則 $\phi(x)$ 的图象在每一点都有一条在曲綫上边的支撐綫. 若 $\phi(x)$ 既是凸的, 又是凹的, 則此二直綫必合而为一. 因而 $\phi(x)$ 必为一直綫.

直接容易看出定理 112 成立. 若 $\xi < x < x'$, P, Q, Q' 为曲綫上与 ξ, x, x' 相对应之点, 則 PQ 在 PQ' 之下, 且 PQ 之斜率随

x 之趋于 ξ 而递减, 因而趋于一极限 ν . 同理, 若 $x < \xi$, 且 x 趋于 ξ , 则 QP 之斜率单增趋于一极限 μ . 若 μ 大于 ν , x_1, x_2 分别小于和大于 ξ , 且充分靠近 ξ , 则 P 必在 P_1P_2 的上方, 与曲线的凸性相矛盾. 因之, $\mu \leq \nu$, 且若 λ 取 μ 和 ν 间的任何值 (μ, ν 包括在内), 则 (3.19.1) 即在曲线的下方.

在这一证明中, 我们并没有求助于定理 111, 但这证明所依据的, 恰恰就是 § 3.18 中比较正式而且是分析的证法所依据的几何思路.

现在反过来, 我们假定 $\phi(x)$ 为连续, 并且具有定理 112 所断言的性质. 若 x_1 和 x_2 是 x 的两个值, P_1 和 P_2 是曲线上与之相应的点, P 是与 $\xi = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ 相应的点, 则 P_1 和 P_2 两者必皆在某一条过 P 点的直线之上方, 且 P_1P_2 之中点也在 P 之上方. 故 $\phi(x)$ 为凸的.

于是我们已证明, 定理 112 的性质给一个连续函数的凸性提供一个充要条件, 因而可以用来作为凸性的另一定义. 就是说, 对于连续函数, 我们可以定义凸性如下: 设 $\phi(x)$ 为 (H, K) 中的一连续函数, 若对 (H, K) 中的任一 ξ , 存在一数 $\lambda = \lambda(\xi)$, 使得对于 (H, K) 中所有之 x , 皆有

$$\phi(\xi) + \lambda(x - \xi) \leq \phi(x),$$

则称 $\phi(x)$ 在 (H, K) 中为凸的.

凸函数的这一定义和基于 (3.5.2) 所给出的定义一样自然, 直接从它推出连续凸函数的一些特征性质不是没有意义的. 例如不等式 (3.4.2) 可以证明如下¹⁾.

象通常一样, 写

$$\mathfrak{A}(b) = \sum qb,$$

并取 $\xi = \mathfrak{A}(a)$, 这是在 a 的变化区域内的一个值, 于是对某一 $\lambda = \lambda(\xi)$ 和所有的 a , 就有

1) Jessen[2].

$$\phi\{\mathfrak{U}(a)\} + \lambda(a - \xi) \leq \phi(a).$$

在等号两边施行运算 $\mathfrak{U}$, 則得

$$\phi\{\mathfrak{U}(a)\} + \lambda\{\mathfrak{U}(a) - \xi\} \leq \mathfrak{U}\{\phi(a)\}$$

或

$$\phi\{\mathfrak{U}(a)\} \leq \mathfrak{U}\{\phi(a)\},$$

此即(3.4.2). 将这一証法与 § 3.10 (ii)中的相比較, 将会是有教益的.

3.20. 不連續凸函数. 由定理 111, 不連續凸函数在任何区間內皆是无界的, 它們的存在只在 Zermelo 公理的假定之下或在 (这对我們的目的來說也是等价的) 連續統是可以良序的假定之下才得到証明.

若

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad (3.20.1)$$

則

$$f(2x) = 2f(x),$$

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x+y) = f(x) + f(y).$$

由是, (3.20.1)之一解必为一凸函数.

Hamel^[1] 曾經証明¹⁾, 若 Zermelo 公理成立, 則对于实数, 存在一組基 $[\alpha, \beta, \gamma, \dots]$, 那就是說, 一組实数 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, 使得每一实数 x 皆可唯一地表成一有限和之形式:

$$x = a\alpha + b\beta + \dots + l\lambda,$$

其中系数 $a, b, \dots, l$ 为有理数. 若我們假設这一事实成立, 我們可以立刻写出(3.20.1)之不連續解. 对 $x = \alpha, \beta, \dots$, 我們随意給定 $f(x)$ 以数值 $f(\alpha), f(\beta), \dots$, 然后一般地定义 $f(x)$ 如

$$f(x) = af(\alpha) + bf(\beta) + \dots + lf(\lambda).$$

于是, 若 $y = a'\alpha + \dots$, 則得

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f\{(a+a')\alpha + \dots\} \\ &= (a+a')f(\alpha) + \dots = f(x) + f(y). \end{aligned}$$

1) 也可参考 Hahn [1, p. 581].

关于凸函数的性质, 方程(3.20.1)的解以及与之有关的不等式等等的更为详尽的研究, 我们可参考 Darboux[1], Fréchet[1,2], F. Bernstein[1], Bernstein 和 Doetsch[1], Blumberg[1], Sierpiński[1,2], Cooper[3], Ostrowski[1], Blumberg 和 Sierpiński 証明, 任何可測凸函数必为連續, Ostrowski 得到了一个更为一般的結果.

各种定理和各种例

113. 若 α 为一常数, $\alpha \neq 0$, $\chi = \alpha\phi$, 則

$$\mathfrak{S}_\chi(a) = \mathfrak{S}_\phi(a), \quad \mathfrak{T}_\chi(a) = \mathfrak{T}_\phi(a).$$

[$\mathfrak{M}$ 的相应的性质已包含在定理 83 之中.]

114. 一凸函数之单增凸函数为凸的.

115. 若一連續曲綫之每一弦总包含位于曲綫上方之一点, 則每一弦上的每一点, 除了端点之外, 皆在曲綫的上方.

116. 若 $\phi(x)$ 为一連續凸函数, $a < b < c$, 且 $\phi(a) = \phi(b) = \phi(c)$, 則 $\phi(x)$ 在 (a, c) 中为一常数.

117. 若所有之数皆为正, 則

$$x \log \frac{x}{a} + y \log \frac{y}{b} > (x+y) \log \frac{x+y}{a+b},$$

除非 $x/a = y/b$.

$$[(x \log x)'' > 0.]$$

118. 若 $f(x)$ 为正, 且两次可微, 則 $\log f(x)$ 为一凸函数之充要条件是 $ff'' - f'^2 \geq 0$.

119. 若 $\phi(x)$ 当 $x > 0$ 时为連續, 且函数 $x\phi(x)$ 和 $\phi\left(\frac{1}{x}\right)$ 中有一为凸的, 則另一亦然.

120. 若 $\phi(x)$ 为正, 两次可微, 且为凸的, 則

$$x^{\frac{1}{2}(s+1)}\phi(x^{-s})(s \geq 1), \quad e^{\frac{1}{2}x}\phi(e^{-x})$$

亦然(前者是对正的 x).

121. 若 ψ 与 χ 为連續且严格单調, χ 为单增, 則

$$\psi^{-1}\{\phi^{q_1}(a_1) \cdots \phi^{q_n}(a_n)\} \leq \chi^{-1}\{\chi^{q_1}(a_1) \cdots \chi^{q_n}(a_n)\}$$

对所有之 a 和 q 成立的充要条件是

$$\phi(y) = \log \{ \lambda \psi^{-1}(e^y) \}$$

为凸的.

[比較定理 92.]

122. 設对一开区間 I 中滿足关系 $x_1 < x_2 < x_3$ 之任何 x_1, x_2, x_3 ,

$$\phi(x_1)(x_3 - x_2) + \phi(x_2)(x_1 - x_3) + \phi(x_3)(x_2 - x_1) \geq 0 \quad (i)$$

或(也是一样)

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \phi(x_1) \\ 1 & x_2 & \phi(x_2) \\ 1 & x_3 & \phi(x_3) \end{vmatrix} \geq 0, \quad (ii)$$

則 $\phi(x)$ 在 I 中为連續, 且在 I 中每一点都有有限的左导数和右导数.

若 $\phi(x)$ 为两次可微, 則(i)和(ii)与微分不等式

$$\phi''(x) \geq 0$$

等价.

[(i)和(ii)是(3.5.2)的另一形式, 故 $\phi(x)$ 为凸的. 因而此定理乃是定理 111 和定理 94 的一部分的重新叙述.]

123. 設对一开区間 I 中滿足关系 $x_1 < x_2 < x_3 < x_1 + \pi$ 之任何 x_1, x_2, x_3 ,

$$\phi(x_1) \sin(x_3 - x_2) + \phi(x_2) \sin(x_1 - x_3) + \phi(x_3) \sin(x_2 - x_1) \geq 0 \quad (i)$$

或(也是一样)

$$\begin{vmatrix} \cos x_1 & \sin x_1 & \phi(x_1) \\ \cos x_2 & \sin x_2 & \phi(x_2) \\ \cos x_3 & \sin x_3 & \phi(x_3) \end{vmatrix} \geq 0, \quad (ii)$$

則 $\phi(x)$ 在 I 中为連續, 且在 I 中每一点皆有有限左导数和右导数.

若 $\phi(x)$ 为两次可微, 則(i)和(ii)与微分不等式

$$\phi''(x) + \phi(x) \geq 0$$

等价.

[这一結果在研究凸曲綫以及解析函数在角域中的变化情况时很是重要。参考 Pólya [1, p. 320; 4, p. 573—576].]

124. 一連續函数 $\phi(x)$ 在一区間 I 中为一凸函数之充要条件是: 若 α 为任一实数, i 为 I 中之任一閉区間, 則 $\phi(x) + \alpha x$ 必在 i 之一端点取其在 i 上之极大值。若 x 与 $\phi(x)$ 为正, 則 $\log \phi(x)$ 为 $\log x$ 之一凸函数之充要条件是: $x^\alpha \phi(x)$ 具有同样的极大性質。

[关于这一定理的应用, 它是从定义直接就可得出的, 可参考 Saks[1].]

125. 一連續函数 $\phi(x)$ 在 (a, b) 中为一凸函数之充要条件是: 对 $a \leq x-h < x < x+h \leq b$, 有

$$\phi(x) \leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} \phi(t) dt. \quad (i)$$

[这是定理 124 的一个系。若 $\phi(x)$ 满足(i), 則 $\phi(x) + \alpha x$ 亦然; 而且很明显, 任何滿足(i)的連續函数必然具有定理 124 中的性質¹⁾。

定理 125 也可以独立地証出; 它还有許多的推广。特別, 我們只須假設(i)对所有之 x 和任意小的 $h = h(x)$ 成立。]

126. 若 $\phi(x)$ 对所有之 x 为一連續凸函数, 且非常数, 則当 x 朝某一方向趋于无穷时, $\phi(x)$ 亦趋于无穷, 而且到后来将大于 $|x|$ 之一常数倍。

127. 若当 $x > 0$ 时 $\phi'' > 0$, 且 $\phi(0) \geq 0$, 則 ϕ/x 当 $x > 0$ 时为单增。

[这可从方程

$$x^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\phi}{x} \right) = x\phi' - \phi, \quad \frac{d}{dx} (x\phi' - \phi) = x\phi''$$

立刻得出。]

128. 若当 $x \geq 0$ 时 $\phi'' > 0$, 且

1) 欲得一正式的証明, 可利用定理 183.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x\phi' - \phi) \leq 0,$$

則当 $x > 0$ 时 ϕ/x 为(严格)单降.

[因 $x\phi' - \phi$ 为单增,故上之极限必然存在. 这結果可从証明定理 127 时所用之方程得出. 定理 127 和定理 128 中所考虑的情形乃是当 $\phi'' > 0$ 时可能出現的极端情形; 若一个条件都不滿足, 則 ϕ/x 对某一正 x 取极小.]

129. 若对于所有之 x , $\phi'' > 0$, $\phi(0) = 0$, 且当 $x = 0$ 时, ϕ/x 解释为 $\phi'(0)$, 則对于所有之 x , ϕ/x 为单增.

130. 若数列 $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$ 按照 § 3.5 的意义为凸的, 就是說, 若

$$\Delta^2 a_v = a_v - 2a_{v+1} + a_{v+2} \geq 0 \quad (v = 1, 2, \dots, 2n-1),$$

則

$$\frac{a_1 + a_3 + \dots + a_{2n+1}}{n+1} \geq \frac{a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}}{n},$$

除了这些数成一算术級数的情形之外, 不等号成立.

[Nanson[1]. 对諸不等式

$$r(n-r+1)\Delta^2 a_{2r-1} \geq 0, \quad r(n-r)\Delta^2 a_{2r} \geq 0$$

求和. 定理 130 也可作为定理 108 的特別情形来証明: 由数 2, 4, $\dots$, $2n$ 各取 $n+1$ 次所成之集为由数 1, 3, $\dots$, $2n+1$ 各取 n 次所成之集所控制.]

131. 若 $0 < x < 1$, 則

$$\frac{1-x^{n+1}}{n+1} > \frac{1-x^n}{n} \sqrt{x}.$$

[在定理 130 中令 $x = y^2$, $a_v = y^v$.]

132. 設 C 为一圓之圓心, $A_0 A_1 \dots A_n C$ 为一多角形, 其頂点除 C 外皆以所述之順序散布在圓上. C, A_0, A_n 是固定的, 而 $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ 是变动的, 則此多角形之面积与周长当

$$A_0 A_1 = A_1 A_2 = \dots = A_{n-1} A_n$$

时为最大.

[令角 $A_{v-1} C A_v$ 为 α_v . 因为当 $0 < x < \pi$ 时, $(\sin x)'' < 0$,

故由定理 95, 有

$$\frac{1}{n} \sum \sin \alpha_v < \sin \left(\frac{\sum \alpha_v}{n} \right),$$

除非所有之 α_v 皆相等. 若諸 α_v 各代以 $\frac{1}{2} \alpha_v$, 亦有类似之不等式. 由这些不等式即得出定理的两个部分. 当 A_n 与 A_0 合而为一时, 它們即化为我們所熟悉的正多角形所具有之极大性質.]

133. 設 f 和 g 是連續單增之互逆函數, 它們在 0 点为 0; 又設 $F = xf$, $G = xg$, 且 g 滿足不等式

$$g(xy) \leq g(x)g(y),$$

設對於所有使得 $\sum G(b) \leq G(B)$ 之正 b 和正 a 皆有

$$\sum ab \leq AB,$$

則

$$\sum F(a) \leq \frac{1}{F(1/A)}.$$

[Cooper[3]. 当 f 为 x 之一方幕时, 此結果已包含在定理 15 之中.]

134. 若 $\phi(x)$ 当 $x \geq 0$ 时为連續且凸的, $v = 1, 2, 3, \dots$; a_v 为非負且單減, 則

$$\phi(0) + \sum \{ \phi(na_v) - \phi[(n-1)a_v] \} \leq \phi(\sum a_v).$$

若 $\phi'(x)$ 为严格單增, 則等号仅当諸 a_v 从某一点起皆是 0, 而在这点之前皆相等时成立.

[Hardy, Littlewood, Pólya[2]. 令

$$s_0 = 0, \quad s_v = a_1 + a_2 + \dots + a_v \quad (v \geq 1),$$

$$s_v + (v-1)a_v = s_{v-1} + va_v = 2x,$$

$$s_v - (v-1)a_v = 2h, \quad s_{v-1} - va_v = 2h',$$

容易証明 $|h'| \leq h$, 等号仅当 $a_v = 0$ 或

$$a_1 = a_2 = \dots = a_v$$

时成立. 由定理 110 可得

$$\phi(va_v) - \phi\{(v-1)a_v\} \leq \phi(s_v) - \phi(s_{v-1}),$$

經過求和即得所要之結果.]

135. 若 $q > 1$, 且 a_v 为单降, 則

$$\sum \{v^q - (v-1)^q\} a_v^q \leq (\sum a_v)^q.$$

[定理 134 之例.]

136. 設 a 是 $v_1, v_2, \dots, v_m$ 之一函数; $i_1, i_2, \dots, i_m$ 是数 $1, 2, \dots, m$ 之一置換; ψ 和 χ 为連續且严格单調, 且 χ 为单增, 則欲使对所有之 a 和 q 皆有

$$\mathfrak{M}_{\psi_m}^{v_m} \dots \mathfrak{M}_{\psi_1}^{v_1} \leq \mathfrak{M}_{\chi_{i_m}}^{v_{i_m}} \dots \mathfrak{M}_{\chi_{i_1}}^{v_{i_1}}(a),$$

其必要条件是:

(1) 对 $\mu = 1, 2, \dots, m$, χ_μ 关于 ψ_μ 为凸的;

(2) 若 $\lambda > \mu$, 且 λ 与 μ 在置換 $i_1, i_2, \dots, i_m$ 中对应于一个反轉(即在数列 $1, 2, \dots, m$ 中 μ 位于 λ 之前, 而在 $i_1, i_2, \dots, i_m$ 中, μ 則位于 λ 之后).

[Jessen[3]]

137. 欲使

$$\mathfrak{M}_{r_m}^{v_m} \dots \mathfrak{M}_{r_1}^{v_1}(a) \leq \mathfrak{M}_{s_{i_m}}^{v_{i_m}} \dots \mathfrak{M}_{s_{i_1}}^{v_{i_1}}(a)$$

对所有之 a 和 q 成立, 其必要且充分之条件是: (1) $r_\mu \leq s_\mu$ 和 (2) $r_\mu \leq s_\lambda$ (μ 与 λ 的变化范围系依定理 136 中所定义).

[Jessen[3], 最重要的情形是:

(i) $m = 1, \quad r < s;$

(ii) $m = 2, (i_1, i_2) = (2, 1), s_2 = r_2 \geq s_1 = r_1.$

这两种情形与定理 16 和定理 26 相对应. 定理的核心包含在这样一个說法之中, 即当此不等式之两边可比較时, 此不等式可以由重复运用与(i)和(ii)相对应的特殊情形而得到証明.]

138. 設在一开区間, 例如 $0 < x < 1$ 中定义的連續曲綫 $y = \phi(x)$ 具有下之性質: 过曲綫之每一点或 (a) 有一直綫在曲綫的下面, 或 (b) 有一直綫在曲綫的上方. 則 (a) 和 (b) 中有一个对曲綫上所有之点皆成立, 因而此曲綫或为凹的或为凸的.

[容易証明, 若 S_a 和 S_b 分別是使得 (a) 和 (b) 成立的 x 值所

成之集, 則 S_a 与 S_b 为閉集(在开区間中). 但一連續統不可能是两个相互排斥的非空閉集之和.]

139. 設 $\phi(x)$ 在 (H, K) 中为凸且下有界, $m(x)$ 是 $\phi(x)$ 在 x 的下界 ($\phi(x)$ 在一包含 x 的区間中的下界之极限), 則 $m(x)$ 是一連續凸函数; 且或 (i) $\phi(x)$ 与 $m(x)$ 恆等, 或 (ii) $\phi(x)$ 的图象在区域 $H \leq x \leq K, y \geq m(x)$ 中为稠密.

若 $\phi(x)$ 为凸的, 且非下有界, 則其图象在区間 $H \leq x \leq K$ 中为稠密.

[Bernstein 和 Doetsch[1]]

第四章 微积分学的若干应用

4.1. 导引. 对于寻常分析中所出现的一些特殊不等式,利用某些特别的方法来证明,往往比求助于任何一般性的理论要容易得多. 因此,我们现在就把本书主题的系统研究暂置一边,而专辟一短章来阐述一些最简单而且最有用的特别方法. 内容的安排主要是按照所用的方法和工具来进行,而不是依照结果的性质来做的.

微分法:单元函数

4.2. 中值定理的应用. 我们的第一个例题所依据的就是直接应用中值定理

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h) \quad (0 < \theta < 1), \quad (4.2.1)$$

或其在高阶导数方面的推广. (4.2.1)的一个推论就是:具有正微分系数的函数总是随 x 而增大.

(1) 当 $x > 0$ 时,我们有

$$\log(x+1) - \log x = \frac{1}{\xi},$$

其中 $x < \xi < x+1$. 由此即得

$$\frac{d}{dx} [x \{ \log(x+1) - \log x \}]$$

$$= \log(x+1) - \log x - \frac{1}{x+1} > 0,$$

$$\frac{d}{dx} [(x+1) \{ \log(x+1) - \log x \}]$$

$$= \log(x+1) - \log x - \frac{1}{x} < 0.$$

因之 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 随 x 之增大而增大, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 則随 x 之增大而减小, 因后一函数就是 $\left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y}$, 其中 $y = x + 1 > 1$, 于是我們就得到

140. 当 $x > 0$ 时, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 单增; 当 $x > 1$ 时, $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x}$ 单降.

这在实质上和定理 35 相同.

(2) 若 $x > 1, r > 1$, 我們有

$$x^r = 1 + r(x-1) + \frac{1}{2} r(r-1) \xi^{r-2} (x-1)^2,$$

其中 $1 < \xi < x$. 因而有

141. $x^r > 1 + r(x-1) + \frac{1}{2} r(r-1) \left(\frac{x-1}{x}\right)^2$ ($x > 1, r > 1$).

这一不等式已在 § 2.15 中得出, 不过那里所得到的形式沒有现在的精确.

(3) 若 $x \neq 0$, 則

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 e^{\theta x}, \quad (4.2.2)$$

其中 $0 < \theta < 1$. 因而有

142. $e^x > 1 + x$ ($x \neq 0$).

我們可以得出定理 9 的另一証明. 若

$$\sum q = 1, \sum qa = \mathfrak{A},$$

且諸 a 不全相等, 我們可令 $a = (1+x)\mathfrak{A}$, 其中 $\sum qx = 0$, 諸 x 不全为 0. 于是, $1+x \leq e^x$, 不等号至少对一个 x 成立, 且

$$\prod a^q = \mathfrak{A} \prod (1+x)^q < \mathfrak{A} e^{\sum qx} = \mathfrak{A} = \sum qa.$$

这一証法乃是 § 3.19 末所用的証法之一特殊情形.

(4) 函数 $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{1}{2} x^2$

及其一次和二次导数当 $x = 0$ 时为 0, $f(x)$ 再沒有别的 0 点, 因

为这样一来 (反复运用 Rolle 定理), $f'''(x) = e^x$ 就必然有一个 0 点. 由是

$$e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2 (x > 0), \quad e^x < 1 + x + \frac{1}{2}x^2 (x < 0).$$

这种証法也适用于许许多多函数的 Taylor 級数的任何多項. 当此函数为 e^x 时, 則得

143. 若 n 为奇, 則

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad (x \neq 0). \quad (4.2.3)$$

若 n 为偶, 則 (4.2.3) 当 $x > 0$ 时成立, 而当 $x < 0$ 时反号.

4.3. 初等微分学的进一步应用. 在本节中, 我們將給出一些并不是一下子就看得出来的应用.

(1) 反复运用 Rolle 定理, 我們容易得出下之引理¹⁾: 若

$$f(x, y) = c_0 x^m + c_1 x^{m-1} y + \cdots + c_m y^m = 0$$

之所有根 x/y 皆为实的, 則由此方程通过对 x 和 y 的偏微分而得的所有非恆等方程²⁾的根也都是实的. 此外, 若 E 是其中的一个方程, 它有一个重根 a , 設 F 是 E 从之經微分而得的方程, 則 a 也是 F 的一个根, 其重数比原来多一.

我們現用此引理来証一个在 § 2.22 中已經証明了的定理, 不过当时定理的形式沒有下述的完善.

144³⁾. 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个实的、正的或負的数, $p_0 = 1$, p_μ 是所有由 μ 个不同的 a 作成之积的算术平均, 則

$$p_{\mu-1} p_{\mu+1} < p_\mu^2 \quad (\mu = 1, 2, \cdots, n-1),$$

除非所有之 a 皆相等.

我們假定了諸 a 皆不为 0, 因为若容許有 a 为 0, 則描述等号成立的情形就变得比較麻煩.

1) Maclaurin[2]. 参考 Pólya 和 Szegő [1, II, p p. 45—47 和 p p. 230—232].

2) 即所有系数不全为 0 的方程.

3) Newton [1, p. 173]. 关于进一步的参考, 見 § 2.22.

令

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x + a_1 y)(x + a_2 y) \cdots (x + a_n y) \\ &= p_0 x^n + \binom{n}{1} p_1 x^{n-1} y + \binom{n}{2} p_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + p_n y^n. \end{aligned}$$

因諸 a 皆不为 0, 故 $p_n \neq 0$, 且 $x/y = 0$ 不是 $f = 0$ 的一根. 因之, $x/y = 0$ 不可能是导出方程的一个重根; 故不可能有两个相邻的 p , 比如 p_μ 和 $p_{\mu+1}$, 同时为 0. 由是可知, 从 $f(x, y) = 0$ 經一系列微分而得的方程

$$p_{\mu-1}x^2 + 2p_\mu xy + p_{\mu+1}y^2 = 0$$

不是恆等方程, 故其根为实数. 由此即得

$$p_{\mu-1}p_{\mu+1} \leq p_\mu^2.$$

最后, 上之导出方程的根仅当原方程所有之根皆相等时才能相等.

我們可以看出, 諸 a 不必要象在 § 2.22 中那样一定皆为正¹⁾.

(2) 設 $\phi(x) = \log(\sum p a^x)$, 并設 (这并不是一个真正的限制) 諸 a 皆为正且不相等, 于是有

$$\begin{aligned} \phi' &= \frac{\sum p a^x \log a}{\sum p a^x}, \\ \phi'' &= \frac{\sum p a^x \sum p a^x (\log a)^2 - (\sum p a^x \log a)^2}{(\sum p a^x)^2} > 0 \end{aligned}$$

(定理 7). 經簡單計算可知, 若 a_r 是諸 a 中之最大者, 則

$$\phi(0) = \log \sum p, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x\phi' - \phi) = -\log p_r.$$

由定理 127 和 129 可知, 若 $\sum p \leq 1$, 則 ϕ/x 当 $x > 0$ 时为单增, 若 $\sum p = 1$, 則其对所有之 x 为单增. 在后一种情形, 有

$$\frac{\phi(x)}{x} = \log \mathfrak{M}_x(a), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi(x)}{x} = \phi'(0) = \log \mathfrak{O}(a).$$

由此即得定理 9 和 16 的另外証明.

另一方面, 若对每一 v , $p_v \geq 1$, 則由定理 128, ϕ/x 为单降.

1) 定理 55 除外. 对于正的 a , 可参考定理 51, 54, 77 和 § 3.5.

特別, $\mathfrak{S}_x(a) = (\sum a^x)^{1/x}$ 为单降 (定理 19). 其一般情形给出定理 23 的一部分.

(3) 下面的例子在弹道学中有用.

$$145. \quad \log \sec x < \frac{1}{2} \sin x \tan x \quad \left(0 < x < \frac{1}{2} \pi\right).$$

146. 令

$$g(x) = \int_0^x (1 + \sec t) dt = x + \log (\sec x + \tan x),$$

則函数

$$\rho(x) = \frac{8 \log \sec x}{(g(x))^2}$$

当 x 从 0 增到 $\frac{1}{2} \pi$ 时从 1 单调下降到 0.

[利用定理 145 証明 $\frac{d}{dx} (g^3 \rho' \cot x) < 0$, 因而有 $\rho' < 0$.]

147. 函数

$$\sigma(x) = \frac{\int_0^x (1 + \sec t) \log \sec t dt}{\log \sec x \int_0^x (1 + \sec t) dt}$$

当 x 从 0 增加到 $\frac{1}{2} \pi$ 时从 $\frac{1}{3}$ 单增到 $\frac{1}{2}$.

有一个一般性的定理, 它对于証明定理 147 是有用的.

148. 若 f, g 以及 f'/g' 都是正的单增函数, 則 f/g 或对于所有討論中的 x 为单增, 或对所有此种 x 为单降, 或下降到一极小然后再单增. 特別, 若 $f(0) = g(0) = 0$, 則 f/g 对 $x > 0$ 为单增.

要証明这点, 我們先注意

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) = \left(\frac{f'}{g'} - \frac{f}{g} \right) \frac{g'}{g},$$

并考虑曲线 $y = f/g$ 和 $y = f'/g'$ 可能有的交点. 在其中的任一个交点上, 前一曲线具有一水平的切綫, 后一曲线具有一上举的切綫, 因此至多只能有一个交点.

若我們取 g 作为独立变数, 写 $f(x) = \phi(g)$, 并如同定理的最后一句中那样, 假设

$$f(0) = g(0) = 0,$$

或 $\phi(0) = 0$, 則定理即变为: 若 $\phi(0) = 0$, 且当 $g > 0$ 时 $\phi'(g)$ 为单增, 則 ϕ/g 当 $g > 0$ 时为单增. 这是定理 127 的一部分的少許推广. 定理 148 也应当和定理 128 和 129 相比較.

4.4. 单变数函数的极大和极小. 証明不等式的一个最普通的方法就是利用討論 $\phi'(x)$ 的符号去求函数 $\phi(x)$ 的绝对极大或极小.

$$(1) \text{ 因 } \frac{d}{dx} \{(1-x)e^x\} = -xe^x,$$

故函数 $(1-x)e^x$ 在 $x=0$ 处有一唯一的极大. 因而有

$$149. \quad e^x < \frac{1}{1-x} \quad (x < 1, x \neq 0).$$

这也是定理 142 的一个推論.

$$(2) \text{ 因 } \frac{d}{dx} (\log x - x + 1) = \frac{1}{x} - 1,$$

故函数 $\log x - x + 1$ 在 $x=1$ 处有一极大. 由此即得

$$150. \quad \log x < x - 1 \quad (x > 0, x \neq 1).$$

更普遍一些, 对于任何正 n , 有 $\log x < n(x^{1/n} - 1)$, 这只須在定理 150 中以 $x^{1/n}$ 代 x 即得. 这一結果也是定理 36 的一个推論.

(3) 令 $\phi(x) = 1 + xy - (1 + x^k)^{1/k} (1 + y^{k'})^{1/k'}$, 其中 $k > 1, x > 0, y > 0$. 容易証明 $\phi(x)$ 当 $x^k = y^{k'}$ 时有一唯一的极大值 0.

这就給出了 H_0 (定理 38), 的另一証明, 也給出了 H (定理 11) 的另一証明.

(4) 若 x 和 y 为正, 且 $k > 1$, 則函数

$$\phi(x) = xy - \frac{x^k}{k} - \frac{y^{k'}}{k'}$$

具有导数 $y - x^{k/k'}$, 在 $x^k = y^{k'}$ 处取其极大值 0. 由此即得出定理 61 (因而定理 39 和定理 9).

(5) 函数

$$\phi(x) = xy - x \log x - e^{y-1},$$

其中 x 为正, 在 $x = e^{y-1}$ 处取其极大值 0. 由此即得出定理 63.

4.5. Taylor 級数的使用. 若 $f(x) = \sum a_n x^n$, $g(x) = \sum b_n x^n$ 是两个具有正系数的级数, 且 $a_n \leq b_n$ 对任一 n 皆成立, 则称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 所控制, 记作 $f \prec g$. 显而易见, 若 $f \prec g$, $f_1 \prec g_1$, 则 $ff_1 \prec gg_1$ 等等.

为了阐明如何把这一观念运用到不等式的证明之中, 我们现来证明

151. 若 $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 其中 $n > 1$ 且诸 a 为正, 则

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) < 1 + \frac{s_n}{1!} + \frac{s_n^2}{2!} + \cdots + \frac{s_n^n}{n!}.$$

事实上, $1 + a_n x \prec e^{a_n x}$, 故

$$\prod (1 + a_n x) \prec e^{s_n x}.$$

将 $1, x, x^2, \cdots, x^n$ 的系数相加, 并注意在 x^2 的系数之间存在一严格不等式, 则得所要的结果. 此不等式也可从将左边写成

$$1 + np_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} p_2 + \cdots + p_n$$

(因而 $np_1 = s_n$), 然后利用定理 52 而得证明.

微分法: 多元函数

4.6. 多变函数的极大极小理论的应用. 用来发现并证明不等式的最“万能的”武器是多元函数(包括单元函数)的极大和极小的一般理论. 假定我们希望证明连续变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的两个函数 ϕ 和 ψ 是可比較的; 为了明确我们的想法, 我们不妨假定要证明 $\phi - \psi \geq 0$. 若 $\phi - \psi$ 具有一极小值, 则此命题成立的充要条件就是此极小值为非负. 这是一个常常可以用极大和极小理论的标准方法来对付(至少在函数是可微分时是这样的)的问题.

虽然在理论上这一方法是吸引人的, 而且对于处理问题也常

常給出一些初步的綫索，但却容易导致細节上的沉重糾紛（常常是与变数的“边界值”有关），同时我們也将发现，不管它是怎样的有启发性，但很少引导出簡單的解法。我們現在把它用到基本不等式G和H来闡明上面的說法。

(1) 要証明 G, 我們来考虑

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_{n-1}^{q_{n-1}},$$

其中

$$x_n = \frac{1}{q_n} (\mathfrak{U} - q_1 x_1 - \dots - q_{n-1} x_{n-1}),$$

諸 x 属于由上式及 $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ 所規定的有界閉域。此函数为連續, 因而有一极大值, 但不是在边界上 (此时 f 为 0)。在取极大值处有

$$0 = \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x_v} = \frac{q_v}{x_v} - \frac{q_n}{x_n} \frac{q_v}{q_n} \quad (v = 1, 2, \dots, n-1),$$

故諸 x 全等于 $\mathfrak{U}$ 。在这一情形, 沒有因边界值而引起任何严重的糾紛¹⁾。

(2) 我們可以用 (关于兩組变数的) H 來說明 “Lagrange 方法”。我們来考虑

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n,$$

其中 $b_v > 0$, 諸 x 服从条件:

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k \quad (k > 1)$$

为一正常数 X 。由 $x \geq 0$, $\phi = X$ 所定义之 $n-1$ 維域是一有界閉域, 在其边界上的每一点总有某些 x 为 0。

若极大值在一內点达到, 則在該点,

$$\frac{\phi_{x_v}}{f_{x_v}} = \frac{k x_v^{k-1}}{b_v} = \lambda$$

与 v 无关; 而且經初等計算可以看出

$$f = X^{1/k} (\sum b^{k'})^{1/k'} = (\sum x^k)^{1/k} (\sum b^{k'})^{1/k'}.$$

1) 参考 § 2.6 (i)。

在这里还留下的就是极大值可能在一边界点上达到，在该处有一 x ，設有 x_n ，为 0。这种可能性可用归纳法把它排除掉，盖若假定此不等式已对 $n-1$ 个变数得到证明，且 $x_n = 0$ ，則有

$$f = \sum_1^{n-1} b_v x_v \leq \left(\sum_1^{n-1} x_v^k \right)^{1/k} \left(\sum_1^{n-1} b_v^{k'} \right)^{1/k'} \\ < (\sum x_v^k)^{1/k} (\sum b_v^{k'})^{1/k'}.$$

这一方法的弱点在于：假若終究要用归纳法来論証，倒不如就用归纳法来証明整个定理，而这样一来，我們又回到已經給出了的 H 的几个証明中的一个証明。

(3) 把这个方法用得很彻底，比如在情形(2)中那样，十之八九都导致麻煩；但即使是在这种情形，对于指引出問題的一个解法，它还是非常有用的。

我們的大量問題是要在两个次数相同，且对于所有正的 x 皆为正的齐次对称函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 之間建立起不等式。比如定理 9, 16 和 17 (对于单位权，这也是最重要的情形)，定理 45 (在可比較的情形) 和定理 51, 52 就是这样。

当我们使用 Lagrange 方法时，我們必須对于等于常量的 g ，比如 $g = 1$ ，来考虑 f 的极大。Lagrange 方程是

$$\frac{\partial f}{\partial x_v} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_v} \quad (v = 1, 2, \dots, n).$$

这些方程常有一組解 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ ，而 λ 則是 f 对于此組 x 所取的值。若 λ 是 f 的一严格绝对极大，則 $f \leq \lambda g$ ，除非所有之 x 皆相等，不等式总成立。

所有这些，对于刚才所提到的情形，事实上都是对的，但也有一些另外的情形，此組解答並沒有給出 f 的极大。例如在定理 45 中，对于不可比較的情形，情况就是这样。

积 分 法

4.7. 級数与积分的比較。 有許多不等式利用积分法最容易証明，而且常常是依靠对于面积或体积的考虑，以一种“直观的”方

法来进行的。在这里,我們只給出少数几个最有用的一般性定理,在这些定理中,所涉及到的积分皆是初等的 Riemann 或 Riemann-Stieltjes 积分。在第六章中,我們將要系統考虑积分之間的不等式,該处我們將要使用一般的 Lebesgue 和 Lebesgue-Stieltjes 积分。

下述的几个定理原則上属于 Maclaurin 和 Cauchy¹⁾。

152. 若 $f(x)$ 当 $x \geq 0$ 时为单降,則

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \leq \int_0^n f(x) dx \leq f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1).$$

若 $f(x)$ 为严格单降,則不等号成立。

事实上,我們有

$$f(v+1) \leq \int_v^{v+1} f(x) dx \leq f(v)$$

(若 $f(x)$ 为严格单降,則取不等号)。

这一类型的其它定理有(只加叙述,不加証明)

153. 若 $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$, 且 $f(x)$ 当 $x \geq a_0$ 时为单降,則

$$\sum_{v=1}^n (a_v - a_{v-1}) f(a_v) \leq \int_{a_0}^{a_n} f(x) dx \leq \sum_{v=1}^n (a_v - a_{v-1}) f(a_{v-1}).$$

154. 若 $f(x) \geq 0$, 且 $f(x)$ 在 $(0, \xi)$ 中为单降,在 $(\xi, 1)$ 中为单增,其中 $0 \leq \xi \leq 1$, 則

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left\{ f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right\} &\leq \int_0^1 f(x) dx \\ &\leq \frac{1}{n} \left\{ f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f(1) \right\}. \end{aligned}$$

155. 若 $f(x, y)$ 对于固定的 y 为 x 之一单降函数, 对于固定的 x 为 y 之一单降函数, 則

$$\sum_{\mu=1}^m \sum_{v=1}^n f(\mu, v) \leq \int_0^m \int_0^n f(x, y) dx dy \leq \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{v=0}^{n-1} f(\mu, v).$$

1) Maclaurin [1, I, p. 289]; Cauchy [2, p. 222].

关于这些定理的应用,特别是在级数的收敛理论方面,可以在任何分析教科书中找到.

4.8. Young 的一个不等式. 下面的一个简单而又有用的定理属于 W. H. Young¹⁾, 它属于另外一种类型.

156. 設 $\phi(0)=0$, 又設 $\phi(x)$ 当 $x \geq 0$ 时为連續且严格单增; $\psi(x)$ 为其逆函数, 因而 $\psi(x)$ 也滿足同样的条件; 設 $a \geq 0, b \geq 0$, 則

$$ab \leq \int_0^a \phi(x) dx + \int_0^b \psi(x) dx.$$

等号只当 $b = \phi(a)$ 时成立.

若我們划出曲綫 $y = \phi(x)$ 或 $x = \psi(y)$, 以及直綫 $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, 并考虑由它們所范围的各个区域, 則此定理由直观上就可看出. 正式的証明包含在后面一些更广泛的定理的証明之中.

定理 156 的一个系是

157. 若定理 156 的条件皆滿足, 則

$$ab \leq a\phi(a) + b\psi(b).$$

定理 157 比定理 156 要弱, 但在应用中常常具有同样的效果.

我們現在来証明几个更广泛的包含定理 156 的定理.

158. 設 $\nu = 1, 2, \dots, n$; $a_\nu \geq 0$; 又設 $f_\nu(x)$ 为連續, 非負和严格单增; 且諸 $f_\nu(0)$ 中有一为 0. 則

$$\prod f_\nu(a_\nu) \leq \sum \int_0^{a_\nu} \prod_{\mu \neq \nu} f_\mu(x) \cdot df_\nu(x),$$

等号仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 时成立²⁾.

若考虑 n 維空間中之曲綫 $x_\nu = f_\nu(t)$, 以及由座标平面和将曲綫射影到这些平面上去的柱面所范围的体积, 則上之不等式从直观上即可看出.

要得出一正式的証明, 我們令

1) W. H. Young [2].

2) Oppenheim [1], 此証明属于 T. G. Cowling.

$F_\nu(x) = f_\nu(x) (0 \leq x \leq a_\nu), F_\nu(x) = f_\nu(a_\nu) (x \geq a_\nu)$,
 因而有 $F_\nu(x) \leq f_\nu(x)$. 若我們假定(这是可以做的) a_n 是諸 a_ν 之
 最大者, 則因 $\Pi F_\nu(0) = 0$, 我們有

$$\begin{aligned}\Pi f_\nu(a_\nu) &= \Pi F_\nu(a_n) = \int_0^{a_n} d\{\Pi F_\nu(x)\} \\ &= \sum_\nu \int_0^{a_n} \prod_{\mu \neq \nu} F_\mu(x) \cdot dF_\nu(x) \\ &= \sum_\nu \int_0^{a_\nu} \prod_{\mu \neq \nu} F_\mu(x) \cdot df_\nu(x) \\ &\leq \sum_\nu \int_0^{a_\nu} \prod_{\mu \neq \nu} f_\mu(x) df_\nu(x);\end{aligned}$$

除非每一 a_ν 皆等于 a_n , 否則不等号成立.

159¹⁾. 設 $g_\nu(x) (\nu = 1, 2, \dots, n)$ 为連續, 严格单增, 且当
 $x = 0$ 时为 0; 又設

$$\Pi g_\nu^{-1}(x) = x, \quad (4.8.1)$$

且 $a_\nu \geq 0$. 則

$$\Pi a_\nu \leq \sum \int_0^{a_\nu} \frac{g_\nu(x)}{x} dx.$$

除非 $g_1(a_1) = g_2(a_2) = \dots = g_n(a_n)$, 否則不等号成立.

若令

$$g_\nu^{-1}(x) = \chi_\nu(x), b_\nu = g_\nu(a_\nu), a_\nu = g_\nu^{-1}(b_\nu) = \chi_\nu(b_\nu),$$

并运用定理 158 于函数組 $f_\nu(x) = \chi_\nu(x)$, 則得

$$\Pi a_\nu = \Pi \chi_\nu(b_\nu) \leq \sum \int_0^{b_\nu} \frac{x}{\chi_\nu(x)} d\chi_\nu(x) = \sum \int_0^{a_\nu} \frac{g_\nu(y)}{y} dy.$$

由(4.8.1)联系起来的方程組

$$\phi_\nu(x) = \frac{g_\nu(x)}{x} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

乃是互逆函数对的一个推广. 盖若假定 $n = 2$, $g_1(x) = x\phi(x)$,
 $g_2(x) = x\psi(x)$, 并将(4.8.1)写成下之两种形式:

1) Cooper [1].

$$\frac{x}{g_1^{-1}(x)} = g_2^{-1}(x), \quad \frac{x}{g_2^{-1}(x)} = g_1^{-1}(x),$$

則

$$\phi(x) = \frac{g_1(x)}{x} = g_2^{-1}\{g_1(x)\}, \quad \psi(x) = \frac{g_2(x)}{x} = g_1^{-1}\{g_2(x)\},$$

而 $g_2^{-1}g_1$, $g_1^{-1}g_2$ 为互逆. 因定理 156 中之函数 ϕ 和 ψ 总可表成此种形式, 故定理 159 包含定理 156.

若在定理 159 中取 $g_v(x) = x^{1/q_v}$, 其中 $\sum q_v = 1$, 則 (4.8.1) 成立. 因而有

$$\Pi a_v \leq \sum q_v a_v^{1/q_v},$$

此即定理 9. 若在定理 156 中取 $\phi(x) = x^{k-1}$, 其中 $k > 1$, 則有 $\psi(x) = x^{k'-1}$. 由此即得定理 61. 若取

$$\phi(x) = \log(x+1), \quad \psi(x) = e^x - 1,$$

并写 u, v 代 $a+1$ 和 $b+1$, 則对 $u \geq 1, v \geq 1$ 即得定理 63¹⁾.

前面曾經指出, 定理 156 可从簡單的几何想法直觉得出. 若把計算面积代之以数其中格子点 (具有整数坐标之点) 的个数, 則得

160. 若 $\phi(x)$ 随 x 严格单增, $\phi(0) = 0$, $\phi(x)$ 是与 $\psi(x)$ 互逆之函数, 則

$$mn \leq \sum_0^m [\phi(\mu)] + \sum_0^n [\psi(v)],$$

其中 $[y]$ 是 y 的整数部分.

这定理本身不大值得注意, 但可以用来闡明一类在数論中常常是有效的証法.

1) 实际上, 这結果对 $u > 0$ 及所有之 v 皆成立. 参考 § 4.4 (5).

第五章 无穷级数

5.1. 导引. 一直到現在,我們的定理皆只涉及到有限和,現在我們就要來考慮把它們推廣到无穷級數上去. 总的結論是这样:我們的定理对无穷級數仍然有效,只要它們此時还有意义.

我們必須作两个預备性的說明.

(1) 第一个是关于我們的公式的解釋. 若 X 和 Y 是无穷級數,則不等式 $X < Y$ (或 $X \leq Y$) 总是解釋为:若 Y 收斂,則 X 也收斂,且 $X < Y$ (或 $X \leq Y$). 更一般言之,形如

$$X < \sum AY^b \cdots Z^c \quad (5.1.1)$$

(或 $X \leq \sum AY^b \cdots Z^c$) 的不等式,其中 $Y, \cdots, Z$ 是任意有限多个无穷級數, $\sum$ 是一有限和, $A, b, \cdots, c$ 皆是正数,解釋为:若 $Y, \cdots, Z$ 为收斂,則 X 亦为收斂,且 X 滿足此不等式. 假若忽略了这点了解,則当不等式中是“ $<$ ”号时,就会引起混淆. 若 Y 发散,我們可将 Y 讀为 ∞ ;这样一来,“ $X \leq \infty$ ”就不帶有任何意义,但“ $X < \infty$ ”則表示 X 收斂,这种論断往往是不正确的.

有些不等式并不以 (5.1.1) 的形式出現. 这些通常都是次要的,而且只要对它們的解釋有任何疑义,总要把它們化为 (5.1.1) 的形式. 例如

$$X^a < AY^b$$

一定解釋为

$$X < A^{1/a} Y^{b/a},$$

这是属于 (5.1.1) 的形式; $X > Y$ 总是解釋为 $Y < X$.

有一个重要的不等式,即

$$\sum ab > (\sum a^k)^{1/k} (\sum b^{k'})^{1/k'}, \quad (5.1.2)$$

其中 $k < 1, k \neq 0^1$. 我們故意把它写成一个异于 (5.1.1) 的形式.

1) 定理 13 之 (2.8.4).

我們盡可以把它寫成

$$\sum a^k < (\sum ab)^k (\sum b^{k'})^{-k/k'}, \quad (5.1.3)$$

當 $0 < k < 1$ 時, 或寫成

$$\sum b^{k'} < (\sum ab)^{k'} (\sum a^k)^{-k'/k}, \quad (5.1.4)$$

當 $k < 0$ 時, 這是屬於(5.1.1)的形式, 而且也是最初在定理 13 的證明中出現的形式。不過, 為了外形上的理由, 以及為了能清楚地表明定理的兩種情形之間的對比, 我們還是寧願選取形式(5.1.2)。但若我們希望明白而確切的表示出收斂性的蘊含關係, 我們也必須用到其他的形式。

有少數的情形, 在那里所建立起來的不等式, 不是無窮級數之間的不等式, 而是包含其他的極限運算所產生的結果的不等式, 例如當我們推廣不等式 $\mathfrak{G}(a) < \max a$ (定理 2) 時, 我們即得出一個無窮乘積以及一個無限集的上確界之間的不等式。這樣的一個不等式 “ $X < Y$ ” 仍用同樣的方法來解釋, 即 “若 Y 為有限, 則 X 為有限, 且 $X < Y$ ”。

(2) 第二點說明是關於方法方面的, 它應當結合 § 1.7 來閱讀。假若(比如說)現在我們希望對於無窮級數來證明不等式

$$(\sum ab)^2 \leq \sum a^2 \sum b^2.$$

對於有限和我們已經知道這一不等式(定理 7), 而且所有的東西都是正的, 因此我們的結論可從取極限得出。

我們還不能用這種簡單方法把定理 7 完整的推廣到無窮級數上去, 因為在取極限時, “ $<$ ” 退化為 “ $\leq$ ”, 因而我們就不能挑選出等號成立的各種可能情形。在這裡以及別的地方, 我們都必須避免取極限的手續; 我們不是從有限定理去推出無限定理, 而是去驗證對於有限定理所給出的證明, 經過在新條件之下所必需的極小限度的修改之後, 對於無限的情形仍然有效。例如 § 2.4 中所給出的定理 7 的無論哪一個證明, 只要在有關收斂性方面增加一點明顯的注釋, 都可推廣到無限的情形上去。

沒有必要再把第二章中的途徑系統地重走一遍。我們這裡所出現的為數不多的新問題既不困難, 也不特別值得注意, 而且只要

他們是重要的,在第六章中就会以一种更有意义的形式重新出現。因此我們就不拘形式地安排这一章的內容,先闡明和詳解各种新的可能性,最后列举了第二章中一些比較重要的定理,它們在新的解释之下仍旧是有效的。

5.2. 平均值 $\mathfrak{M}_r$. 我們先来討論平均值 $\mathfrak{M}_r$ 的定义中所出現的一个新問題。我們現在有着无限多个項 a 和权 p ,而且根据 $\sum p$ 之为收斂或发散,还有着两种情形要去考虑。

(i) 若 $\sum p$ 为收斂,我們可假定此和为 1,且写 q 代 p 。在这种情形,当 $r > 0$ 时, $\mathfrak{M}_r$ 定义作

$$\mathfrak{M}_r(a) = (\sum q a^r)^{1/r}, \quad (5.2.1)$$

并且可以認為是 § 2.2 意义下的一个“平均”,或 § 2.10 (iv) 意义下的一个“加权平均”。它依照 $\sum q a^r$ 之为收斂或发散而为有限或无限。

(ii) 若 $\sum p$ 为发散,我們仍然可以定义 $\mathfrak{M}_r$ 为一极限,例如定义为

$$\mathfrak{M}_r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_1^n p_n a_n^r / \sum_1^n p_n \right)^{1/r}, \quad (5.2.2)$$

或为相应之上极限 $\overline{\lim}$ 。后一定义并不值得特別注意,尽管它可保留我們的大部分定理。若我們用 (5.2.2) 来定义 $\mathfrak{M}_r$,我們就要遇到一个困难: $\mathfrak{M}_r$ 对于某一給定的 r 存在,并不保証它对任何别的 r 都存在。事实上,我們可以决定諸 a 使得 $\mathfrak{M}_r$ 对于一組給定的 r 值 $r_1, r_2, \dots, r_m$ 存在,而对于别的則否。因此,我們就把注意力集中到情形 (i)。

对于 $\mathfrak{M}_r$ 的存在性的一般問題,可参考,例如 Besicovitch [1]。我們来闡明上述的可能会遇到的困难。我們現在簡略地指出如何寻求 a 使得极限

$$\lim \frac{1}{n} (a_1 + \dots + a_n), \quad \lim \frac{1}{n} (a_1^2 + \dots + a_n^2)$$

中无一个存在而另一个不存在,此时 $p = 1$ 。

先取两个周期为 ω 的系列

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta_1, \beta_2, \dots.$$

当 $a = \alpha$ 时, 两个极限皆存在, 其值分别为

$$A_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}, \quad A_2 = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2}{n};$$

而当 $a = \beta$ 时, 它们具有相应的值 B_1, B_2 .

我們現取 a 如下:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ (重复 } N_1 \text{ 次),}$$

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \text{ (重复 } N_2 \text{ 次),}$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ (重复 } N_3 \text{ 次),}$$

$$\dots\dots\dots$$

容易看出, 若假定系列 $N_1, N_2/N_1, N_3/N_2, \dots$ 以很大的速度趋于无穷, 我們就可使 $(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)/n$ 和 $(\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2)/n$ 分别在 A_1, B_1 和 A_2, B_2 两者之間来回振动. 收敛的条件就分别是 $A_1 = B_1$ 和 $A_2 = B_2$, 我們显然可以选取 α 和 β , 使得这两个条件中有一个成立, 而另一个則否.

因此, 我們就只限于情形 (i). 我們对于正的或負的 r 定义 $\mathfrak{M}_r$ 如 (5.2.1), 但約定若 r 为負且有一 a 为 0, 或 $\sum q a^r$ 为发散时, $\mathfrak{M}_r = 0$. 我們定义 $\mathfrak{G}$ (和 $\mathfrak{M}_0$) 如

$$\mathfrak{G}(a) = \mathfrak{M}_0(a) = \prod a^q = \exp(\sum q \log a), \quad (5.2.3)$$

但約定, 当 $\prod a^q$ 发散到 ∞ (即若 $\sum q \log a$ 发散到 $+\infty$) 时, $\mathfrak{G} = \infty$; 当 $\prod a^q$ 发散到 0 (即若 $\sum q \log a$ 发散到 $-\infty$) 时, $\mathfrak{G} = 0$. 我們可以看出, $\log a$ 可以为正或为負, 而且当 $\sum q \log a$ 为振动时, $\mathfrak{G}$ 的定义就无效. 在这种情形, $\mathfrak{G}$ 沒有意义.

由定理 36 和 150 可知

$$\log t < \frac{t^r - 1}{r} < \frac{t^s - 1}{s} \quad (0 < r < s, t > 0), \quad (5.2.4)$$

除非 $t = 1$, 此时等号成立. 我們定义 $\log^+ t$ 和 $\log^- t$ 如

$$\log^+ t = \log t (t > 1), \quad \log^+ t = 0 \quad (0 < t \leq 1),$$

$$\log^- t = \log t (0 < t \leq 1), \quad \log^- t = 0 \quad (t > 1),$$

因而有

$$\log^+ t \geq 0, \log^- t \leq 0, \log t = \log^+ t + \log^- t,$$

$$\log^- t = -\log^+ \frac{1}{t}.$$

于是,由(5.2.4)可知

$$0 \leq \sum q \log^+ a \leq \frac{1}{r} \sum' q(a^r - 1) \leq \frac{1}{s} \sum' q(a^s - 1),$$

其中 $\sum'$ 系就大于 1 之 a 求和. 因之,若 $\mathfrak{M}_r(a)$ 对某一正的 s 为有限,则 $\mathfrak{M}_r(a)$ 对 $0 < r < s$ 亦为有限,且 $\sum q \log^+ a$ 为收敛. 同理可以证明,若 $\mathfrak{M}_r(a)$ 对某一正的 s 为正,则 $\mathfrak{M}_r(a)$ 对 $-s < -r < 0$ 亦为正,且 $\sum q \log^- a$ 为收敛. 在前一种情形, $\mathfrak{G}$ 为正且有限或为 0; 在后一种情形,它为正且有限或为无穷. 若 $\sum q \log a$ 为振动,则 $\sum q \log^+ a$ 和 $\sum q \log^- a$ 同时发散,而这只当对所有正的 r , $\mathfrak{M}_r(a) = \infty$, 对所有负的 r , $\mathfrak{M}_r(a) = 0$ 时才有可能. 只有在这种情形, $\mathfrak{G}(a)$ 的定义才能无效.

有一个新的特点,它在我们的某些定理之中,正如我们将在 § 5.9 中所要看到的那样,对于刻划等号出现的情形将发生影响. 这一特点的出现是由于当 $r \leq 0$ 时, $\mathfrak{M}_r(a)$ 可能为 0, 虽然没有一个 a 为 0. 若 $r > 0$, 则如第二章中那样, $\mathfrak{M}_r(a)$ 只当 (a) 为 0 时才能为 0, 在此种情形, $\mathfrak{M}_r(a)$ 对所有之 r 皆为 0. 但当 $r \leq 0$ 时却有所差别. 对于此种 r , 第二章中之 $\mathfrak{M}_r(a)$ 为 0 之充要条件是有某些 a 为 0, 此时 $\mathfrak{M}_r(a)$ 对所有之 $r \leq 0$ 皆为 0. 但现在当 $r \leq 0$ 时却可能出现这样的情形: $\mathfrak{M}_r(a)$ 当 $s < r$ 时为 0 而当 $s \geq r$ 时为正, 或当 $s \leq r$ 时为 0 而当 $s > r$ 时为正.

例如在定理 1 中我们有两种除外的情形:

$$\min a < \mathfrak{M}_r(a) < \max a^{1)},$$

除非所有之 a 皆相等, 或 $r < 0$ 且有一 a 为 0. 现在我们所能说的就只是“除非所有之 a 皆相等(在此种情形, 两个不等式皆变成等式), 或 $r < 0$ 且 $\mathfrak{M}_r(a) = 0$ (在此种情形, $\min a = 0$, 前一不

1) 这里的 $\min$ 和 $\max$ 此时分别理解为下确界和上确界.

等式变为等式)”。大体说来,同样的特点也随着定理 2, 5, 10, 16, 24, 25 而出现(我们只列举 § 5.9 的摘要中所提到的结果)。

5.3. 定理 3 和定理 9 的推广. 我们要用到不等式 (5.2.4) 和方程

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^r - 1}{r} = \log t.$$

在 (5.2.4) 中取 $t = a/\sum q a = a/\mathfrak{A}$, $r = 1$, 则得

$$\log a - \log \mathfrak{A} \leq \frac{a}{\mathfrak{A}} - 1,$$

$$\log \mathfrak{G} - \log \mathfrak{A} = \sum q (\log a - \log \mathfrak{A}) \leq 1 - 1 = 0,$$

等号只当每一 a 皆等于 $\mathfrak{A}$ 时成立. 这就证明了定理 9 的类似定理.

今设 $\mathfrak{M}_s$ 对某些正 s 为有限, 则 $\mathfrak{G}$ 为正且有限或为 0. 下之证明适用于当中任何一种情形¹⁾. 给定 $\varepsilon > 0$, 我们可以选取 N , 使得

$$\sum_{n \leq N} q \log a < \log (\mathfrak{G} + \varepsilon), \quad (5.3.1)$$

$$\sum_{n > N} q \frac{a^s - 1}{s} < \varepsilon. \quad (5.3.2)$$

然后取 r_0 , 使得 $0 < r_0 < s$, 且对 $0 < r < r_0$ 有

$$\sum_{n \leq N} q \frac{a^r - 1}{r} < \sum_{n \leq N} q \log a + \varepsilon. \quad (5.3.3)$$

于是, 我们有

$$\begin{aligned} \log \mathfrak{G}(a) &= \frac{1}{r} \log \mathfrak{G}(a^r) \leq \frac{1}{r} \log \mathfrak{A}(a^r) \leq \frac{\mathfrak{A}(a^r) - 1}{r} = \\ &= \sum_{n \leq N} q \frac{a^r - 1}{r} + \sum_{n > N} q \frac{a^r - 1}{r} < \sum_{n \leq N} q \log a + \varepsilon \\ &\quad + \sum_{n > N} q \frac{a^s - 1}{s} < \log (\mathfrak{G} + \varepsilon) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

1) 这是仿照 F. Riesz^[1] 关于相应的积分型定理所给的证明而作出的 (§6.8).

因之, 当 $r \rightarrow +0$ 时, 有

$$\log \mathfrak{M}_r(a) = \frac{1}{r} \log \mathfrak{A}(a') \rightarrow \log \mathfrak{G}(a).$$

我們証讀者自己去証明, 若 $\mathfrak{M}_r$ 对某些負的 r 为正, 則当 $r \rightarrow -0$ 时, $\mathfrak{M}_r \rightarrow \mathfrak{G}$.

5.4. Hölder 不等式及其推广. 第二章中所給出的 Hölder 不等式以及同一类型的其他不等式的証明同样适用于无穷級数. 我們順便尚可看到, 这級数还可以是重級数. 比如

$$(\sum \sum a_{\mu\nu} b_{\mu\nu})^2 \leq \sum \sum a_{\mu\nu}^2 \sum \sum b_{\mu\nu}^2.$$

例如設 $\sum u_\mu^2$ 和 $\sum v_\nu^2$ 为收斂, 并取

$$a_{\mu\nu} = u_\mu v_\nu, \quad b_{\mu\nu} = \frac{1}{(\mu + \nu)^{1+\delta}} \quad (\delta > 0).$$

因 $\sum \sum (\mu + \nu)^{-2-2\delta}$ 收斂, 故知

$$\sum \sum \frac{u_\mu v_\nu}{(\mu + \nu)^{1+\delta}}$$

收斂. 这是后面将要証明的一个定理(定理 315)的一种不完全的形式.

从 Hölder 不等式推导出来的有关 $\mathfrak{M}_r$ 的定理(定理 16 和定理 17) 仍旧未变, 只不过定理 16 的第二个除外情形的叙述必須要按照 § 5.2 之末所作的注释加以修改. 在这里我們必須說“除了 $s \leq 0$ 且 $\mathfrak{M}_s(a) = 0$ 之外”.

联系着这一組定理, 出現了一个新的比較值得注意的特点. 有一个定理, 它是因定理 15 而联想起来的, 但又不是它的一个推論(即使把它推广到无穷級数上去), 它在有限和中並沒有相类似的定理.

161¹⁾. 若 $k > 1$ 且 $\sum ab$ 对于所有使得 $\sum b^{k'}$ 收斂之 b 皆收斂, 則 $\sum a^k$ 收斂.

1) Landau [1].

我們現从另外一个本身就是很值得注意的属于 Abel¹⁾ 的定理来推出这个定理.

162. 若 $\sum a_n$ 发散, 且

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

因而 $A_n \rightarrow \infty$, 則

(i) $\sum \frac{a_n}{A_n}$ 发散;

(ii) $\sum \frac{a_n}{A_n^{1+\delta}}$ 对任意正的 δ 皆收敛.

(i) 我們有

$$\frac{a_{n+1}}{A_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{A_{n+2}} + \cdots + \frac{a_{n+r}}{A_{n+r}} \geq \frac{A_{n+r} - A_n}{A_{n+r}} = 1 - \frac{A_n}{A_{n+r}},$$

它当 n 固定, $r \rightarrow \infty$ 时趋于 1. 因而对于任一 n 和某一相应之 r , 它大于 $1/2$. 此即証明 (i).

(ii) 我們显然可假定 $0 < \delta < 1$, 于是

$$\sum \frac{A_n^\delta - A_{n-1}^\delta}{A_{n-1}^\delta A_n^\delta} = \sum \left(\frac{1}{A_{n-1}^\delta} - \frac{1}{A_n^\delta} \right)$$

为收敛. 由定理 41, 左边之分子不小于 $\delta A_n^{\delta-1} (A_n - A_{n-1}) = \delta a_n A_n^{\delta-1}$. 由此可知

$$\sum \frac{a_n}{A_n A_{n-1}^\delta}$$

收敛. 事实上, 我們証明的比 (ii) 要多一些.

1) Abel [1], 有一些同一类型的包含一个任意函数 $f(x)$ 的定理. 例如, 若 $\sum a_n$ 为发散, $f(x)$ 为正且单增, 且

$$I = \int_1^\infty f(x) dx,$$

則 I 之收敛包含 $\sum a_n f(A_n)$ 之收敛, I 之发散包含 $\sum a_n f(A_{n-1})$ 之发散. 参看 (例如) de la Vallée Poussin [1, pp. 398—399], Littlewood [1]. 这一定理, 虽然带有較普遍的性质, 但并不真正包含定理 162; I 之发散不一定包含 $\sum a_n f(A_n)$ 之发散. 作为一个反例, 我們可取

$$a_n = 2^{2^n}, f(x) = \frac{1}{x \log x}.$$

要导出定理 161, 我們現令

$$a^k = u, ab = uv, b^{k'} = uv^{k'}.$$

于是就要証: 若 $\sum u_n$ 发散, 則有一 v_n 使得 $\sum u_n v_n$ 发散, 且 $\sum u_n v_n^{k'}$ 收敛. 我們取 $v_n = 1/U_n$, 其中 $U_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, 則所要之結論由定理 162 即可得出.

5.5. 平均值 $\mathfrak{M}_r$ (續). 关于平均值 $\mathfrak{M}_r$, 我們虽无多少增添, 但需要作一两点另外的說明. 我們先从一个有关定理 4 的推广的說明开始. 只要定理 4 涉及正的 r , 就必須作如下的解釋: 若諸 a 为有界, $a^* = \max a$ 是它們的上确界, 則当 $r \rightarrow +\infty$ 时,

$$\mathfrak{M}_r \rightarrow \mathfrak{M}_\infty = a^*;$$

若諸 a 为无界, 但 $\mathfrak{M}_r$ 对于所有正的 r 为有限, 則 $\mathfrak{M}_r \rightarrow \infty$.

对于一有限的正 r 或負 r , $\mathfrak{M}_r$ 的連續性問題已不再是十分明显. 我們現在給出一个內容广泛的定理, 但不予証明, 因为所有牽涉到的問題皆以一种更为有趣的形式在第六章中 (§§ 6.10—6.11) 出現.

若 $a_n = C$, 則 $\mathfrak{M}_r = C$ 对所有之 r 成立(不管 C 为正或为 0). 我們排除了这种情形, 并排除使得 $\mathfrak{G}$ 是无意义的情形, 此时对 $r > 0$ 有 $\mathfrak{M}_r = \infty$, 对 $r < 0$ 有 $\mathfrak{M}_r = 0$. 我們令

$$\mathfrak{L}_r(a) = \log \mathfrak{M}_r(a)$$

(約定 $\log \infty = +\infty$, $\log 0 = -\infty$).

163. 除了剛才所說的情形之外, 使得 $\mathfrak{L}_r(a)$ 是有限的那种值所成之集 I 或为一空集, 或为一閉区間, 或为一半閉区間, 或为一开区間 (u, v) , 其中 $-\infty \leq u \leq v \leq +\infty$, 它以 $r = 0$ 为一內点或端点, 因而 $u \leq 0 \leq v$, 但其它方面則是任意的(特別, 它可包含所有的实数或一个都不包含). 在 I 之右方 $\mathfrak{L}_r$ 为 $+\infty$; 在左方为 $-\infty$; 在 I 之內部(假若存在的話)是 r 之一連續且严格单增之函数; 而当 r 从 I 之內部趋于 I 之一端点时, 則趋于一极限, 等于它在此端点之值.

5.6. 和数 $\mathfrak{S}_r$. 在 § 2.10 中給出的 $\mathfrak{S}_r$ 之定义仍保持不变, 并且有关 $\mathfrak{S}_r$ 的定理也沒有多少需要說明, 虽然其中牽涉到对 r 而言

的連續性的定理当然不是那么立即可以得出。定理 20 必須按照下之意义来解释：“若 Θ_r 对于某一（充分大的） r 为收敛，則其对于所有更大的 r 亦收敛，且 …”，定理 21 則按：“若 Θ_r 对于所有正的（任意小的） r 为收敛，則 …”。定理 20 的推广可如下証明。若 Θ_R 对于一正 R 收敛，則 $a_n \rightarrow 0$ ，且 Θ_r 对 $r > R$ 亦收敛。于是存在一最大的 a ，根据齐次性，我們可假定此 a 为 1，并可假定諸 a 系按降序排列。于是，若

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_N = 1 > a_{N+1},$$

則对 $r > R$ ，有

$$\Theta_r = (N + a_{N+1}^r + a_{N+2}^r + \cdots)^{1/r}.$$

上之級数位于 1 与

$$N + a_{N+1}^R + a_{N+2}^R + \cdots$$

之間，由此即得定理。

有一个新定理（在有限情形，这是显而易見的）。

164. 若 Θ_R 为收敛，則当 $r > R$ 时 Θ_r 为連續，且当 $r = R$ 时为右連續。若 Θ_R 为发散，但 Θ_r 当 $r > R$ 时为收敛，則当 $r \rightarrow R$ 时， $\Theta_r \rightarrow \infty$ 。

証明留諸讀者。

5.7. Minkowski 不等式。 §§ 2.11—2.12 中的主要情节不需要更动。定理 24—26 可以推广到二重級数。

165¹⁾ 若 $r > 1$ ，且 a_{mn} 不取 $b_m c_n$ 的形式，則

$$\left\{ \sum_n q_n \left(\sum_m p_m a_{mn} \right)^r \right\}^{1/r} < \sum_m p_m \left(\sum_n q_n a_{mn}^r \right)^{1/r}.$$

当 $0 < r < 1$ 时，不等式取反号。

不失其普遍性，我們可假定 $p = 1, q = 1$ ，而証明可如前进行。同理，对应于定理 27，我們有

166. 若 $r > 1$ ，則

1) 这里正如定理 26 中一样，我們放弃了平常关于 q 所作的約定。

$$\sum_n \left(\sum_m a_{mn} \right)^r > \sum_m \sum_n a_{mn}^r$$

(若 $0 < r < 1$, 則不等式反号), 除非对于每一 n , a_{mn} 除 m 之外皆为 0.

5.8. Чебышев (Tchebychef) 不等式. 我們現取 Tchebychef 不等式(定理 43) 来作为一个更进一步的实例.

我們可假定 $\sum p = 1$. 由恆等式

$$\begin{aligned} \sum_1^n p_\mu \sum_1^n p_\nu a_\nu b_\nu - \sum_1^n p_\mu a_\mu \sum_1^n p_\nu b_\nu \\ = \frac{1}{2} \sum_1^n \sum_1^n p_\mu p_\nu (a_\mu - a_\nu)(b_\mu - b_\nu) \end{aligned}$$

可知(我們当然假定 (a) 和 (b) 皆不为 0), (i) 若 (a) 与 (b) 为相似排列, 則 $\sum pab$ 之收敛隐含 $\sum pa$ 和 $\sum pb$ 之收敛, (ii) 若 (a) 与 (b) 为反向排列, 則 $\sum pa$ 和 $\sum pb$ 之收敛隐含 $\sum pab$ 之收敛. 無論在哪一种情形, 我們皆可在恆等式中令 $n = \infty$, 由是我們的結論即可如前得出.

5.9. 摘要. 下述的定理实值上就是列举了第二章的主要定理中对无穷級数仍旧保持有效的那些定理, 不过要加上前一节中所說的解释.

167. 定理 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 27, 28 和 43 当所涉及的級数是无限时仍旧有效, 不过要假定它們所断言的不等式是按照 § 5.1 中所作的約定来解释, 而且在定理 1, 2, 5, 10, 16, 24, 25 中例外情形的叙述是照 § 5.2 中所說的方式来修改.

我們值得把定理的最后一句作更明确的叙述. 諸定理的最后字句必須代之以

- (1) “或者 $r < 0$ 且 $\mathfrak{M}_r(a) = 0$ ”,
- (2) “或 $\mathfrak{G}(a) = 0$ ”,
- (5) “或 $r \leq 0$ 且 $\mathfrak{M}_r(a) = 0$ ”,
- (10) “或 (2) $\mathfrak{G}(a + b + \cdots + l) = 0$ ”,

(16) “或 $r \leq 0$ 且 $\mathfrak{M}_r(a) = 0$ ”,

(24) “或 $r \leq 0$ 且 $\mathfrak{M}_r(a + b + \cdots + l) = 0$ ”,

(25) “或 $r < 0$ 且 $(\sum (a + b + \cdots + l)^r)^{1/r} = 0$ ”.

我們也还可以再加上一句 (有如在 § 6.4 中所說): 定理 167 中所引到的大部分定理 (特別是有关 $\mathfrak{M}_r$ 者) 可以从有关积分的相应定理中經特殊化而得. 但在第六章中我們常常忽略負的 r .

各种定理和各种例

下述諸定理大部分皆与定理 156 和定理 157 有关. 在定理 168—175 中, 我們假定 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是互逆函数, 它們当 $x = 0$ 时为 0, 当 x 增加时为严格单增, 并假定

$$F(x) = \int_0^x f(u) du, \quad G(x) = \int_0^x g(t) dt.$$

168. 若 $\sum F(a_n)$ 和 $\sum G(b_n)$ 为收斂, 則 $\sum a_n b_n$ 为收斂, 且

$$\sum a_n b_n \leq \sum F(a_n) + \sum G(b_n).$$

[定理 156 的系.]

169. 若 $\sum a_n f(a_n)$ 和 $\sum b_n g(b_n)$ 为收斂, 則 $\sum a_n b_n$ 为收斂, 且

$$\sum a_n b_n \leq \sum a_n f(a_n) + \sum b_n g(b_n).$$

[定理 157 的系.]

170. 我們可以选取 f (因而 g, F, G) 和 a_n , 使得 $\sum F(a_n)$ 为发散, 但 $\sum a_n b_n$ 对所有使得 $\sum G(b_n)$ 为收斂之 b_n 皆为收斂.

171. 又可以使得 $\sum a_n f(a_n)$ 发散, 但 $\sum a_n b_n$ 收斂, 只要 $\sum b_n g(b_n)$ 收斂.

[上述两定理的目的是要說明: 按照定理 161 給出 Hölder 不等式之逆这种意义而言, 定理 168 和 169 是沒有逆的, 因而也就不存在相应的收斂性判別法. 定理 171 是由 Cooper^[3] 証明的, 并且定理 170 包含定理 171 而且比它要稍微強一些, 它仍可以用同样方法証明.]

172. 若 $\sum b_n / \log \left(\frac{1}{b_n} \right)$ 收斂, 則 $\sum b_n / \log n$ 收斂.

[Cooper [3]: 在 Cooper 关于定理 171 的証明中用到了定理 172.]

173. 若 $g(x)$ 满足不等式

$$g(xy) \leq g(x)g(y),$$

又若当 $\sum b_n g(b_n)$ 收斂时, $\sum a_n b_n$ 也收斂, 則 $\sum a_n f(a_n)$ 收斂. 同理, 若当 $\sum G(b_n)$ 收斂时 $\sum a_n b_n$ 也收斂, 則 $\sum F(a_n)$ 收斂.

[关于前一命题, 可参考 Cooper [3], 在現与的情形它是較強一些, 第二命题是一个系.]

174. 若当 $\sum G(b_n)$ 收斂时 $\sum a_n b_n$ 也收斂, 則存在一依赖于序列 (a) 的数 $\lambda = \lambda(a)$, 使得 $\sum F(\lambda a_n)$ 收斂.

175. 設定理 174 的条件成立, 又設对于小的 x , 某一 $c > 1$, 及某一 k , $F(cx) \leq kF(x)$, 則 $\sum F(a_n)$ 收斂.

[关于上之二定理, 可参考 Birnbaum 和 Orlicz [1].]

176. 若 a_n 和 b_n 趋于 0, k 为正, 且

$$\sum \frac{a_n}{\log(1/a_n)}, \sum e^{-k/b_n}$$

皆为收斂, 則 $\sum a_n b_n$ 为收斂.

[利用定理 169.]

177. 若 $x > 0$, $a_n \geq 0$, $f(x) = \sum a_n x^n$, 則 $f(x)$ 是 x 之一凸函数, $\log f(x)$ 是 $\log x$ 之一凸函数.

[显然有 $f''(x) \geq 0$. 要証明第二結果, 可令 $x = e^{-y}$, $f(x) = g(y)$. 于是, 由定理 7,

$$gg'' - g'^2 = \sum a_n e^{-ny} \sum n^2 a_n e^{-ny} - (\sum n a_n e^{-ny})^2 \geq 0.$$

由定理 118 即得所要之結果.]

178. 若 $a_n \geq 0$, $\lambda_n > \lambda_{n-1} \geq 0$, 且 $f(x) = \sum a_n e^{-\lambda_n x}$, 則 $\log f(x)$ 是 x 之一凸函数.

179. 若 $a_n > 0$, 且 $\lambda_n, \mu_n, \dots, \nu_n, x, y, \dots, z$ 为实数, 則級数

$$\sum a e^{\lambda x + \mu y + \dots + \nu z} = f(x, y, \dots, z)$$

之收斂域 D 是凸的, 且 $\log f$ 在 D 中是 $x, y, \dots, z$ 之一凸函数.

[因为(利用定理 11 在无穷級数方面的推广)

$$\begin{aligned} f\{x_1 t + x_2(1-t), \dots, z_1 t + z_2(1-t)\} \\ \leq \{f(x_1, \dots, z_1)\}^t \{f(x_2, \dots, z_2)\}^{1-t}. \end{aligned}$$

在这里, 我們关于收斂性所作之約定是重要的.]

180. $\sum a_n^2 < 2 (\sum n^2 a_n^2)^{\frac{1}{2}} (\sum (a_n - a_{n+1})^2)^{\frac{1}{2}}$, 除非 a_n 对所有之 n 皆为 0.

[参考定理 226.]

第 六 章 积 分

6.1. Lebesgue 积分方面的一些准备知識. 这一章里所考虑的积分都是 Lebesgue 积分, 但 §§ 6.15—6.22 除外, 在那里我們要涉及到 Stieltjes 积分. 这里我們最好来談一下, 在这方面我們需要多少准备知識. 大致說来, 需要得很少, 讀者一般所需要知道的也就是: 存在某种积分的定义, 它具备我們下面所描述的性質. 我們的定理中当然有許多对于老的定义來說仍旧有意义而且保持有效, 但若这些定义先就具有适当程度的广泛性, 則問題就会变得比較容易, 內容就变得更为广泛.

我們把可測集这一概念視為已知, 一般都是指一維的, 但偶然也指多維的. 我們所考虑的集可以是有界的或无界的. 測度的定义先是用于有界集: 一个无界集, 若它的任何有界部分皆是可測的, 則称之为可測集, 其測度則是它的有界成分的測度的上确界.

我們总是无条件地假定, 我們所涉及到的任何集 E 皆是可測的. E 的測度記作 mE , 有时在不致引起混淆的情况下就簡作 E . 若 E 为无界, mE 可能为 ∞ .

我們也把可測函数这一概念視為已知. 可測函数之和、积、极限皆为可測. 所有可以用寻常分析中的手續来定义的函数皆为可測, 而我們將只限于考虑可測函数; 一般我們就不再重新說明: 在我們的工作中所出現的函数假定是可測的.

其次, 我們假定一有界或无界的函数在任一 (有界的或无界的) 区間或可測集上的积分的定义为已知. 有界可測函数在任一有界可測集上为可积. 我們称在討論中的区間或集 E 上为可积的 (有界或无界) 函数所成之類为类 L , 欲強調討論中之集时, 也称之为类 $L(E)$. 若 f 属于 L , 則称“ f 是 L ”, 記作 $f \in L$ (对于其它的类亦复类似).

若 $f = 1$, 則 $\int_E f dx = mE$.

若 $f \in L$, 則 $|f| \in L$. 若 f^+ 表示这样的一个函数, 它当 f 为正时等于 f , 否則为 0, f^- 則是当 f 为負时等于 f , 否則为 0, 則有

$f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \min(f, 0)$, $f = f^+ + f^-$, $|f| = f^+ - f^-$, 故知 $f^+ \in L$, $f^- \in L$, 且¹⁾

$$\int f dx = \int f^+ dx + \int f^- dx, \int |f| dx = \int f^+ dx - \int f^- dx.$$

若 $f \geq 0$, 且 $(f)_n = \min(f, n)$, 則(由定义)

$$\int f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (f)_n dx.$$

若 $f \in L$, 又 (g 为可測且) $|g| < C|f|$, 則 $g \in L$.

若 $f_1, f_2, \dots, f_n \in L$, 則

$$\begin{aligned} & \int (a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n) dx \\ &= a_1 \int f_1 dx + a_2 \int f_2 dx + \dots + a_n \int f_n dx. \end{aligned}$$

若 $p > 0$, 又 f 为可測且 $|f|^p \in L$, 則称 f 属于 Lebesgue L^p 类, 或 $f \in L^p$. 这些类当 $p \geq 1$ 时最为重要. L^1 就是 L .

若积分是在一有限区間(或有界集)上取的, 則对每一 $q > p$, L^p 包含 L^q ; $f \in L^q$ 隐含 $f \in L^p$. 有界函数属于任何 L^q . 这些性質对无限区間并不成立; 在 $(0, \infty)$ 中 f 可能只对一个 p 属于 L^p .

若区間为有限, 且 $f \in L^q$, $p < q$, 則 $|f|^p < 1 + |f|^q$, 故 $f \in L^p$.

若区間是 $(0, a)$, 其中 $a < 1$, 則 (a) 对每一 $\delta > 0$, $x^{-1/p}$ 属于 $L^{p+\delta}$, 但不属于 L^p ; (b) $x^{-1/p} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{-2/p}$ 属于 L^p , 但不属于 $L^{p+\delta}$; (c) $\log \frac{1}{x}$ 属于每一 L^p ; (d) $e^{1/x}$ 不属于任何 L^p . 若区間为 $(0, \infty)$, 則 $x^{-\frac{1}{2}}(1 + |\log x|)^{-1}$ 属于 L^2 , 但不属于其它的 L^p .

1) 我們只就一个变数叙述这些結果, 并且把积分的区間或集合省略不写出来.

6.2. 关于零集和零函数的說明. 測度为 0 的集称为零集. 在积分論中零集是无关重要的. 若除一零集之外 $f = g$, 則称 f 与 g 等价, 記作 $f \equiv g$. 等价函数具有同样的积分(若有积分的話).

若 $f \equiv 0$, 則称 f 为一零函数, 并且說 f 是零.

同理, 我們可以定义“在 E 上等价”, “在 E 中为零”: 若 f 在 E 中除一零集中之点外皆等于 0, 則称 f 在 E 中为零. 在这种情形, 当行文中明显易辨时, 我們就不反复提到 E , 比如当我们考虑 E 上的积分时就是这样.

若一性質 $P(x)$ 除了属于一零集中之 x 外为其余所有之 x 所具有, 則称它为几乎所有之 x 所具有, 或 $P(x)$ 对几乎所有之 x 皆成立, 或几乎处处成立. 由是, 一零函数几乎处处为 0.

我們一般总是假定: 我們的函数 $f, g, \dots$ 几乎处处为有限; 但有时偶尔也考虑在一正測度的集上为无限的函数. 例如, 若 f 一般为正, 但在一正測度之集 E 上为 0, 又若 $r < 0$, 則我們必得认为 f^r 在 E 上为无穷, 而 $\int f^r dx$ 則取值 ∞ .

若 E 为一零集, 則对所有之 f ,

$$\int_E f dx = 0.$$

我們將毫无例外地假定, 凡在上面取积分之集 E 皆不是零集.

若 $f \geq 0$, 則 $\int f dx = 0$ 之充要条件是 f 为零(函数).

我們值得去注意一下 Riemann 积分理論中与上之定理处于相当地位的定理. 我們把 Riemann 可积的函数类記作 R (它包含在 L 之中). f 属于 R 的充要条件是 f 为有界, 且其不連續点作成一零集.

若 f 属于 R , 且 $f \geq 0$, 則 $\int f dx = 0$ 之充要条件是在 f 之所有連續点, $f = 0$.

盖因(1)若此条件成立, 則 $f \equiv 0$, 因而 $\int f dx = 0$. 又(2)若此条件不成立, 則有一連續点 ξ , 于此, $f(\xi) > 0$, 因而有一包含

ξ 之區間，在此區間中 $f(x) > \frac{1}{2} f(\xi)$ ；故 $\int f dx > 0$ 。

这一定理使得我們可以去刻划在我們的不等式中等号成立的情形，只要它們仅是关系到 R 中之函数。事实上，我們的大多数定理皆具有一个对偶的解释。原解释是这样：其中的积分是 Lebesgue 积分，“零”和“等价”是按照 Lebesgue 的理論来解释的。在附属的解释中，积分是“Riemann 积分”，“零函数”是在其連續点皆为 0 之函数，“等价函数”則是其差在此意义下为零之函数。

6.3. 有关积分之进一步說明。 §§ 6.1—6.2 的說明对于后面的多数定理，例如 Hölder 和 Minkowski 不等式的最完全的形式（定理 188 和定理 198），已是一个足够的基础。但还有少数的情形，在那里，我們还将求助于更为困难的定理。我們現將它們列举如下。

(a) 部分积分。所需要的定理是：若 f 和 g 都是积分（絕對連續函数），則

$$\int_a^b fg' dx = [fg]_a^b - \int_a^b f'g dx.$$

(b) 积分号下取极限。两个主要定理是

(i) 若 $|s_n(x)| < \phi(x)$ ，其中 $\phi \in L$ ，且对于所有或几乎所有之 x ， $s_n(x)$ 趋于一个极限 $s(x)$ ，則

$$\int s_n(x) dx \rightarrow \int s(x) dx.$$

(ii) 若对所有之 n ， $s_n(x) \in L$ ， $s_n(x)$ 对于所有或几乎所有之 x 随 n 增加，且

$$\lim s_n(x) = s(x),$$

則

$$\int s_n(x) dx \rightarrow \int s(x) dx.$$

(ii) 中右边之积分可为无限，此时上之結果解释为 $\int s_n(x) dx \rightarrow \infty$ ；特別，若在一正測度之集上 $s(x) = \infty$ ，則出現此种情

形。在上述之每一定理中， n 可以是趋于无穷之整数，或趋于一极限之連續参数。

在实变函数論的書籍中可以看到，由(i)可知，若函数 $f(x)$ 之增量比

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

为有界(因而几乎处处有一导数)，則 $f(x)$ 为其导数之积分。将这点說明与 § 3.18 之末結合在一起，我們可以看出，一連續凸函数 $f(x)$ 是它的导数 $f'(x)$ 之积分，或是它的单边导数 $f'_l(x)$, $f'_r(x)$ 的积分。因此，它是一单增函数的积分。另一方面，若 $f(x)$ 是一单增函数 $g(x)$ 之积分，且 $h > 0$ ，則

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \int_x^{x+h} g(u) du \geq \\ &\geq \int_{x-h}^x g(u) du = f(x) - f(x-h), \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 为凸的。因之，連續凸函数类与单增函数之积分所成之函数类一致。

一单增函数属于 R ，故上述諸积分作为 Riemann 积分皆存在，因而此定理不必用到 Lebesgue 之理論即可証明。

(c) 代換。标准的定理是：若 f 与 g 为可积， $g \geq 0$ ， G 是 g 的一积分，且 $a = G(\alpha)$ ， $b = G(\beta)$ ，則

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f\{G(y)\} g(y) dy, \quad (6.3.1)$$

其中 a, b, α, β 中任何一个可为无穷。

对于后面在施行变数变换时需要用到积分的变换規則的地方，上之定理已完全滿足需要¹⁾。但一般我們只用到象 $x = y + a$

1) 关于公式 (6.3.1)，我們还可以加上两点額外的說明。

(1) 若象正文中那样假定 g 是非負且可积，而 f 則只假定为可測（而不是可积），則(6.3.1)右边的存在既是左边的存在（即 f 为可积）的一个充分条件，而且也是一个必要条件。

(2) $f(x)$ 之为可积，虽然隱含 $f\{G(y)\} g(y)$ 之为可积，但并不能隱含 $f\{G(y)\}$ 之为可測。

或 $x = ay$ 之类的简单变换, 此时这一规则的正确性由定义立可得出.

(d) 重积分和迭积分. 唯一要用到的定理是“Fubini 定理”. 若 $f(x, y)$ 是二元可测且非负的函数, 又若积分

$$\int_a^A \int_b^B f dx dy, \int_a^A dx \int_b^B f dy, \int_b^B dy \int_a^A f dx$$

中有一个存在, 则其余的积分也存在, 且全相等.

这里的上下限可以是有限或无穷, 而且发散的情形也包括在内: 若有一积分发散, 则其余的积分也发散.

于是我们假定 $f(x, y)$ 是可测的且是非负的. 则二重积分为 0 之充要条件是 $f(x, y)$ 为 0, 即使得 $f(x, y) > 0$ 之点所成之集具有测度 0. 前一个迭积分为 0 之充要条件是对于几乎所有之 x , $f(x, y)$ 关于 y 为 0; 后一个则是对于几乎所有之 y , 关于 x 为 0. 因之, “二元非负零函数”的这三种意义是等价的.

6.4. 关于証法的说明. 已经对于有限和证明了的不等式, 利用取极限, 常可推广到积分上去, 但一般总有些东西要在论证中损失掉. 我们现在可以利用考虑定理 7 在积分方面的类似定理来阐明这一点.

先设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 中为非负且 Riemann 可积; 并在定理 7 中取

$$a_\nu = f\left(\frac{\nu}{n}\right), \quad b_\nu = g\left(\frac{\nu}{n}\right).$$

除以 n^2 , 则得¹⁾

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum f\left(\frac{\nu}{n}\right) g\left(\frac{\nu}{n}\right) \right\}^2 \leq \frac{1}{n} \sum f^2\left(\frac{\nu}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \sum g^2\left(\frac{\nu}{n}\right);$$

令 $n \rightarrow \infty$, 则得

$$\left(\int_0^1 fg dx \right)^2 \leq \int_0^1 f^2 dx \int_0^1 g^2 dx. \quad (6.4.1)$$

1) 在这里, “关于 Σ 为齐次” (§ 1.4) 甚为重要.

若我們使用 Lebesgue 积分, 則必須另外來討論¹⁾. 設 f 和 g 在 $(0,1)$ 中為非負, 且屬於 L^2 , 又設 e_{rs} 是使得

$$\frac{r-1}{n} \leq f^2 < \frac{r}{n}, \quad \frac{s-1}{n} \leq g^2 < \frac{s}{n} \quad (r, s = 1, 2, 3, \dots)$$

成立的 x 做成的集, 則由定理 7,

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 fg \, dx \right)^2 &\leq \left[\sum \sum \left(\frac{r}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{s}{n} \right)^{\frac{1}{2}} e_{rs} \right]^2 \\ &\leq \sum \sum \frac{r}{n} e_{rs} \sum \sum \frac{s}{n} e_{rs}. \end{aligned}$$

但

$$\sum \sum \frac{r}{n} e_{rs} = \sum \sum \frac{1}{n} e_{rs} + \sum \sum \frac{r-1}{n} e_{rs} \leq \frac{1}{n} + \int_0^1 f^2 \, dx,$$

而關於 g 也有一個類似的不等式. 因之, 令 $n \rightarrow \infty$, 則得 (6.4.1).

無論在哪種情形, 我們的最終結果都是不完全的. 即使我們能夠用定理 7 的 “ $<$ ”, 當我們取極限時, 它也將退化為 “ $\leq$ ”, 我們也就接觸不到等號的情形.

從積分不等式轉化到和數不等式要簡單得多, 可以經過適當的特殊化來實現. 例如, 現在來考慮不等式

$$\exp \left\{ \int_0^1 \log f(x) \, dx \right\} < \int_0^1 f(x) \, dx \quad (6.4.2)$$

(§ 6.7, 定理 184). 設

$$q_v > 0, \quad q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1,$$

並定義 $f(x)$ 如

$$f(x) = a_v, \quad (q_1 + \dots + q_{v-1} \leq x < q_1 + \dots + q_{v-1} + q_v),$$

其中之 $q_1 + \dots + q_{v-1}$ 當 $v = 1$ 時了解為 0, 我們即得定理 9. 定理 9 中不等式退化為等式的條件也可從 (6.4.2) 的相應條件立刻得出.

這種證明方法常常是有用的, 因為積分比級數常常更易處理, 在第九章中我們還要遇到一些例子.

1) 這裡所用的證法的精確形式是由 H. D. Ursell 提供我們的.

6.5. 关于方法的进一步说明: Schwarz 不等式. 正如同处理无穷级数一样, 我们在对待 § 6.4 中的困难时, 可回到第二章的定理的证明中去, 并且注意, 经过明显的改变, 这些证明仍可运用于最一般形状的积分. 我们现在可以通过 “Schwarz 不等式¹⁾”, 即定理 7 的类似定理, 来说明这一点.

181. $\left(\int fg dx\right)^2 < \int f^2 dx \int g^2 dx$, 除非 $Af \equiv Bg$, 其中 A 与 B 是不同时为 0 的常数.

今后, 当积分上下限在明白写出来一无好处时, 我们就把它们略去; 它们可以是有限或无限, 积分也可以在任何可测集上来取, 在此种情形, $Af \equiv Bg$ 当然就意味着在 E 中有 $Af \equiv Bg$. 我们也采用与 § 5.1 中相应的规定: “ $X < Y$ ” 表示 “若 Y 为有限, 则 X 为有限, 且 $X < Y$ ”; 而象 § 5.1 中所述的那种其他形式的不等式也是作类似的解释. 由是, 每一不等式皆暗中包含着一个关于 “收敛” 的断言, 这种断言我们只是偶然才明白的表示出来. 例如定理 181 即隐含着: “若 $\int f^2 dx$ 和 $\int g^2 dx$ 为有限, 则 $\int fg dx$ 为有限; 若 f 和 g 属于 L^2 , 则 fg 属于 L ”.

与 § 2.4 的证明相对应的证明如下.

(i) 我们有

$$\begin{aligned} & \int f^2 dx \int g^2 dx - \left(\int fg dx\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \int f^2(x) dx \int g^2(y) dy + \frac{1}{2} \int g^2(x) dx \int f^2(y) dy \\ & \quad - \int f(x)g(x) dx \int f(y)g(y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int dy \int \{f(x)g(y) - g(x)f(y)\}^2 dx \geq 0. \end{aligned}$$

留下来的就是去讨论等号何时可能成立. 首先, 若 $Af \equiv Bg$,

1) 或 Буняковский 不等式, 参看 15 页.

平 均 值 $\mathfrak{M}_r(f)$

6.6. 当 $r \neq 0$ 时平均值 $\mathfrak{M}_r(f)$ 的定义. 在下面, 对于积分符号若无明确的说明, 其积分范围皆指一个有限或无限的区间 (a, b) , 或是一个可测集 E^1 . $f(x)$ 在 E 中几乎处处为有限, 且为非负; “权函数” $p(x)$ 在 E 中处处为有限且为正²⁾, 且在 E 上为可积. 参数 r 是实的, 且不为 0.

我們的假定包含着 $0 < \int p \, dx < \infty$. 若假定

$$\int p \, dx = 1,$$

常常要感到方便得多, 在此种情形(参看 § 2.2), 我們把 p 写作 q .

我們記

$$\mathfrak{M}_r(f) = \mathfrak{M}_r(f, p) = \left(\frac{\int p f^r \, dx}{\int p \, dx} \right)^{1/r} \quad (r \neq 0), \quad (6.6.1)$$

$$\mathfrak{A}(f) = \mathfrak{M}_1(f), \quad (6.6.2)$$

因而有

$$\mathfrak{M}_r(f) = \{\mathfrak{A}(f^r)\}^{1/r}; \quad (6.6.3)$$

对于这些記号, 我們作下之規定. 若 $\int p f^r \, dx$ 为无限, 則記

$$\int p f^r \, dx = \infty, \mathfrak{M}_r(f) = \infty \quad (r > 0), \mathfrak{M}_r(f) = 0 \quad (r < 0).$$

特別, 若 $r < 0$ 且 f 在一正测度之集上为 0, 則 $\mathfrak{M}_r(f) = 0$. 此外, 若我們約定把 0 和 ∞ 看作互为倒数, 則有

$$\mathfrak{M}_r(f) = \frac{1}{\mathfrak{M}_{-r}(1/f)}. \quad (6.6.4)$$

- 1) 当 $r > 0$ 时, 我們可設 f 在 E 的余集上为 0, 而将所有的情況全都化为区间 $(-\infty, \infty)$ 的情况.
- 2) 若假設不是 $p > 0$ 而是 $p \geq 0$, 則关于等号成立的情形就会导出略为不同的結果(例如以 $pf \equiv pC$ 代替 $f \equiv C$). 若将 E 代以 E 中使得 $p > 0$ 的子集, 則此种情形即化为我們的显然是比較特殊的情形.

这一公式使得我們可以从正的 r 轉換到負的 r , 因而在大多数的情况, 我們只限于討論正的 r , 从而簡化我們后面的定理.

若 $f \equiv 0$, 則对所有之 r , $\mathfrak{M}_r(f) = 0$. 若 $f \equiv C$, 其中 C 为正且有限, 則对所有之 r , $\mathfrak{M}_r(f) = C$. 若 $f \equiv \infty^D$, 則对所有之 r , $\mathfrak{M}_r(f) = \infty$. 除了这些情形之外, $\mathfrak{M}_r(f)$ 只当 $r > 0$ 时才可能为 ∞ , 只当 $r < 0$ 时才可能为 0.

我們定义 $\max f$, 即 f 的“有效上界”为具有下述性質的最大的 ξ :

“若 $\varepsilon > 0$, 則有一正测度之集 $e(\varepsilon)$, 使得 $f > \xi - \varepsilon$ ”. 若无此种 ξ 存在, 則記 $\max f = \infty$. 对于在一閉区間內連續之函数, $\max f$ 即为通常之极大. $\min f$ 亦同法定义; $\min f \geq 0$ 且

$$\min f = \frac{1}{\max (1/f)}. \quad (6.6.5)$$

等价函数具有同样之 $\max$ 和 $\min$.

例如, 假設积分范围是 $(0, \infty)$, $f(x)$ 和 $q(x)$ 是由

$$f(x) = a_n, q(x) = q_n (n-1 \leq x < n, n = 1, 2, 3, \dots)$$

所定义之阶梯函数, 則由定义 (5.2.1), 有

$$\mathfrak{M}_r(f) = (\sum q a^r)^{1/r} = \mathfrak{M}_r(a).$$

同理, 有

$$\max f = \max a, \min f = \min a,$$

和(若我們提前使用 §6.7 之定义) $\mathfrak{G}(f) = \mathfrak{G}(a)$. 經過这一特殊化手續, 我們就可以把第二章和第五章中的許多定理包含在本章的相应定理之中.

另一方面 (如同在 §6.4 中那样), 我們可假定积分范围为 $(0, 1)$, 并定义 $f(x)$ 和 $q(x)$ 如

$$f(x) = a_n (q_1 + \dots + q_{n-1} \leq x < q_1 + \dots + q_n), q(x) = 1.$$

在这种情形, $\mathfrak{M}_r(f)$ 也化为 $\mathfrak{M}_r(a)$.

183. 若 $r \neq 0$, 且 $\mathfrak{M}_r(f)$ 为有限且为正, 則

1) 容許这种情形, 就是暂时放弃 §6.2 所作的了解, 即 f 是假定几乎处处为有限.

$$\min f < \mathfrak{M}_r(f) < \max f,$$

除非 $f \equiv C$.

这里的 r 可为正或为负. 証明和定理 1 相似. 我們先設 $r = 1$, 于是, 利用一个权函数 $q(x)$, 則得

$$\int q(f - \mathfrak{A}) dx = 0.$$

因之, 或 $f \equiv \mathfrak{A}$, 或 $f - \mathfrak{A}$ 在一正測度集中为正, 同时又在另一正測度集中为负. 此即对 $r = 1$ 証明所要之結果, 利用(6.6.3), 我們即可将它推广到一般情形.

若我們希望将定理 183 表示成与定理 1 及其在第五章中的推广更相一致的形式¹⁾, 我們就必須說 “ $\min f < \mathfrak{M}_r(f) < \max f$, 除非 $f \equiv C$ 或 $r < 0$ 且 $\mathfrak{M}_r(f) = 0$ ”. 于是我們就有两种使得等号成立的情形, 它們与 § 5.2 中所区分出来的情形密切相对应, 即“原”情形, 此时 $f \equiv C$, 在此种情形, 两个不等号皆变为等号, 和“附属”情形, 这只在 $r < 0$ 时才出現, 在此种情形, 只有一个不等号化为等号. 当 $r < 0$ 时, 这种差別在我們的許多定理之中皆发生, 正如同它在第二章和第五章中发生那样; 但在这里, 因我們常常忽略了負的 r , 它并不显得很突出.

6.7. 一函数的几何平均. 我們定义几何平均 $\mathfrak{G}(f)$ 如

$$\mathfrak{G}(f) = \mathfrak{G}(f, p) = \exp \left(\frac{\int p \log f dx}{\int p dx} \right) \quad (6.7.1)$$

或

$$\log \mathfrak{G}(f) = \mathfrak{A}(\log f), \quad (6.7.2)$$

由是, 特別当 $p = q$, $\int q dx = 1$, 則有

$$\mathfrak{I}(f) = \log \mathfrak{G}(f) = \int q \log f dx. \quad (6.7.3)$$

我們須要作一些預备性的說明.

1) 參看 § 5.2.

因 $\log f$ 不一定为正,故 $\mathfrak{I}$ 的收斂問題比至今所曾考虑的更为复杂.

若我們用 $\mathfrak{I}^+$ 和 $\mathfrak{I}^-$ 分別表示就 $\log^+ f$ 和 $\log^- f$ 所做成的积分,就如同 $\mathfrak{I}$ 之就 $\log f$ 所做成的那样¹⁾,則有四种可能性: (a) $\mathfrak{I}^+$ 和 $\mathfrak{I}^-$ 同为有限, (b) $\mathfrak{I}^+$ 为有限, $\mathfrak{I}^- = -\infty$, (c) $\mathfrak{I}^+ = \infty$, $\mathfrak{I}^-$ 为有限, (d) $\mathfrak{I}^+ = \infty$, $\mathfrak{I}^- = -\infty$. 这四种情形可以以 $(0, 1)$ 中之函数

$$x, e^{-1/x}, e^{1/x}, \exp\left(\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}\right)$$

作为例子,此时取 $q(x) = 1$.

若 $\mathfrak{M}_r(f)$ 对某些 $r > 0$ 为有限,則由

$$\log^+ f \leq \max\left(\frac{f^r - 1}{r}, 0\right)$$

可知, $\mathfrak{I}^+(f)$ 为有限,因而只出現情形 (a) 和 (b). 在情形 (a), $\mathfrak{I}(f)$ 作为一 Lebesgue 积分而存在, $\mathfrak{G}(f)$ 为正且有限. 在情形 (b), 我們写

$$\mathfrak{I}(f) = -\infty, \mathfrak{G}(f) = 0.$$

同理,若 $\mathfrak{M}_r(1/f)$ 对某些 $r > 0$ 为有限,則有情形 (a) 或情形 (c); 在后一种情形,我們写

$$\mathfrak{I}(f) = \infty, \mathfrak{G}(f) = \infty.$$

在情形 (d), 記号 $\mathfrak{G}(f)$ 无意义. 在此种情形, $\mathfrak{M}_r(f)$ 和 $\mathfrak{M}_r(1/f)$ 对所有正的 r 皆为无穷, $\mathfrak{M}_r(f)$ 对所有負的 r 皆为 0.

在情形 (a), 我們有

$$\mathfrak{G}\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{\mathfrak{G}(f)}, \quad (6.7.4)$$

等式两边皆为正且有限;容易証明,假若关于 0 和 ∞ 仍采用 (6.6.4) 中同样之約定,并且更規定,若等式 (6.7.4) 之一边无意义,則另一边亦无意义,則此等式对各种情形皆成立.

1) 关于 $\log^+$ 和 $\log^-$ 的定义,可参考 §5.2.

我們現來証明定理 9 之一类似定理.

184. 若 $\mathfrak{A}(f)$ 为有限, 則

$$\mathfrak{G}(f) < \mathfrak{A}(f), \quad (6.7.5)$$

除非 $f \equiv C$, 其中 C 为一常数. 更一般言之, 若 $\mathfrak{M}_r(f)$ 为有限, 其中 $r > 0$, 則

$$\mathfrak{G}(f) < \mathfrak{M}_r(f), \quad (6.7.6)$$

仍作同样之保留条件¹⁾.

先設 $r = 1$, $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{A}$. 且显然可假定 $\mathfrak{A}(f) > 0$.

盖由定理 150, 若 $t > 0$, $t \neq 1$, 有

$$\log t < t - 1. \quad (6.7.7)$$

由此即得

$$\log f - \log \mathfrak{A}(f) \leq \frac{f}{\mathfrak{A}(f)} - 1,$$

$$\mathfrak{A}(\log f) - \log \mathfrak{A}(f) \leq \frac{\mathfrak{A}(f)}{\mathfrak{A}(f)} - 1 = 0,$$

$$\log \mathfrak{G}(f) = \mathfrak{A}(\log f) \leq \log \mathfrak{A}(f).$$

等号只当 $f \equiv \mathfrak{A}(f)$ 时才能出現.

关于一般 r 的結果, 从 (6.6.3) 即可得出.

在定理 184 中, 我們曾把假設“若 $\mathfrak{A}(f)$ 为有限”, “若 $\mathfrak{M}_r(f)$ 为有限”明确地說出. 今后我們將如同 §§ 5.1 和 6.5 中所說明的那样, 按照我們的約定將这种假設省去以节省篇幅. 在不致引起混淆的时候, 我們也将用 $C, A, B, a, b, \dots$ 表示常数而不加說明. 在同一关系中出现两个 C 不一定是一样的.

我們現在添加两个系(定理 10 的推广).

185. $\mathfrak{G}(f) + \mathfrak{G}(g) < \mathfrak{G}(f + g)$, 除非 $Af \equiv Bg$, 其中 A, B 不同时为 0, 或 $\mathfrak{G}(f + g) = 0$.

我們可假定 $\mathfrak{G}(f + g) > 0$. 于是, 由定理 184, 有

$$\frac{\mathfrak{G}(f)}{\mathfrak{G}(f + g)} = \mathfrak{G}\left(\frac{f}{f + g}\right) \leq \mathfrak{A}\left(\frac{f}{f + g}\right).$$

1) 关于下述之証明, 可参考 F. Riesz[7].

將此種形式的兩個不定式相加，即得所要的結果。

更一般言之，有

$$186. \mathfrak{G}(f_1) + \mathfrak{G}(f_2) + \mathfrak{G}(f_3) + \cdots < \mathfrak{G}(f_1 + f_2 + f_3 + \cdots)$$

(此級數可以是有限或無限)，除非 $f_n \equiv c_n \sum f_n$ 或 $\mathfrak{G}(\sum f_n) = 0$ 。

6.8. 幾何平均的其它性質。 我們的下一個定理對應於定理 3 (關於正的 r)。

$$187. \text{若 } \mathfrak{M}_r(f) \text{ 對某些正的 } r \text{ 為有限, 則當 } r \rightarrow +0 \text{ 時, 有} \\ \mathfrak{M}_r(f) \rightarrow \mathfrak{G}(f). \quad (6.8.1)$$

我們應當看到，即使當 $\mathfrak{M}_r(f)$ 對所有的 $r > 0$ 皆為 ∞ 時， $\mathfrak{G}(f)$ 仍可為有限。例如，若 $f(x) = \exp(x^{-\frac{1}{2}})$ ， $q(x) = 1$ ，變程為 $(0, 1)$ ，情形就是這樣。

若 E 為一閉區間或閉集， f 為正且連續，則證明甚為顯然。在此種情形， $f \geq \delta > 0$ ， $\log f$ 為有界，且

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_r &= \int e^{r \log f} q \, dx = \int [1 + r \log f + O\{r^2 (\log f)^2\}] q \, dx \\ &= 1 + r \mathfrak{S} + O(r^2), \end{aligned}$$

$$\lim \log \mathfrak{M}_r = \lim \frac{1}{r} \log \{1 + r \mathfrak{S} + O(r^2)\} = \mathfrak{S}.$$

要把這種証法推廣到一般情形上去，當然存在着一些困難，但這種困難可避免如下¹⁾：由(6.7.6)和(6.7.7)，我們有

$$\begin{aligned} \log \mathfrak{G}(f) &\leq \log \mathfrak{M}_r(f) = \frac{1}{r} \log \mathfrak{U}(f^r) \\ &\leq \frac{1}{r} \{\mathfrak{U}(f^r) - 1\} = \int \frac{f^r - 1}{r} q \, dx. \end{aligned} \quad (6.8.2)$$

當 r 下降趨於 0 時， $(f^r - 1)/r$ 下降（由定理 36）且趨於極限 $\log f$ ，因之²⁾

$$\lim \frac{1}{r} \{\mathfrak{U}(f^r) - 1\} = \mathfrak{U}(\log f) = \log \mathfrak{G}(f), \quad (6.8.3)$$

1) F. Riesz[7]. 其它（不象這樣簡單的）證明曾由 Besicovitch, Hardy 和 Littlewood 給出；參考 Hardy[7].

2) 參看 § 6.3 (b) (ii).

右边可为有限或 $-\infty$ 。結合(6.8.2)和(6.8.3),我們可以看出

$$\log \mathfrak{G}(f) \leq \underline{\lim} \log \mathfrak{M}_r(f) \leq \overline{\lim} \log \mathfrak{M}_r(f) \leq \log \mathfrak{G}(f),$$

此即証明定理。

6.9. 关于积分的 Hölder 不等式。 其次,我們来考虑与定理 11—15 对应的关于积分方面的定理。我們現在最好是引进一个另外的定义,它使得我們可以縮短关于等号成立的情形的說明。若对函数 f, g , 存在两个不同时为 0 的常数 A, B , 使得 $Af \equiv Bg$, 則称此二函数为实际上成比例 (effectively proportional)。这一概念曾在定理 181 和 185 中出现。零函数与任何函数实际上成比例。若 $f, g, h, \dots$ 中任何两个实际上成比例, 則称它們为实际上成比例。

188. 若 $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ 为正, 且 $\alpha + \beta + \dots + \lambda = 1$, 則

$$\int f^\alpha g^\beta \dots l^\lambda dx < \left(\int f dx \right)^\alpha \left(\int g dx \right)^\beta \dots \left(\int l dx \right)^\lambda, \quad (6.9.1)$$

除非其中有一函数为 0, 或所有的函数实际上成比例。

設没有一个函数为 0, 則由定理 9, 有

$$\begin{aligned} \frac{\int f^\alpha g^\beta \dots l^\lambda dx}{\left(\int f dx \right)^\alpha \left(\int g dx \right)^\beta \dots \left(\int l dx \right)^\lambda} &= \int \left(\frac{f}{\int f dx} \right)^\alpha \left(\frac{g}{\int g dx} \right)^\beta \dots \left(\frac{l}{\int l dx} \right)^\lambda dx \\ &\leq \int \left(\frac{\alpha f}{\int f dx} + \frac{\beta g}{\int g dx} + \dots + \frac{\lambda l}{\int l dx} \right) dx = 1, \end{aligned}$$

除非

$$\frac{f}{\int f dx} \equiv \frac{g}{\int g dx} \equiv \dots \equiv \frac{l}{\int l dx},$$

否則不等号成立。

作为一个系¹⁾, 我們有

1) 比較 § 2.8.

189. 若 $k > 1$, 則

$$\int fg \, dx < \left(\int f^k \, dx \right)^{1/k} \left(\int g^{k'} \, dx \right)^{1/k'}, \quad (6.9.2)$$

除非 f^k 和 $g^{k'}$ 实际上成比例.

若 $0 < k < 1$ 或 $k < 0$, 則

$$\int fg \, dx > \left(\int f^k \, dx \right)^{1/k} \left(\int g^{k'} \, dx \right)^{1/k'}, \quad (6.9.3)$$

除非 (a) f^k 和 $g^{k'}$ 实际上成比例, 或 (b) fg 为 0.

定理的第二部分需要作一点說明. 先設 $0 < k < 1$, 并設 $\int g^{k'} \, dx$ 为有限, 因而 g 几乎处处为正. 于是, 若令 $l > \frac{1}{k}$ (因而 $l > 1$),

$$f = (uv)^l, \quad g = v^{-l},$$

因而

$$fg = u^l, \quad f^k = uv, \quad g^{k'} = v^{l'},$$

則 u 和 v 对几乎所有之 x 皆有定义, 且

$$\int uv \, dx < \left(\int u^l \, dx \right)^{1/l} \left(\int v^{l'} \, dx \right)^{1/l'}$$

或

$$\int f^k \, dx < \left(\int fg \, dx \right)^k \left(\int g^{k'} \, dx \right)^{1-k},$$

除非 $u^l, v^{l'}$ 实际上成比例, 或者 (也是一样) 除非 $f^k, g^{k'}$ 实际上成比例. 因 $\int g^{k'} \, dx$ 为有限且不为 0¹⁾, 此即 (6.9.3).

若 $\int g^{k'} \, dx = \infty$, 則

$$\left(\int g^{k'} \, dx \right)^{1/k'} = 0$$

(因 $k' < 0$). 因之, (6.9.3) 之右边为 0, 且不等号成立, 除非

1) $\int g^{k'} \, dx = 0$ 将隐含 $g^{k'} \equiv 0$, 因而 $g \equiv \infty$. 而由 § 6.2 之了解, 这种可能情况是排除在外的.

$\int fg dx = 0$ 或 fg 为 0.

当 $k < 0$, 则 $0 < k' < 1$, 証法本质上相同.

依照我們在 § 5.1 和 § 6.5 中所說, 这定理暗中包含着关于收敛和有限性的一个論断; 若所涉及的积分中有两个是有限, 則第三个亦为有限. 当其它两个积分为有限时則为有限的那个积分 当 $k > 1$ 时是 $\int fg dx$, 当 $0 < k < 1$ 时是 $\int f^k dx$, 当 $k < 0$ 时是 $\int g^{k'} dx$.

与定理 161 相应之定理是很重要的, 正如定理 161 一样, 它并不是前面定理之一直接推論.

190¹⁾. 若 $k > 1$, 且 fg 对于所有属于 $L^{k'}$ 之 g 皆属于 L , 則 f 属于 L^k .

我們先考虑 (a, b) 为有限 (或 mE 为有限) 之情形, 并設 $\int f^k dx = \infty$. 我們可以找出一个函数 f^* , 它 (1) 只取可列无限个值 a_i , 且 (2) 滿足 $f^* \leq f < f^* + \varepsilon$. 因由定理 13, f^k 不超过 $f^{*k} + (f - f^*)^k$ 之一常数倍, 故有 $\int f^{*k} dx = \infty$. 由是, 若 e_i 是使得 $f^* = a_i$ 之集, 則

$$\sum a_i^k e_i = \infty.$$

由定理 161, 取

$$a_i^k e_i = u_i^k, \quad b_i^{k'} e_i = v_i^{k'}, \quad a_i b_i e_i = u_i v_i,$$

可知存在一組 b_i , 使得 $\sum b_i^{k'} e_i$ 为收敛, 且 $\sum a_i b_i e_i = \infty$. 在 e_i (对于所有之 i) 中定义 $g(x) = b_i$, 則

$$\int g^{k'} dx = \sum b_i^{k'} e_i$$

为收敛, 但

1) F. Riesz [2].

$$\int f^* g \, dx = \sum a_i b_i e_i = \infty,$$

因而 $\int fg \, dx = \infty$, 与假设相违.

若积分是在一无限区间, 设为 $(0, \infty)$, 上取的, 令

$$x = \frac{t}{1-t},$$

则

$$\int_0^\infty fg \, dx = \int_0^1 FG \, dt, \quad \int_0^\infty f^k \, dx = \int_0^1 F^k \, dt, \quad \int_0^\infty g^{k'} \, dx = \int_0^1 G^{k'} \, dt,$$

其中

$$F(t) = (1-t)^{-2/k} f\left(\frac{t}{1-t}\right), \quad G(t) = (1-t)^{-2/k'} g\left(\frac{t}{1-t}\right).$$

于是定理又化为有限的情形.

191. 若 $k > 1$, 则 $\int f^k \, dx \leq F$ 之充要条件是 $\int fg \, dx$ 对所有使得 $\int g^{k'} \, dx \leq G$ 之 g 皆 $\leq F^{1/k} G^{1/k'}$.

由定理 189, 条件是必要的. 若条件满足, 则由定理 190, $\int f^k \, dx$ 为有限. 若 $\int f^k \, dx > F$, 我们可取 g , 使得 $g^{k'}$ 与 f^k 实际上成比例. 于是, 由定理 189,

$$\int fg \, dx = \left(\int f^k \, dx\right)^{1/k} \left(\int g^{k'} \, dx\right)^{1/k'} > F^{1/k} G^{1/k'}.$$

这一定理也可表达为: $\int f^k \, dx < F$ 之一充要条件是 $\int fg \, dx < F^{1/k} G^{1/k'}$, 只要 $\int g^{k'} \, dx \leq G$.

我们可以证明定理 191 而勿需求助于较为困难的定理 190. 若 $\int f^k \, dx > F$, 则对于充分大的 n , $\int (f)_n^k \, dx > F$. 于是, 选取实际上成比例的 g 与 $(f)_n^{k-1}$, 则有

$$\int fg \, dx \geq \int (f)_n g \, dx = \left(\int (f)_n^k \, dx \right)^{1/k} G^{1/k'} > F^{1/k} G^{1/k'},$$

而与定理的假设相违。

Banach^[1, pp. 85-86] 曾给出了定理 190 (以及与之相伴随的定理 161) 的另一证明。

用到定理 191 的一个例子将在 § 6.13 中出现, 即在证明定理 202 的时候; 在第九章中还有一些别的应用¹⁾。在 § 6.13 中, 定理 202 是用两种不同的方法证明的, 其中的一种, 明显的依赖于定理 191, 另一种则不用它, 而定理 191 在这一类证明中的逻辑地位也将在该处详细的加以阐明。

6.10. 平均 $\mathfrak{M}_r(f)$ 的一般性质。 我们现在将要证明一些定理, 其中包含 § 2.9 中一些定理的类似定理。这里所要研究的性质比在那里所研究的稍微复杂一些。同时, 我们还需要作一些另外的规定, 这样, 我们才能把它们彻底的表达清楚。我们先假定 $r > 0$; 对于这种情形所证明的定理, 加上我们关于 $\mathfrak{O}(f)$ 所证明的定理, 就将给出所要求的结果的实质。这样我们就能够比较概括的表达出关于一般 r 的结果, 而把大部分证明的细节留给读者。

192. 若 $0 < r < s$ 且 $\mathfrak{M}_s$ 为有限, 则

$$\mathfrak{M}_r < \mathfrak{M}_s,$$

除非 $f \equiv C$ 。

若 $r = s\alpha$, 因而 $0 < \alpha < 1$, 则由定理 188, 我们有

$$\begin{aligned} \int qf^r \, dx &= \int (qf')^\alpha q^{1-\alpha} \, dx < \left(\int qf' \, dx \right)^\alpha \left(\int q \, dx \right)^{1-\alpha} \\ &= \left(\int qf^s \, dx \right)^\alpha, \end{aligned}$$

除非 $qf' \equiv Cq$ 。因 $q > 0$, 此即所要的结果。

193. 若 $\mathfrak{M}_r$ 对每一 r 为有限, 则当 $r \rightarrow +\infty$ 时, $\mathfrak{M}_r \rightarrow \max f$ 。

1) 特别是在 §§ 9.3 和 9.7 (2) 中。

(i) 設 $\mu = \max f$ 为有限, 則 (a) $\mathfrak{M}_r \leq \mu$, (b) 在一正測度 ζ 之集 e 中有 $f > \mu - \varepsilon$, 因而有

$$\int_e q dx = \zeta > 0, \mathfrak{M}_r \geq (\mu - \varepsilon) \zeta^{1/r}, \liminf \mathfrak{M}_r \geq \mu - \varepsilon.$$

(ii) 設 $\max f = \infty$, 則对于任何 $G > 0$, 在一正測度之集 e 中有 $f > G$, 因而如前有 $\liminf \mathfrak{M}_r \geq G$.

由 (6.6.4), (6.6.5) 及定理 193 可知, 当 $r \rightarrow -\infty$ 时,

$$\mathfrak{M}_r \rightarrow \min f.$$

194. 若 $0 < s < \infty$, 且 $\mathfrak{M}_r$ 为有限, 則 $\mathfrak{M}_r$ 在 $0 < r < s$ 中为連續, 且当 $r = s$ 时为左連續. 若 $\mathfrak{M}_s = \infty$, 但 $\mathfrak{M}_r$ 当 $0 < r < s$ 时为有限, 則当 $r \rightarrow s$ 时, $\mathfrak{M}_r \rightarrow \infty$.

(i) 設 $\mathfrak{M}_r$ 为有限, 則

$$qf \leq q \max(1, f^s).$$

此乃一属于 L 类且与 r 无关的控制函数; 由 §6.3 (b) (i) 即得所要之結果¹⁾.

(ii) 設 $\mathfrak{M}_s = \infty$. 我們可选取 n , 使得

$$\int (qf^n)_n dx > G.$$

但 $(qf^n)_n$ 是 r 的一連續函数, 因而²⁾当 $r > s - \varepsilon$ 时, 有

$$\int (qf^n)_n dx > \frac{1}{2} G.$$

由是, $\int qf^n dx > \frac{1}{2} G$, 此即証明定理.

6.11. 平均 $\mathfrak{M}_r(f)$ 的一般性質(續). 在上节中, 我們主要是把注意力集中在 $r \geq 0$ 时之平均, 而証讀者自己从公式 (6.6.4) 和 (6.6.5) 去推导出关于負阶平均的相应結果. 在本节中, 我們將比較詳尽地考虑平均. 依据定理 187 和 193, 我們自然地可以写

$$\mathfrak{G}(f) = \mathfrak{M}_0(f), \max f = \mathfrak{M}_{+\infty}(f), \min f = \mathfrak{M}_{-\infty}(f). \quad (6.11.1)$$

$\mathfrak{M}_0(f)$ 可能无意义, 但只在对所有的 $r > 0$, $\mathfrak{M}_r(f) = \infty$ 和对所

1) 当 $r < s$ 时之連續性也可从定理 111 和 197 得出(参看 § 6.12).

2) 由 § 6.3 (b) (i).

有的 $r < 0$, $\mathfrak{M}_r(f) = 0$ 时才如此.

我們先来处理两种例外的情形.

(A) 若 $f \equiv C$, 則对所有之 r , $\mathfrak{M}_r = C$, 而这即使在极端情形 $C = 0$ 和 $C = \infty$ 时亦成立¹⁾.

(B) 我們可能有

$$\mathfrak{M}_r = 0 \ (r < 0), \mathfrak{M}_0 \text{ 无意义}, \mathfrak{M}_r = \infty \ (r > 0).$$

我們把这些情形排除在外. 然后我們就証讀者去証明下面(1)和(2)中之命題成立, 这些命題包含了异于(A)和(B)之所有情形.

(1) 当 $-\infty \leq r < s \leq \infty$ 时, $\mathfrak{M}_r < \mathfrak{M}_s$, 除非 (a) $\mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}_s = \infty$ (这只当 $r \geq 0$ 时才可能出现), 或 (b) $\mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}_s = 0$ (这只当 $s \leq 0$ 时才可能出现).

(2) 我們用 $\mathfrak{M}_{r-0}$ 和 $\mathfrak{M}_{r+0}$ 分別表示 $\mathfrak{M}_r$ 当 t 从下面和从上而趋于 r 时的极限(这总是存在的).

若 $r > 0$, 則 $\mathfrak{M}_{r-0} = \mathfrak{M}_r$, 且 $\mathfrak{M}_{r+0} = \mathfrak{M}_r$, 除了当 $\mathfrak{M}_r$ 为正且有限而 $\mathfrak{M}_t$ 对 $t > r$ 为 ∞ 的情形之外, 此时

$$\mathfrak{M}_{r+0} = \infty > \mathfrak{M}_r.$$

若 $r < 0$, 則 $\mathfrak{M}_{r+0} = \mathfrak{M}_r$, 且 $\mathfrak{M}_{r-0} = \mathfrak{M}_r$, 除了当 $\mathfrak{M}_r$ 为正且有限而 $\mathfrak{M}_t$ 对 $t < r$ 为 0 的情形之外, 此时

$$\mathfrak{M}_{r-0} = 0 < \mathfrak{M}_r.$$

若 $r = 0$, 則有例外情形出現, 其与上述之各个相对应. 若 $\mathfrak{M}_0$ 为 0 或 ∞ , 則或 (a) $\mathfrak{M}_{-0}$ 和 $\mathfrak{M}_{+0}$ 皆等于 $\mathfrak{M}_0$, 或 (b)

$$\mathfrak{M}_{-0} = \mathfrak{M}_0 = 0, \mathfrak{M}_{+0} = \infty$$

或

$$\mathfrak{M}_{-0} = 0, \mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_{+0} = \infty.$$

若 $\mathfrak{M}_0$ 为正且有限, 則 $\mathfrak{M}_{-0}$ 与 $\mathfrak{M}_{+0}$ 若仍为正且有限, 即等于 $\mathfrak{M}_0$; 但 $\mathfrak{M}_{-0}$ 亦可为 0, $\mathfrak{M}_{+0}$ 可为 ∞ .

最后, 我們沒有明确除外的各种可能性实际上都可能发生²⁾.

这些結果可以用

1) 严格說来, 根据 § 6.2 所作的了解, 第二种情形已排除在外.

2) 参考定理 231.

$$\mathfrak{L}_r = \log \mathfrak{M}_r$$

比較对称地和簡明地表达出来: 我們約定 $\log \infty = +\infty$, $\log 0 = -\infty$. 我們把与上述情形 (A) 和 (B) 相对应之情形除外:

(a) $f \equiv C$ (其中 C 可为 0 或 ∞), 此时对所有之 r , $\mathfrak{L}_r = \log C$;

(b) $\mathfrak{L}_0$ 无意义, 此时 $\mathfrak{L}_r$ 对 $r > 0$ 为 $+\infty$, 对 $r < 0$ 为 $-\infty$.

195. 除了刚才所說的情形之外, 使得 $\mathfrak{L}_r = \log \mathfrak{M}_r$ 为有限之 r 所成之集或为零集, 或为一閉集, 半閉集, 或开区間 I 或 (u, v) , 其中 $-\infty \leq u \leq v \leq \infty$, 它包含 $r = 0$ 这一点 (因而 $u \leq 0 \leq v$), 但其它方面則是任意的 (因而, 比如說, u 可为 $-\infty$, v 可为 $+\infty$, 或 u 和 v 可同时为 0). $\mathfrak{L}_r$ 对于 I 右边之 r 为 $+\infty$, 对于 I 左边之 r 为 $-\infty$.

在 I 中, $\mathfrak{L}_r$ 为連續且严格单增. 若 r 经过 I 内部之 r 趋于 I 之一端点, 則 $\mathfrak{L}_r$ 趋于 (有限的或无限的) 极限, 它等于其在該端点之值.

6.12. $\log \mathfrak{M}_r$ 之凸性. 在本节中 (正如在定理 17 中) 我們將假定 $r > 0$.

196. 若 $0 < r < s < t$, 且 $\mathfrak{M}_t$ 为有限, 則

$$\mathfrak{M}_s^r < (\mathfrak{M}_r)^{\frac{s-r}{s-r-1}} (\mathfrak{M}_t)^{\frac{s-r}{s-r-1}},$$

除非在 E 的一部分 $f \equiv 0$ 而在其余的一部分 $f \equiv C$.

証明所依据的是定理 188, 而且是定理 17 的証明之一类推. 对于对号出現的情形, 則应是

$$qf^r \equiv Cqf^s.$$

作为一系, 我們有

197. $\log \mathfrak{M}_r(f) = r \log \mathfrak{M}_1(f)$ 是 r 之一凸函数.

与定理 87 比較. 讀者若从定理 197 推出 $\mathfrak{M}_r$ 的連續性 (定理 194), 将会感到是有教益的.

6.13. 关于积分的 Minkowski 不等式. Minkowski 型的不等式是用实质上与 § 2.11 相同的方法导出的. 关于积分的

Minkowski 不等式的普通形式是

198. 若 $k > 1$, 則

$$\left\{ \int (f + g + \cdots + l)^k dx \right\}^{1/k} < \left(\int f^k dx \right)^{1/k} + \cdots + \left(\int l^k dx \right)^{1/k}, \quad (6.13.1)$$

若 $0 < k < 1$, 則

$$\left\{ \int (f + g + \cdots + l)^k dx \right\}^{1/k} > \left(\int f^k dx \right)^{1/k} + \cdots + \left(\int l^k dx \right)^{1/k}, \quad (6.13.2)$$

除非 $f, g, \cdots, l$ 实际上成比例.

当 $k < 0$ 时, 不等式 (6.13.2) 一般仍成立, 但存在第二种例外情形, 即不等式两边皆为 0 的情形.

我們从定理 189 推出这一定理很象从定理 13 推出定理 24. 因为等号出现的情形多少有些費解, 所以我們就把 (6.13.2) 的証明詳細写出.

若 $S = f + g + \cdots + l$, 則

$$\int S^k dx = \int f S^{k-1} dx + \int g S^{k-1} dx + \cdots + \int l S^{k-1} dx. \quad (6.13.3)$$

先設 $0 < k < 1$. 由定理 19, 有

$$S^k \leq f^k + g^k + \cdots + l^k.$$

因之, 若 $\int f^k dx, \cdots$ 为有限, 則 $\int S^k dx$ 为有限. 又 $\int S^k dx > 0$,

除非 $S \equiv 0$, 因而 $f, g, \cdots$ 全为 0. 因此我們可設 $\int S^k dx$ 为正且有限.

由定理 189,

$$\int f S^{k-1} dx > \left(\int f^k dx \right)^{1/k} \left(\int S^k dx \right)^{1/k'},$$

除非 (a) f^k 和 S^k 实际上成比例或 (b) $f S^{k-1} \equiv 0$. 因 $k - 1 < 0$, 且

S 几乎处处为有限, 故第二种情形只当 f 为 0 时才能发生, 而这样一来即化归前一种情形. 因之, 由(6.13.3)即得

$$\int S^k dx > \left\{ \left(\int f^k dx \right)^{1/k} + \cdots + \left(\int l^k dx \right)^{1/k} \right\} \left(\int S^k dx \right)^{1/k'}, \quad (6.13.4)$$

除非 $f, g, \cdots, l$ 实际上成比例. 由此即得所要的結論.

当 $k < 0$, 若 $\int S^k dx$ 为正且有限, 則可作同样之論証. 若 $\int S^k dx = 0$, 則因 $k < 0$, S 几乎处处为无穷, 因每一 f 皆几乎处处为有限, 此乃不可能者. 若 $\int S^k dx$ 为无穷, 則 (仍因 $k < 0$) $\int f^k dx, \cdots$ 皆为无穷, 且(6.13.2)之两边皆为 0. 这是在說明中所說的第二种除外情形, 它(比如說)当

$$f = g = \cdots = l = 0$$

在一正測度之集 E 上成立时即出現.

在定理 198 的敘述中, 我們曾經把 $k = 1$ 和 $k = 0$ 的情形排除在外. 前一情形是显而易見的, 而后一情形則包含在定理 186 之中. 我們詎讀者去把定理 198 敘述成一种与定理 24 相应的形式.

对应于定理 27, 我們有

199. 若 $k > 1$, 則

$$\int (f + g + \cdots + l)^k dx > \int f^k dx + \cdots + \int l^k dx, \quad (6.13.5)$$

若 $0 < k < 1$, 則

$$\int (f + g + \cdots + l)^k dx < \int f^k dx + \cdots + \int l^k dx, \quad (6.13.6)$$

除非对于所有之 x , $f, g, \cdots, l$ 中除了一个之外皆为 0. 若所有之 $f, g, \cdots, l$ 几乎处处皆为正, 則(6.13.6)对于 $k < 0$ 也成立.

定理 198 当 $k > 1$ 时是下述三个更一般性定理中第一个的一个特别情形, 在这三个定理中, 級数可为有限或无穷, 积分范围也是

任意的，我們只限于討論 $k > 1$ 的情形。一般言之，當 $k < 1$ 時不等式反号。

200. 若 $k > 1$ ，則

$$\left[\int \left\{ \sum f_m(x) \right\}^k dx \right]^{1/k} < \sum \left\{ \int f_m^k(x) dx \right\}^{1/k}, \quad (6.13.7)$$

除非

$$f_m(x) \equiv C_m \phi(x).$$

201. 若 $k > 1$ ，則

$$\left[\sum \left\{ \int f_n(x) dx \right\}^k \right]^{1/k} < \int \left\{ \sum f_n^k(x) \right\}^{1/k} dx, \quad (6.13.8)$$

除非

$$f_n(x) \equiv C_n \phi(x).$$

202. 若 $k > 1$ ，則

$$\left[\int \left\{ \int f(x, y) dy \right\}^k dx \right]^{1/k} < \int \left\{ \int f^k(x, y) dx \right\}^{1/k} dy, \quad (6.13.9)$$

除非

$$f(x, y) \equiv \phi(x)\psi(y).$$

在各定理中，在例外情形等号皆成立。

我們現在來考慮（比如說）定理 202（諸定理中最不初等的一个）。我們先就“ $\leq$ ”來證明定理。我們給出兩個證明，其中第一個我們求助于定理 191。在各個證明中出現的一序列等式和不等式皆按照下之意义來解釋：若任何等式或不等式之右边為有限，則左边亦然，且兩者是照所說相联系。積分次序之交換是依 Fubini 定理而成立。

令

$$J = J(x) = \int f(x, y) dy.$$

(i) 欲使

$$\int J^k dx \leq M^k, \quad (6.13.10)$$

由定理 191，其充要条件是

$$\int Jg \, dx \leq M \quad (6.13.11)$$

对于所有使得

$$\int g^{k'} \, dx \leq 1 \quad (6.13.12)$$

之 g 皆成立。但由定理 189 和 (6.13.12),

$$\begin{aligned} \int Jg \, dx &= \int g(x) \, dx \int f(x, y) \, dy \\ &= \int dy \left(\int g(x) f(x, y) \, dx \right) \leq \int dy \left(\int f^k(x, y) \, dx \right)^{1/k}. \end{aligned} \quad (6.13.13)$$

因之, 在 (6.13.10) 中我們可取

$$M = \int dy \left(\int f^k \, dx \right)^{1/k},$$

此即 (就 “ $\leq$ ”) 証明定理。

(ii) 若 $\int J^k \, dx = 0$, 則对于几乎所有之 x , $J = 0$, 因而 (对于几乎所有之 x) f 对于几乎所有之 y 为 0。因之, 根据 § 6.3 (d), $f(x, y) \equiv 0$ 。

由是我們可以假定 $\int J^k \, dx > 0$ 。我們暂时先假定 $\int J^k \, dx$ 为有限。于是

$$\begin{aligned} \int J^k \, dx &= \int J^{k-1} \, dx \int f \, dy \\ &= \int dy \int J^{k-1} f \, dx \leq \int dy \left\{ \left(\int f^k \, dx \right)^{1/k} \left(\int J^k \, dx \right)^{1/k'} \right\} \\ &= \left(\int J^k \, dx \right)^{1/k'} \int \left(\int f^k \, dx \right)^{1/k} dy, \end{aligned}$$

因而有

$$\left(\int J^k \, dx \right)^{1/k} \leq \int \left(\int f^k \, dx \right)^{1/k} dy. \quad (6.13.14)$$

此即 (6.13.9), 不过以 “ $\leq$ ” 代 “ $<$ ”。

在这証明中，我們假定了 $\int J^k dx$ 为有限，这是一个在証明 (i) 中沒有用到的假定。要想除去这一假定，我們必須用某些使得这一假定必然成立的函数去逼近 f 。例如可設积分是在一有限区間或具有有限測度之集上取的， $(f)_n$ 是依照 § 6.1 中所定义，以及

$$J_n = \int (f)_n dy.$$

于是， $\int J_n^k dx$ 必为有限，因而

$$\left(\int J_n^k dx \right)^{1/k} \leq \int \left\{ \left((f)_n^k dx \right)^{1/k} dy \right\} \leq \int \left(\int f^k dx \right)^{1/k} dy.$$

令 $n \rightarrow \infty$ ，由此即得(6.13.9)，不过以“ $\leq$ ”代“ $<$ ”。

(i) 和 (ii) 中之証法本質上都是同一性質的，(i) 中任意的 g 的作用在 (ii) 中由定积分

$$g = \frac{J^{k-1}}{\left(\int J^k dx \right)^{1/k'}}$$

来表現，若 $\int J^k dx$ 为有限，它即滿足(6.13.12)。利用这一特別的 g ，我們即避免了求助于一个相当不簡單的一般性定理，但却另外增加了一些复杂性。当我们运用定理 191 时，也会出现类似的情况。

留待討論的就是(6.13.9)中等号何时出現的問題。若¹⁾

$$\int Jg dx < M$$

对于所有滿足(6.13.12)的 g 皆成立，則在

$$\int dy \left(\int gf dx \right) \leq \int dy \left\{ \left(\int f^k dx \right)^{1/k} \left(\int g^{k'} dx \right)^{1/k'} \right\}$$

中不等式成立，除非对于几乎所有之 y ， f^k 与 $g^{k'}$ 实际上成比例；换言之，除非(对于几乎所有之 y)对于几乎所有之 x ，

$$\rho(y)f^k(x, y) = \sigma(y)g^{k'}(x), \quad (6.13.15)$$

1) 参考 § 6.9 最后的說明。

其中 $\rho^2 + \sigma^2 > 0$. 若对于一个使得 (6.13.15) 成立之 y , $\rho(y)$ 为 0, 则 $g(x)$ 必为 0, 此乃不可能者. 因之, 在 (6.13.15) 中, $\rho(y) > 0$, 因而

$$f(x, y) = \phi(x)\psi(y),$$

其中 $\phi = g^{k'/k}$, $\psi = (\sigma/\rho)^{1/k}$. 对于几乎所有之 y , 这方程对于几乎所有之 x 成立, 因之, 由 § 6.3 (d), 对于几乎所有之 x, y 成立.

定理 200 和 201 的证明可用类似的方法得出. 例如, 在证明定理 201 时, 我们令

$$J_n = \int f_n dx,$$

然后论证如下. 欲使 $\sum J_n^k < M^k$, 由定理 15¹⁾, 其充要条件是: 只要 $\sum b_n^{k'} \leq 1$, 则 $\sum b_n J_n < M$. 又

$$\begin{aligned} \sum b_n J_n &= \sum b_n \int f_n dx = \int (\sum b_n f_n) dx \\ &\leq \int dx (\sum f_n^k)^{1/k} (\sum b_n^{k'})^{1/k'} \leq \int (\sum f_n^k)^{1/k} dx; \end{aligned}$$

等等. 积分号下求和可由 § 6.3 (b) 之 (ii) 证明其成立.

定理 26 的类似定理是

203. 若 $0 < r < s$, 则

$$\mathfrak{M}_r^{(y)} \mathfrak{M}_r^{(x)} f(x, y) < \mathfrak{M}_r^{(x)} \mathfrak{M}_s^{(y)} f(x, y),$$

除非 $f(x, y) \equiv \phi(x)\psi(y)$.

关于一个明显的证明, 可参考 Jessen[1].

6.14. 与一任意函数有关的平均值. 存在一个包含一任意函数的积分平均值的理论, 它与第三章中所论者类似. 在这里, 我们打算把它详细的叙述出来, 因为这样做, 就将把我们已经说过的东西以稍微不同的形式作一次大量的重复. 我们只限于证明定理 95 的一个类似的定理²⁾.

1) 推广到无穷级数.

2) 第三章中一些定理的类似定理将在本章末了的各种定理中叙述. 其中一些定理的近一步处理可以在 Jessen 的 [2] 与 [3] 中找到. 这两篇论文的不少内容, 经过适当的修改, 已写入第三章中.

204. 設 $\alpha \leq f(x) \leq \beta$, 其中 α 和 β 可以是有限的或无限的; $f(x)$ 几乎处处异于 α 和 β ; 积分范围和权函数 $p(x)$ 满足 § 6.6 中之条件; $\phi''(t)$ 在 $\alpha < t < \beta$ 中为正且有限. 則

$$\phi\left(\frac{\int fp \, dx}{\int p \, dx}\right) \leq \frac{\int \phi(f)p \, dx}{\int p \, dx}, \quad (6.14.1)$$

只要右边存在且为有限; 等号只当 $f \equiv C$ 时成立.

可能有 $\int fp \, dx = \infty$ 或 $\int fp \, dx = -\infty$; 这时 (6.14.1) 仍然成立, 只要按照正規的方式来理解. 不可能 (当这右边为有限时) 出現 $\int fp \, dx$ 不存在的情况, 亦即 $\int f^+ p \, dx = \infty$ 和 $\int f^- p \, dx = -\infty$ 的情况. 因为在这种情形, $\alpha = -\infty$, $\beta = \infty$, 而 $\phi(f)$ 作为非常数的凸函数, 对于 f 的正的大值或負的大值必趋于无穷¹⁾, 其速度至少是 $|f|$ 的一个倍数, 因之, $\int \phi(f)p \, dx$ 不可能存在且为有限.

我們現取 $p = q$, $\int q \, dx = 1$, 并先設 $\mathfrak{M} = \int fq \, dx$ 为有限. 若 $f \neq C$, 則 $\alpha < \mathfrak{M} < \beta$. 又由假定, 对于几乎所有之 x , f 为有限, 且 $\alpha < f < \beta$; 因之, 对于几乎所有之 x ,

$$\phi(f) = \phi(\mathfrak{M}) + (f - \mathfrak{M})\phi'(\mathfrak{M}) + \frac{1}{2}(f - \mathfrak{M})^2\phi''(\mu),$$

其中 μ 位于 f 和 $\mathfrak{M}$ 之間, 因而 $\alpha < \mu < \beta$. 由是,

$$\int \phi(f)q \, dx \geq \phi(\mathfrak{M}),$$

此即 (6.14.1). 等号仅当 $(f - \mathfrak{M})^2\phi''(\mu) \equiv 0$ 时成立; 但 $\alpha < \mu < \beta$, 因而对于几乎所有之 x , $\phi''(\mu) > 0$. 故此时有 $f \equiv \mathfrak{M}$.

其次, 我們假定 (比如說) $\int fq \, dx = \infty$, 因而 $\beta = \infty$. 于是, 根据已經証明的, 有

1) 参考定理 126.

$$\phi \left\{ \int (f)_n q \, dx \right\} \leq \int \phi \{ (f)_n \} q \, dx.$$

因 $\phi(f)$ 对于大的 f 为連續且單調, 故右边的积分趋于 $\int \phi(f) q \, dx$, 而左边的則趋于 $\phi(\infty)$. 因之, $\phi(\infty)$ 为有限, 故 ϕ 为单降, 且

$$\phi(\infty) < \phi(f).$$

由是可知,

$$\phi(\infty) = \phi(\infty) \int q \, dx \leq \int \phi(f) q \, dx,$$

等号只当 $\phi(f) \equiv \phi(\infty)$ 成立, 而此种可能性我們业已排除在外. $\int f q \, dx = -\infty$ 的情形可同法討論.

(6.14.1) 的左边可能等于 $-\infty$. 讀者若去驗證一下我們曾考虑过的各种情况全都可能出現, 将会感到是有教益的.

若取 $\phi(t) = -\log t$, 則得

$$\exp \left(\int q \log f \, dx \right) \leq \int q f \, dx,$$

即 $\mathfrak{G}(f) \leq \mathfrak{U}(f)$ (定理 184). 若取 $\phi = t^r$, 我們又重新回到 Hölder 不等式, 用类似于 § 3.11 的方法, 我們还可造出另外的例子. 若取 $\phi(t) = t \log t$, 則得

$$205. \quad \frac{\int p f \, dx}{\int p \, dx} < \exp \left(\frac{\int p f \log f \, dx}{\int p f \, dx} \right),$$

除非 $f \equiv C$.

我們可將定理 204 的結果(除了关于等号出現情形的叙述)推广到任何連續凸函数 ϕ 上去.

206. 当 $\phi(t)$ 在 $\alpha < t < \beta$ 中为連續且凸时, 不等式 (6.14.1) 成立.

依据 § 3.19, 我們有

$$\phi(f) \geq \phi(\mathfrak{M}) + \lambda(f - \mathfrak{M}),$$

其中 λ 是 $\phi(t)$ 在 $t = \mathfrak{M}$ 点的左导数和右导数之間的任何数. 由

是,

$$\int \phi(f)q \, dx \geq \phi(M),$$

此即(6.14.1).

Stieltjes 积分

6.15. Stieltjes 积分的定义. 直到現在,我們是把級数和积分分开討論的,而所有的基本定理則以對偶形式出現;例如 Hölder 不等式就是包含在定理 13 和 189 之中的. 一件很自然的事情就是把这些定理作一種推广,使得它們統一在一个定理之中. 利用 Stieltjes 积分,我們即可达到这一目的.

設 $\phi(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 中为(广义)单增, $\phi(a) = \alpha$, $\phi(b) = \beta$. 我們假定 α 和 β (但不必是 a 和 b) 为有限¹⁾. 曲綫

$$y = y(x) = \phi(x)$$

是一上升函数,它可能具有可列无限多个普通不連續点,或可列无限多个不变区間(即函数在其中等于常数之区間). 逆函数

$$x = x(y) = x(\phi)$$

除了(a)在与 ϕ 的不連續点 $x = \xi$ 相对应的 y 的区間 (y_1, y_2) 內和(b)对于与 ϕ 的不变区間相对应的 y 值之外,唯一定义. 若我們約定 (y_1, y_2) 是 $x(y)$ 的一不变区間, $x(y)$ 在其中取值 ξ , 則 $x(y)$ 除了对于值(b)之外皆有定义,而且对于使之有定义之 y 值,是 y 的一单增函数. 最后,我們来完成 $x(y)$ 的定义使之成为 y 的一个单增函数,即对于(b)中之一 y 值,我們賦以 $x(y)$ 以該不变区間中的任一 x 值. 这种 y 值是可列的,在其中任何一个之中,我們如何选取 $x(y)$, 对于我們下述的定义并无影响.

我們現在定义 $f(x)$ 关于 $\phi(x)$ 的 Stieltjes 或 Lebesgue-Stieltjes 积分

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) \, d\phi(x) = \int_a^b f(x) \, d\phi$$

1) 若(例如) $b = \infty$, 則 $\beta = \lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x)$.

如下:

$$\int_a^b f(x) d\phi = \int_a^b f\{x(\phi)\} d\phi, \quad (6.15.1)$$

只要右边的积分作为一 Lebesgue 积分存在¹⁾.

(6.15.1)的定义属于 Radon[1],它把 Stieltjes 积分的理論化为 Lebesgue 积分的理論,因此我們可以想到不会有新的困难发生.关于 Stieltjes 积分的这一定义和較老的定义的充分討論,可参考 Hobson [1], Lebesgue [1], Pollard [1], Young [7].

我們可以用同样方法来定义

$$\int_E f(x) d\phi,$$

其中 ϕ 是一单增函数, E 是 x 之值所成之一集合,就是說,我們把它定义作

$$\int_E f(x) d\phi = \int_{\mathcal{E}} f\{x(\phi)\} d\phi,$$

其中 $\mathcal{E}$ 是与 E 相对应的 ϕ 值所成之集.我們必須假定 $\mathcal{E}$ 为可測.积分

$$\int_E d\phi$$

是 ϕ 在 E 上的变差.

6.16. Stieltjes 积分的特別情形. 最簡單的情形如下:

(a) $\phi = x$. 在此种情形, Stieltjes 积分即化为尋常的 Lebesgue 积分.

(b) ϕ 是一积分. 在此种情形,

$$\int_a^b f(x) d\phi = \int_a^b f(x) \phi'(x) dx.$$

(c) ϕ 是一有限步增加的阶梯函数.

1) 若 g 是任一有界变差函数,則 $g = \phi - \psi$, 其中 ϕ 和 ψ 是单增函数. 我們可定义 f 关于 g 的 Stieltjes 积分如

$$\int f dg = \int f d\phi - \int f d\psi.$$

我們在这里并不需要这一較一般的定义.

設 $a = a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$, 在 $a_k < x < a_{k+1}$ 中, $\phi(x) = a_k$, 其中 $a_k < a_{k+1}$; 又設當 $1 < k < n$ 時, $\phi(a_k)$ 取任何一個能保證 ϕ 為單增的值, 則 $x(y)$ 是一階梯函數, 取值 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 且

$$\begin{aligned} \int_a^b f d\phi &= \int_a^b f\{x(\phi)\} d\phi \\ &= (a_1 - a)f(a_1) + (a_2 - a_1)f(a_2) + \cdots \\ &\quad + (a_{n-1} - a_{n-2})f(a_{n-1}) + (\beta - a_{n-1})f(a_n) \\ &= \sum \rho_k f(a_k), \end{aligned} \quad (6.16.1)$$

其中 ρ_k 是 ϕ 在 $x = a_k$ 處的跳躍。顯而易見, 任何有限和皆可表成一 Stieltjes 積分; 例如

$$\sum_1^n u_k = \int f(x) d\phi,$$

其中 ϕ 是一在 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 處具有單位跳躍的階梯函數, $u_k = f(a_k)$ 。

(d) 這些想法立刻就可推廣到具有無限多個不連續點的階梯函數上去, 此時 Stieltjes 積分是就所有不連續點求和的級數 $\sum \rho_k f(a_k)$ 。任何收斂的無窮級數皆可用這一方法表示為一 Stieltjes 積分。

6.17. 前面一些定理的推廣。 現在很清楚, 所有的基本定理皆可立刻推廣到 Stieltjes 積分上去, 而且這樣得到的定理包含了關於 Lebesgue 積分和關於和數所得到的定理。下節中我們將敘述其中最具有代表性的定理。我們將要用到兩個預備性的說明。

(1) 當 Stieltjes 積分寫成一 Lebesgue 積分時, 積分變數為 ϕ 。等號成立的條件總是 $f \equiv g$ 或除了一個 0 測度之集外 $f = g$ 的形式。在我們的新定理中, 除外之集則是就 ϕ 而言測度為 0 之集, 而當我們將這一概念再用 x 來表達時, 它則變為“在 x 值所成之集中, ϕ 之變差為 0 者”, 換言之, 即這樣的一個集 E , 它使得與之相應的 ϕ 值做成一 0 集者。關於等號成立之條件也必須按照這一意義來解釋。例如“ f 與 g 實際上成比例”, 意即除了 ϕ 在其上之變

差为 0 的那些点之外,有

$$Af \equiv Bg,$$

其中 A 与 B 为不同时为 0 之常数。我們要注意, 这样的一个除外之集不可能包含 $\phi(x)$ 的所有不連續点。

同样的情况也出現于 $\max f$ 和 $\min f$ 的定义之中, 例如 $\max f$ 乃是这样的 ξ 中之最大者, 即对于任一正的 ε , $f > \xi - \varepsilon$ 在一个使得 ϕ 于其上之变差为正之集上成立者。

(2) 有許多不等式 “ $X < Y$ ” 对于 Lebesgue 积分成立, 可是它們对于 Stieltjes 积分的类似不等式則仅以 “ $\leq$ ” 成立。例如, 設积分系就 $(0, \infty)$ 而取者, 又設 $\int f dx = 1$, 則由定理 181, 有

$$\left(\int x f dx \right)^2 < \int f dx \int x^2 f dx = \int x^2 f dx, \quad (6.17.1)$$

除非 $x^2 f \equiv C f$ 或 $x^2 \equiv C$, 而这是不成立的, 故 (6.17.1) 在任何情况皆成立。在相应的关于 Stieltjes 积分的定理中, 我們有 $\int d\phi = 1$, 且

$$\left(\int x d\phi \right)^2 \leq \int d\phi \int x^2 d\phi = \int x^2 d\phi. \quad (6.17.2)$$

在 (6.17.2) 中, 若 $x^2 \equiv C$, 則等式成立, 換言之, 若 x 除一个使得 ϕ 于其上之变差为 0 之集外为一常数, 或者也就是說, 若 ϕ 是一个只在一点发生跳跃之阶梯函数, 則等式成立。例如若 ϕ 在 $0 \leq x < 1$ 中为 0, 当 $x \geq 1$ 时为 1, 則

$$\left(\int x d\phi \right)^2 = 1 = \int x^2 d\phi.$$

6.18. 平均 $\mathfrak{M}_r(f; \phi)$. 令

$$\mathfrak{M}_r(f) = \mathfrak{M}_r(f; \phi) = \left(\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f^r d\phi \right)^{1/r} = \left(\frac{\int f^r d\phi}{\int d\phi} \right)^{1/r} \quad (r \neq 0),$$

$$\mathfrak{M}(f; \phi) = \mathfrak{M}_1(f; \phi),$$

$$\mathfrak{G}(f; \phi) = \exp \left(\frac{\int \log f d\phi}{\int d\phi} \right) = \mathfrak{M}_0(f; \phi).$$

在这些定义中，我們先假定所出現之积分皆为有限。若 $\int f d\phi = \infty$ ，我們約定（根据 § 6.6 之規定）当 $r > 0$ 时 $\mathfrak{M}_r = \infty$ ，当 $r < 0$ 时 $\mathfrak{M}_r = 0$ 。在 §§ 5.2 和 6.7 中所討論之問題，由于 $\mathfrak{G}$ 之定义，在这里自然也出現。

与定理 183, 184, 187, 189, 192, 193, 197, 198 相应的那些定理，陈述如下：为叙述簡單起見，我們假定 $r > 0$ 。

207. $\min f < \mathfrak{M}_r(f) < \max f$ ，除非 $f \equiv C$ 。

208. $\mathfrak{G}(f) < \mathfrak{M}_r(f)$ ，特別， $\mathfrak{G}(f) < \mathfrak{M}(f)$ ，除非 $f \equiv C$ 。

209. 若 $\mathfrak{M}_r(f)$ 对某些 r 为有限，則当 $r \rightarrow +0$ 时 $\mathfrak{M}_r(f) \rightarrow \mathfrak{G}(f)$ 。

210. 若 $k > 1$ ，則

$$\int uv d\phi < \left(\int u^k d\phi \right)^{1/k} \left(\int v^{k'} d\phi \right)^{1/k'},$$

除非 u^k 与 $v^{k'}$ 事实上成比例。除了当 u^k 与 $v^{k'}$ 事实上成比例，或左边为 0（在此种情形，右边亦为 0）外，当 $0 < k < 1$ 或 $k < 0$ 时，不等式反号。

此即 Hölder 不等式；自然也有与定理 11（或 10）及 188 相应的推广。

211. 若 $r < s$ ，則 $\mathfrak{M}_r(f) < \mathfrak{M}_s(f)$ ，除非 $f \equiv C$ 。

212. 若 $\mathfrak{M}_r(f)$ 对每一正 r 皆为有限，則当 $r \rightarrow +\infty$ 时， $\mathfrak{M}_r(f) \rightarrow \max f$ 。

213. $\log \mathfrak{M}_r(f)$ 是 r 的一凸函数。

214. 若 $k > 1$ ，則

$$\left\{ \int (u + v)^k d\phi \right\}^{1/k} < \left(\int u^k d\phi \right)^{1/k} + \left(\int v^k d\phi \right)^{1/k},$$

除非 u 与 v 事实上成比例。若 $0 < k < 1$ ，或 $k < 0$ ，不等式一般

反号¹⁾.

平均值的公理处理

6.19. 分布函数. 在第三章中, 我們直接定义了平均值

$$\mathfrak{M}_\phi = \mathfrak{M}_\phi(a, q) = \phi^{-1}\{\sum q\phi(a)\},$$

然后从定义导出了它的特征性质. 在这里, 我們將把这一过程反过来, 而是給出了第 72 頁中約定的“公理”处理. 这在使用 Stieltjes 积分的記号时来得較为方便, 也正是为了这一原因, 我們才把这一討論保留到現在. 但我們所用的 Stieltjes 积分实际上全是有限和.

下面我們將討論一种特殊类型的、对所有实 x 皆有定义的阶梯函数, 这我們称之为有限阶梯函数. 我們称 $F(x)$ 为一有限阶梯函数, 假若

(i) 它一段段为常数, 且只有有限个不連續点;

(ii) 它从 0 增加(就广义而言)到 1, 因而

$$F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1;$$

(iii) 对所有之 x , $F(x) = \frac{1}{2} \{F(x-0) + F(x+0)\}$.

在点 a 具有跳跃 q 的一分布函数可以认为是包含在 $\mathfrak{M}_\phi(a)$ 中的值 a 和权 q 的一个表示. 这种函数中最簡單的是

$$E(x) = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{sgn} x),$$

它在 $x = 0$ 点有唯一的跳跃. 若我們令

$$E_\xi(x) = E(x - \xi),$$

則

$$F(x) = \sum q E_a(x) \quad (6.19.1)$$

是一般的在 a 点具有跳跃 q 的有限阶梯函数, 其中

$$a = a_\nu, q = q_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots, n), \sum q_\nu = 1, \\ a_1 < a_2 < \dots < a_n.$$

1) 我們把除外情形的詳細描述留給讀者.

又有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dF(x) = \sum q\phi(a), \quad (6.19.2)$$

而平均值(3.1.3)則可写成

$$\mathfrak{M}_{\phi}[F] = \phi^{-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dF(x)\right). \quad (6.19.3)$$

任何有限阶梯函数皆为当 $x < A$ 时为 0, 当 $x > B$ 时为 1 的形状, A 与 B 是和 F 有关的有限数. 下面我們將把注意力集中于这种函数的一个子类, 即对于一对固定的 A 和 B , 满足

$$F(x) = 0 \ (x < A), \ F(x) = 1 \ (x > B) \quad (6.19.4)$$

的这种有限阶梯函数所成之类. 在这种情况下, 我們称 F 属于 $\mathfrak{D}(A, B)$.

若 $\phi(x)$ 在閉区間 (A, B) 中为連續且严格单調, 則由(6.19.3), $\mathfrak{M}_{\phi}[F]$ 对于 $\mathfrak{D}(A, B)$ 中所有之 F 皆有定义. (A, B) 以外的 $\phi(x)$ 之值实际上并不包含在(6.19.3)之中, 因而我們可以随意加以选择; 比較自然的是选取它們使得 $\phi(x)$ 对于 $-\infty \leq x \leq \infty$ 为連續且严格单調.

6.20. 平均值的特征化. 我們的目的是要証明下之定理.

215. 設对应于 $\mathfrak{D}(A, B)$ 中之每一 F , 有唯一的实数 $\mathfrak{M}[F]$, 具有下之性質:

1) $\mathfrak{M}[E_{\xi}(x)] = \xi \ (A \leq \xi \leq B);$

2) 若 F_1 与 F_2 属于 $\mathfrak{D}(A, B)$, 又对所有之 x , $F_1 \geq F_2$, 且对某一 x , $F_1 > F_2$, 則

$$\mathfrak{M}[F_1] < \mathfrak{M}[F_2];$$

3) 若 F, F^*, G 属于 $\mathfrak{D}(A, B)$, 且

$$\mathfrak{M}[F] = \mathfrak{M}[F^*],$$

則对 $0 < t < 1$, 有

$$\mathfrak{M}[tF + (1-t)G] = \mathfrak{M}[tF^* + (1-t)G].$$

則有一在閉区間 (A, B) 上为連續且严格单增之函数 $\phi(x)$, 使得

$$\mathfrak{M}[F] = \mathfrak{M}_\phi[F] = \phi^{-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dF(x) \right). \quad (6.20.1)$$

反之,若 $\mathfrak{M}[F]$ 是就一个具有所述性质的 $\phi(x)$ 而由 (6.20.1) 定义, 则它满足 1), 2), 3), 因而这些条件对于将 $\mathfrak{M}[F]$ 表成 (6.20.1) 之形式是充分和必要的¹⁾.

我们先来证明定理的逆部分. 若 $\mathfrak{M}[F]$ 是由 (6.20.1) 定义, 则它显然具有性质 1). 它之具有性质 3), 几乎也是显而易见的, 盖

$$\begin{aligned} \phi(\mathfrak{M}[tF + (1-t)G]) &= t \int \phi dF + (1-t) \int \phi dG \\ &= t \int \phi dF^* + (1-t) \int \phi dG = \phi(\mathfrak{M}[tF^* + (1-t)G]). \end{aligned}$$

尚须证明 2).

设 F_1 和 F_2 满足所述之条件, 则有一正数 μ 和一区间 (α, β) , 使得在 (α, β) 中有²⁾

$$F_1(x) > F_2(x) + \mu > F_2(x).$$

因之,

$$\begin{aligned} \phi(\mathfrak{M}[F_2]) - \phi(\mathfrak{M}[F_1]) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi dF_2 - \int_{-\infty}^{\infty} \phi dF_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (F_1 - F_2) d\phi^3 \geq \int_{\alpha}^{\beta} (F_1 - F_2) d\phi \\ &\geq \mu \{ \phi(\beta) - \phi(\alpha) \} > 0. \end{aligned}$$

6.21. 关于特征性质的说明. 我们还须证明, 性质 1)–3) 足以刻划平均 $\mathfrak{M}_\phi$. 我们先就这些性质的“意义”作一些一般性的说明.

1) 参考 Nagumo[1], Kolmogoroff[1], de Finetti[1]. 我们是依据 de Finetti 的证明路綫.

2) 存在一 x_0 , 使得 $F_1(x_0) > F_2(x_0)$, 或

$$\frac{1}{2} \{ F_1(x_0 - 0) + F_1(x_0 + 0) \} > \frac{1}{2} \{ F_2(x_0 - 0) + F_2(x_0 + 0) \}.$$

因之, 或 $F_1(x_0 - 0) > F_2(x_0 - 0)$, 或 $F_1(x_0 + 0) > F_2(x_0 + 0)$. 在前一情形, 有一满足条件之区间在 x_0 之左边, 在后一情形, 有一在 x_0 之右边.

3) 假若我们回忆一下在 § 6.19 末关于 $\phi(x)$ 在 (A, B) 之外的定义所作之了解.

(i) 1) 謂, “若一集中所有之元素皆具有同一数值, 則它們的平均也具有該值”;

(ii) 2) 謂, “ $\mathfrak{M}[F]$ 是 F 的一个严格单調泛函”. 若謂 (在所說条件之下) $\mathfrak{M}[F_1] \leq \mathfrak{M}[F_2]$, 即 “ $\mathfrak{M}[F]$ 是一单調泛函”, 那将会是不够的.

我們現來討論一些例子.

(a) 算术平均

$$\mathfrak{A}(a, q) = \sum q a = \int x dF = \mathfrak{A}[F]$$

是 F 的一个严格单調泛函. 在此种情形, $\phi(x) = x$.

(b) 我們可以定义 “ $\max a$ ” 为 “使得 $F(x) = 1$ 的 x 的下界” (F 为任意一个有限阶梯函数, 其跳跃点即是諸 a). 則 $\max a = \mu[F]$ 是 F 的一个泛函, 它显为单調: 若 $F_1 \geq F_2$ 对所有之 x 成立, 則 $\mu[F_1] \leq \mu[F_2]$. 但 $\mu[F]$ 并不是严格单調: 若 F_1 与 F_2 由下式定义:

$$F_1 = F_2 = 0 (x < 0); F_1 = \frac{1}{2}, F_2 = 0 (0 < x < 1);$$

$$F_1 = F_2 = 1 (x > 1),$$

則

$$\mu[F_1] = \max(0, 1) = \max(1, 1) = \mu[F_2].$$

至于 $\mu[F]$ 之不能表成 (6.20.1) 之形式, 这由定理本身即可得出; 若其可能, 則即为严格单調.

(c) 几何平均 $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(a, q)$ 是 F 的一个泛函, 它不是严格单調的, 因为 (比如說) 集合 $(0, a_2, \dots)$ 和 $(0, b_2, \dots)$ 具有同样的 $\mathfrak{G}$. 它可表成公式

$$\mathfrak{G} = \exp \left(\int_0^\infty \log x dF(x) \right).$$

这属于 (6.20.1) 的形式, 其中之 $\phi(x) = \log x (x > 0)$; 但 $\mathfrak{G}$ 不能以定理中所述的方式表出, 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\log x \rightarrow -\infty$.

(iii) 若我們用 3) 两次, 第二次是以 $F^*, G, G^*, 1-t$ 代 G, F, F^*, t , 我們可以看出, 只要 $\mathfrak{M}[F] = \mathfrak{M}[F^*]$ 和 $\mathfrak{M}[G] =$

$\mathfrak{M}[G^*]$, 則

$$\mathfrak{M}[tF + (1-t)G] = \mathfrak{M}[tF^* + (1-t)G^*]. \quad (6.21.1)$$

換言之, (a) $\mathfrak{M}[tF + (1-t)G]$ 是由 $\mathfrak{M}[F]$, $\mathfrak{M}[G]$ 与 t 唯一決定.

更一般言之, 若 $\mathfrak{M}[F_\nu] = \mathfrak{M}[F_\nu^*]$ 且 $\sum q_\nu = 1$, 則

$$\mathfrak{M}[\sum q_\nu F_\nu] = \mathfrak{M}[\sum q_\nu F_\nu^*]. \quad (6.21.2)$$

泛函 $\mathfrak{F}[F]$ 当

$$\mathfrak{F}[tF + uG] = t\mathfrak{F}[F] + u\mathfrak{F}[G]$$

时称为綫性的; 在此种情形, 它必然具有性質 (a). 若 $\mathfrak{M}[F]$ 滿足 (a) 或 3) ((a) 是 它的一个推論), 我們可称 $\mathfrak{M}[F]$ 为拟綫性的 (quasilinear). 假若我們又同意把性質 1) 用共存 (consistency) 来描繪 (这样做是較自然的), 則定理 215 可簡括的敘述如下: F 的最一般的共存的、严格单增的、拟綫性的泛函就是由 (6.20.1) 所定义的泛函.

6.22. 完成定理 215 的証明. 函数 $E_A(x)$, $E_B(x)$ 和 $(1-t)E_A(x) + tE_B(x)$ 皆属于 $\mathfrak{D}(A, B)^1$, 其中 $0 < t < 1$. 令

$$\phi(t) = \mathfrak{M}[(1-t)E_A + tE_B],$$

因而

$$\phi(0) = \mathfrak{M}[E_A] = A, \quad \phi(1) = \mathfrak{M}[E_B] = B.$$

我們現暫時假定 $\phi(t)$ 是严格单增且連續, 則 $\phi(t)$ 具有逆函数

$$\phi(u) = \phi^{-1}(u).$$

它也是連續函数, 而且当 u 从 A 增到 B 时, 它从 0 严格增到 1. 若

$$u = \phi(t), \quad t = \phi(u),$$

則

$$\mathfrak{M}[E_u] = u = \phi(t) = \mathfrak{M}[(1-\phi(u))E_A + \phi(u)E_B].$$

因之, 利用 3) 之推广了的形式 (6.21.2), 以及对于任何有限阶梯函数 F 之表达式 (6.19.1), 則得

1) E_A 和 E_B 皆是 $\mathfrak{D}(A, B)$ 中函数的极端情形: 若 F 属于 $\mathfrak{D}(A, B)$, 則对所有之 x , $E_A \geq F \geq E_B$.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}[F] &= \mathfrak{M}[\sum q E_a] \\
&= \mathfrak{M}[\sum q \{(1 - \phi(a))E_A + \phi(a)E_B\}] \\
&= \mathfrak{M}[(1 - \sum q\phi(a))E_A + (\sum q\phi(a))E_B] \\
&= \phi(\sum q\phi(a)) = \phi^{-1}(\sum q\phi(a)).
\end{aligned}$$

此即定理之結果。

我們要注意，在这里， $\phi(A) = 0$ ， $\phi(B) = 1$ 。当一 ϕ 已經找到时，(根据定理 83)它可代之以任意的 $\alpha\phi + \beta$ 。

我們还須証明 $\phi(t)$ 是严格单增且連續。

(1) 若

$$0 \leq t_1 < t_2 \leq 1,$$

則对所有之 x ,

$$(1 - t_1)E_A + t_1E_B \geq (1 - t_2)E_A + t_2E_B,$$

不等号对某些 x 成立。于是，由 2)，

$$\begin{aligned}
\phi(t_1) &= \mathfrak{M}[(1 - t_1)E_A + t_1E_B] \\
&< \mathfrak{M}[(1 - t_2)E_A + t_2E_B] = \phi(t_2).
\end{aligned}$$

(2) 我們假定 $\phi(t)$ 在 t_0 (若有此种点存在的話) 的右边有一不連續点，其中 $0 \leq t_0 < 1$ 。于是，我們可求出一 ξ ，使得对任一小的 ε ，有

$$\phi(t_0) < \xi < \phi(t_0 + \varepsilon),$$

且对于所有之 x ，有

$$E_{\psi(t_0)} \geq E_{\xi} \geq E_{\psi(t_0 + \varepsilon)},$$

不等号对于某些 x 成立。因之，由 2)，对于 $(0, 1)$ 中之任一 t ，有

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}\left[\frac{1}{2} E_{\psi(t_0)} + \frac{1}{2} E_{\psi(t)}\right] &< \mathfrak{M}\left[\frac{1}{2} E_{\xi} + \frac{1}{2} E_{\psi(t)}\right] \\
&< \mathfrak{M}\left[\frac{1}{2} E_{\psi(t_0 + \varepsilon)} + \frac{1}{2} E_{\psi(t)}\right]. \tag{6.22.1}
\end{aligned}$$

但若 s 与 t 属于 $(0, 1)$ ，則由 1)，有

$$\phi(s) = \mathfrak{M}[E_{\psi(s)}] = \mathfrak{M}[(1 - s)E_A + sE_B];$$

对于 t 亦然。且由 3)，

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{M} \left[\frac{1}{2} E_{\psi(s)} + \frac{1}{2} E_{\psi(t)} \right] \\
&= \mathfrak{M} \left[\frac{(1-s)E_A + sE_B}{2} + \frac{(1-t)E_A + tE_B}{2} \right] \\
&= \mathfrak{M} \left[\left(1 - \frac{s+t}{2}\right) E_A + \frac{s+t}{2} E_B \right] = \psi \left(\frac{s+t}{2} \right).
\end{aligned}$$

結合上式与(6.22.1),則可看出

$$\psi \left(\frac{t_0 + t}{2} \right), \quad \psi \left(\frac{t_0 + t + \varepsilon}{2} \right)$$

为一数所分开,即为 $\mathfrak{M} \left[\frac{1}{2} E_\varepsilon + \frac{1}{2} E_{\psi(t)} \right]$ 所分开,其与 ε 无关;

因之,令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 即得

$$\psi \left(\frac{t_0 + t}{2} \right) < \psi \left(\frac{t_0 + t}{2} + 0 \right).$$

故对于一區間內所有之 t , ψ 在 $\frac{1}{2}(t + t_0)$ 点皆有一不連續点;而

这是不可能的,因为一單調函数之不連續点至多是可数个.

由是可知, $\psi(t)$ 无右边不連續点,同理,它也无左边不連續点. 故它为連續. 而这就完成了我們的証明.

我們是把注意力集中于有限阶梯函数,因而我們所考虑的函数 F 全是阶梯函数,而平均則是第三章中的平均. 存在一个相似的定理,其中的假設和結論都要強一些,即它适用于比 $\mathfrak{D}(A, B)$ 更为广泛的一类函数. 令 $\mathfrak{D}^*(A, B)$ 表示由具有 § 6.19 中之性質 (ii) 和 (iii) 且滿足(6.19.4)之函数所成的类,則我們可以証明一个定理,它与定理 215 不同之处只是以 $\mathfrak{D}^*$ 代 $\mathfrak{D}$. 証明非常相似,只是在最后几步要稍微更細致一些. 可参考 de Finetti[1].

各种定理和各种例

216. “就時間平均的速度小于就距离平均的速度”.

〔此即 $\left(\int \frac{ds}{dt} dt \right)^2 < \int dt \int \frac{ds}{dt} ds = \int dt \int \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 dt$, 乃定理 181 之一情形.〕

217. 若一质量为 M 的运动中的不可压缩的均匀流体之动能为 E , 它的质点之平均速度为 V , 则 $E > \frac{1}{2} MV^2$, 除非所有质点皆具有同样的速度.

[设 ρ 为一单元 $dS = dx dy dz$ 之密度, v 为其速度, 则

$$M = \rho \int dS, V \int dS = \int v dS, E = \frac{1}{2} \rho \int v^2 dS,$$

所求之结果从定理 181 (对于三重积分) 即可得出.]

218. 一单位电流通过平面上包围一面积 A 之一闭合电路, 并对在此电路内部之一单位磁极 P 施以一力 F , 则

$$2AF^2 > (2\pi)^2,$$

除非此电路是一以 P 为心之圆.

[为简单起见, 可假定此电路关于 P 为“星形的”(即 P 与电路上任一点连接之直线段全在电路内). 利用关于 P 之极坐标 r, θ , 并从 0 到 2π 积分, 即得

$$\begin{aligned} 2\pi = \int d\theta &= \int \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{2}} (r^2)^{\frac{1}{2}} d\theta < \left(\int \frac{d\theta}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int r^2 d\theta\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= F^{\frac{1}{2}} (2A)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

除非 r 是一常数.]

219. 若 $f_v(x, y)$ 与 $g_v(x, y)$ 是 x 与 y 的两组函数(有限多或无限多), 则

$$\left(\sum \iint fg dx dy\right)^2 < \sum \iint f^2 dx dy \sum \iint g^2 dx dy,$$

除非存在两个不同时为 0 之常数 a 与 b , 使得对任一 v , 有

$$af_v(x, y) \equiv bg_v(x, y).$$

[由定理 7 (对于无穷级数) 和 181 (对于二重积分), 或直接由 § 2.4 的第二个方法. 这定理阐明了下述的原理. 设诸 u, v 为三个整值变数 m, n, p 之函数, 则不等式

$$(i) \quad (\sum \sum \sum uv)^2 \leq \sum \sum \sum u^2 \sum \sum \sum v^2$$

与普通形式的 Cauchy 不等式并无实质上的差别; 但若在 (i) 中对求和记号作各种不同的选取, 然后代之以积分记号, 则由此即可导

出實質上不同的不等式.]

220. 設諸 a 为正, q_r 由

$$\frac{1}{(1-a_1x)(1-a_2x)\cdots(1-a_nx)} \\ = 1 + nq_1x + \cdots + \binom{n+r-1}{r} q_r x^r + \cdots$$

定义, 則

$$q_r^2 < q_{r-1}q_{r+1} \quad (r = 1, 2, \cdots),$$

除非所有之 a 皆相等.

221. $q_1 < q_2^{1/2} < q_3^{1/3} < \cdots,$

除非所有之 a 皆相等.

[定理 220 和 221 是由 I. Schur 告訴我們的. 正象 § 2.22 中之諸 p 那样, 諸 q 是諸 a 齐次乘积的平均, 不过現在諸 a 在一乘积中不必相异. 特別, $q_1 = p_1$.

定理 221 可从定理 220 得出, 正如定理 52 之从定理 51 得出一样. 欲証明定理 220, 我們可注意:

$$(i) \quad q_r = (n-1)! \iint \cdots \int (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^r dx_1 \cdots dx_{n-1},$$

其中 $x_n = 1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}$, 积分区域是由 $x_1 > 0, \cdots, x_{n-1} > 0, x_n > 0$ 限定的. 运用定理 181 (对于重积分) 于 (i), 即得定理 220.

公式 (i) 可导致一个更完善的定理. 若諸 a 为实数 (但不必为正), 則二次型 $\sum q_{r+s} y_r y_s$ 严格为正; 又若諸 a 为正, 則二次型 $\sum q_{r+s+1} y_r y_s$ 严格为正; 除了 (在两种情形都一样) 当所有之 a 皆相等的时候.]

222. 若 $p > 1$, f 在 $(0, a)$ 中属于 L^p , 且

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

則对小的 x , 有 $F(x) = o(x^{1/p'})$.

[由定理 189,

$$F^p \leq \int_0^x f^p dt \left(\int_0^x dt \right)^{p-1} = x^{p-1} \int_0^x f^p dt,$$

而第二因子趋于 0.]

223. 若 $p > 1$, f 在 $(0, \infty)$ 内属于 L^p , 则对小的 x 和对大的 x , 皆有 $F(x) = o(x^{1/p'})$.

[对于小的 x , 由定理 222. 要证明关于大的 x 的结果, 我们可选取 X , 使得

$$\int_X^\infty f^p dx < \varepsilon^p,$$

并设 $x > X$. 于是, 对于充分大的 x ,

$$(F(x) - F(X))^p = \left(\int_X^x f dt \right)^p \leq (x - X)^{p-1} \int_X^x f^p dt < \varepsilon^p x^{p-1},$$

$$F(x) < F(X) + \varepsilon x^{1/p'} < 2\varepsilon x^{1/p'}.]$$

224. 若 y 至多除在 $x = 0$ 之外为一积分, xy'^2 在 $(0, a)$ 内为可积, 则对于小的 x ,

$$y = o\left\{\left(\log \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

$$\left[\int_0^a y' dx \leq \left(\int_0^a \frac{dx}{x} \int_0^a xy'^2 dx \right)^{1/2} \right]$$

225. 若 y 至多除在 0 和 1 之外为一积分, $x(1-x)y'^2$ 在 $(0, 1)$ 内为可积, 则 y 属于 L^2 , 且

$$0 \leq \int_0^1 y^2 dx - \left(\int_0^1 y dx \right)^2 \leq \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x)y'^2 dx.$$

[y 之属于 L^2 可从定理 224 得出. 第一个不等式包含在定理 181 之中. 对于第二个不等式, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^1 y^2 dx - \left(\int_0^1 y dx \right)^2 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \{y(u) - y(v)\}^2 du dv \\ &= \int_0^1 du \int_u^1 dv \left(\int_u^v y'(t) dt \right)^2 \leq \int_0^1 du \int_u^1 (v-u) dv \int_u^v (y'(t))^2 dt \\ &= \int_0^1 (y'(t))^2 dt \int_0^t du \int_t^1 (v-u) dv = \frac{1}{2} \int_0^1 t(1-t)y'^2 dt. \end{aligned}$$

这两个不等式中, 前者只当 y 为一常数时才能化为等式, 后者只当

y 为綫性时才行.]

226. 若 $m > 1, n > -1, f$ 为正且为一积分, 則

$$(i) \quad \int_0^{\infty} x^n f^m dx \leq \frac{m}{n+1} \left\{ \int_0^{\infty} x^{\frac{m(n+1)}{m-1}} f^m dx \right\}^{\frac{m-1}{m}} \left(\int_0^{\infty} |f'|^m dx \right)^{\frac{1}{m}}$$

只当 $f = B \exp\{-Cx^{(m+n)/(m-1)}\}$ 时取等号, 其中 $B \geq 0, C > 0$.
特別,

$$(ii) \quad \int_0^{\infty} f^2 dx < 2 \left(\int_0^{\infty} x^2 f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\infty} f'^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

除非 $f = Be^{-Cx^2}$; 此不等式不論 f 为正与否皆成立, 又对于范围 $(-\infty, \infty)$ 亦成立.

[最有兴趣的情形是 (ii), 它属于 Weyl^[1, p. 345], 在量子力学中有用.

設在 (i) 之右边的积分为有限. 因 f 为連續, 且 $n < \frac{m(n+1)}{m-1}$, 故左边之积分亦为有限. 因之,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{n+1} f^m = 0.$$

由是, 在 $(0, x_k)$ 上施行部分积分, 其中 (x_k) 是一适当的随 k 趋于无穷之系列, 則得

$$\int_0^{\infty} x^n f^m dx = -\frac{m}{n+1} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{x_k} x^{n+1} f^{m-1} f' dx.$$

但由定理 189,

$$\int_0^{\infty} x^{n+1} f^{m-1} |f'| dx < \left\{ \int_0^{\infty} x^{\frac{m(n+1)}{m-1}} f^m dx \right\}^{\frac{m-1}{m}} \left(\int_0^{\infty} |f'|^m dx \right)^{\frac{1}{m}},$$

除非 $f' \leq 0$ 且 f' 与 $x^{(n+1)/(m-1)} f$ 事实上成比例. 这一假設导致所說的 f 的形式.]

227. 若 ϕ 为单增, 則

$$\left(\int fg d\phi \right)^2 < \int f^2 d\phi \int g^2 d\phi,$$

除非 f 与 g 事实上成比例(就 § 6.17 的意义而言).

[这包含在定理 210 之中; 在定理 228 中要用到.]

228. 若 $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$, 且 ϕ 为非負且单增, 則

$$\left(\int_0^{\infty} x^{a+b} \phi dx \right)^2 < \left\{ 1 - \left(\frac{a-b}{a+b+1} \right)^2 \right\} \int_0^{\infty} x^{2a} \phi dx \int_0^{\infty} x^{2b} \phi dx,$$

除非在 $(0, \xi)$ 中 $\phi \equiv C$, 其中 $C > 0$, 在 (ξ, ∞) 中, $\phi = 0$.

[ξ 可以为 0. 这不等式比直接运用定理 181 所得到的要强. 它可从定理 227 得出, 只消我們利用部分积分将上之积分化为該处所考虑的形式. $a = 0, b = 2$ 的情形曾由 Gauss 在联系到誤差理論时說出: 参考 Gauss [1, IV, p. 12] 及 Pólya 与 Szegő [1, II, p. 114, p. 318].]

229. 若 $a \geq 0, b \geq 0, a \neq 1$, ϕ 为非負且单增, 則

$$\left(\int_0^1 x^{a+b} \phi dx \right)^2 > \left\{ 1 - \left(\frac{a-b}{a+b+1} \right)^2 \right\} \int_0^1 x^{2a} \phi dx \int_0^1 x^{2b} \phi dx,$$

除非 $\phi \equiv C$.

[参考 Pólya 与 Szegő [1, I, p. 57, p. 214]. 在此种情形, 由定理 181 可得一相反的不等式, 右边的因子改为 1.]

230. 若 $0 < a \leq f \leq A < \infty, 0 < b \leq g \leq B < \infty$, 則

$$\int f^2 dx \int g^2 dx \leq \left[\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}} \right\} \int fg dx \right]^2.$$

[定理 71 的类似情形: 参考 Pólya 与 Szegő [1, I, p. 57, p. 214].]

231. 若我們考虑以 $-a, b$ ($a \geq 0, b \geq 0$) 为端点的閉区間或开区間(一般四个), 并設 a 与 b 各为 0, 为正且有限, 或无限, 則总共可得 34 种类型的区間 I . 試对每一区間 I 賦与一个函数 $f(x)$, 它在 $0 < x < 1$ 中有定义, 且使得 $\mathfrak{M}_q(f)$ 恰好对于 I 中之值 r 为有限, 其中 $\mathfrak{M}_q(f)$ 是对区間 $(0, 1)$ 和就 $q = 1$ 所做成者.

[例:

$$I \text{ 为 } -a < r \leq b: f(x) = x^{1/a}(1-x)^{-1/b} \left(\log \frac{2}{1-x} \right)^{-2/b};$$

$$I \text{ 为 } -\infty \leq r \leq \infty: f(x) = 1 + x^2;$$

$$I \text{ 为一点 } 0: f(x) = \exp(-x^{-1/2} + (1-x)^{-1/2});$$

$$I \text{ 为空集: } f(x) = \exp(-x^{-1} + (1-x)^{-1}).$$

这包含了在靠近 § 6.11 末所提到的命題的一部分証明.]

232. Minkowski 不等式的几何解释. 設泛函空間中的一点是定义作 L^2 中之一函数, 两个函数当且仅当它們之差为 0 时 (即只在一 0 测度之集上不同) 才定义同一个点; 又設两点 f 与 g 之間的距离是由

$$\delta(f, g) = \sqrt{\int (f - g)^2 dx}$$

所定义. 則 (i) 二不同的点之間的距离为正; (ii)

$$\delta(f, h) \leq \delta(f, g) + \delta(g, h).$$

[若我們用

$$\delta(f, g) = \left(\int |f - g|^r dx \right)^{1/r} \quad (r \geq 1)$$

来定义距离, 則在“泛函空間 L^r ”中可得同样的結果.]

233. 欧氏空間中二点間之最短距离是直綫.

[空間中的一曲綫是由

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

来定义的. 我們可假定对于所討論的弧段來說 t 从 0 增到 1. 若假定 x, y, z 是 L^2 中函数的积分, 則由定理 198, 对于长 l 有

$$\begin{aligned} l^2 &= \left[\int (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} dt \right]^2 = \mathfrak{M}_{\frac{1}{2}}(x'^2 + y'^2 + z'^2) \\ &\geq \mathfrak{M}_{\frac{1}{2}}(x'^2) + \mathfrak{M}_{\frac{1}{2}}(y'^2) + \mathfrak{M}_{\frac{1}{2}}(z'^2); \end{aligned}$$

而这不小于

$$\begin{aligned} &\left(\int x' dt \right)^2 + \left(\int y' dt \right)^2 + \left(\int z' dt \right)^2 \\ &= (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2. \end{aligned}$$

若等号成立, 則 $Ax' \equiv By' \equiv Cz'$, 因而曲綫为一直綫.]

234. 若 $0 < p < 1$, 且对于所有之 g , 有

$$\int fg dx \geq A \left(\int g^{p'} dx \right)^{1/p'},$$

則 $\int f^p dx \geq A^p$.

[比較定理 70. 若对于所有之 $x, f > 0$, 則由 $fg = f^p$ 定义 g . 若在 E 中 $f > 0$, 在 CE 中 $f = 0$, 且 CE 之测度为有限, 則在 E 中

由 $fg = f^p$ 定义 g , 在 CE 中由 $g = G$ 定义 g , 并按照定理 70 的证明来进行. 若 CE 的测度为无限, 则在 CE 中取(例如)

$$g = Ge^{x^2},$$

于是

$$\int f^p dx = \int fg dx \geq A \left(\int_E f^p dx + G^{p'} \int_{CE} e^{p'x^2} dx \right)^{1/p'}.$$

令 $G \rightarrow \infty$, 仍得出所要之结果.]

235. 设 f 与 p 为正, f 具有周期 2π ,

$$F(x) = \int_0^{2\pi} f(x+t)p(t) dt / \int_0^{2\pi} p(t) dt;$$

又设平均 $\mathfrak{M}_r$ 系就区间 $(0, 2\pi)$ 和一常数权函数而取者, 则

$$\mathfrak{M}_r(F) \geq \mathfrak{M}_r(f) \quad (0 \leq r \leq 1), \quad \mathfrak{M}_r(F) \leq \mathfrak{M}_r(f) \quad (r \geq 1).$$

[这可从定理 204 导出, 或可直接证明(比如说假定 $r \geq 1$)如下:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_r(F) &= \frac{1}{2\pi} \int dx \left[\frac{\int f(x+t)p(t) dt}{\int p(t) dt} \right]^r \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int dx \frac{\int f^r(x+t)p(t) dt \left(\int p(t) dt \right)^{r-1}}{\left(\int p(t) dt \right)^r} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\int p(t) dt \int f^r(x+t) dx}{\int p(t) dt} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int f^r(u) du = \mathfrak{M}_r(f). \end{aligned}$$

对于 $r = 0$ 的情形, 可参考 Pólya 与 Szegő [1, I, p. 56, p. 212].]

236. 若

$$\{f(x_1, y_1, \dots) - f(x_2, y_2, \dots)\} \{g(x_1, y_1, \dots) - g(x_2, y_2, \dots)\} \geq 0,$$

则称 $f(x, y, \dots)$ 与 $g(x, y, \dots)$ 为相似排列; 若 f 与 $-g$ 为相

似排列,則称 f 与 g 为相反排列. 試証明, 若 f 与 g 为相似排列, 則

$$\iint \cdots f dx dy \cdots \iint \cdots g dx dy \leq \iint \cdots dx dy \cdots$$

$$\iint \cdots fg dx dy \cdots;$$

若 f 与 g 为相反排列, 則不等式反号. 积分是就 f 与 g 的定义域的任何公共部分而取者.

[此乃定理 43 (取 $r = 1$) 之类似情形, 本质上属于 Tchebychef (他只考虑了一个变数的单调函数).]

237. 若 ϕ 与 ψ 满足定理 156 的条件, 且

$$\Phi(x) = \int_0^x \phi(t) dt, \quad \Psi(x) = \int_0^x \psi(t) dt,$$

則

$$\int fg dx \leq \int \Phi(f) dx + \int \Psi(g) dx.$$

238. 若 f 与 g 为正, k 为一正常数, 且 $f \log^+ f$ 与 e^{kx} 为可积, 則 fg 为可积.

[由定理 63, $kfg \leq f \log^+ f + e^{kx-1}$.]

239. 若 f 为正, 則

$$\int_0^a f \log \frac{1}{x} dx \leq 2 \int_0^a f \log^+ f dx + \frac{4\sqrt{a}}{e}.$$

[在用来証明定理 238 的不等式中取 $g = \frac{1}{2} \log \frac{1}{x}$, $k = 1$.]

240. 若 f 在 $(0, a)$ 中为正且属于 L , 又

$$F(x) = \int_0^x f dx,$$

則

$$\int_0^a f(x) \log \frac{1}{x} dx = \int_0^a \frac{F(x)}{x} dx + F(a) \log \frac{1}{a},$$

只要有一个积分为有限.

241. 設 a 为正且有限; $B = B(a)$ 一般表示一个只与 a 有关的数; $f(x) \geq 0$; 又設

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

$$J = \int_0^a f \log^+ f dx, \quad K = \int_0^a \frac{F}{x} dx.$$

則 (i) 若 J 为有限, 則 K 亦为有限, 且

$$K < BJ + B;$$

(ii) 当 f 为一单降函数时, 逆命题亦成立: 若 K 为有限, 則 J 为有限, 且

$$J < BK \log^+ K + B.$$

[对于上之二定理可参考 Hardy 与 Littlewood[8].]

242. 若 f 在 $(0, a)$ 中为正且属于 L , 又

$$g = \int_x^a \frac{f(t)}{t} dt,$$

則 g 属于 L , 且 $\int_0^a g(x) dx = \int_0^a f(x) dx$.

[部分积分; 或将 g 代入并交换积分次序.]

243. 設 ϕ 为一連續且严格单增之函数, 我們定义 $\mathfrak{M}_\phi(f)$ 为

$$\mathfrak{M}_\phi(f) = \phi^{-1} \left\{ \int \phi(f) q dx \right\}.$$

則欲使

$$\mathfrak{M}_\psi(f) \leq \mathfrak{M}_\phi(f)$$

对于所有之 f 成立, 其必要且充分之条件是 ψ 关于 ϕ 为凸的.

244. 欲使

$$\mathfrak{M}_{\phi_n}^{x_n} \cdots \mathfrak{M}_{\phi_1}^{x_1}(f) \leq \mathfrak{M}_{\psi_n}^{x_n} \cdots \mathfrak{M}_{\psi_1}^{x_1}(f)$$

对所有之 $f = f(x_1, \cdots, x_n)$ 成立, 其必要且充分之条件是每一 ϕ_v 关于相应的 ψ_v 为凸的.

245. 欲使

$$\mathfrak{M}_{p_n}^{x_n} \cdots \mathfrak{M}_{p_1}^{x_1}(f) \leq \mathfrak{M}_{q_n}^{x_n} \cdots \mathfrak{M}_{q_1}^{x_1}(f)$$

对所有之 f 成立, 其必要且充分的条件是: (i) $q_v \geq p_v$ 及 (ii) 当 $\mu \geq \nu$ 且将 $1, 2, \cdots, n$ 变到 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$ 的置换包含 μ 和 ν 的一个轉換时, 有 $q_\mu \geq p_\nu$.

[对于上述之三定理,它們分別对应于定理 92, 93 和 137, 可参考 Jessen[2, 3].]

246. Hölder 不等式可从

$$\mathfrak{M}_1^p \mathfrak{M}_0^q(f) \leq \mathfrak{M}_0^p \mathfrak{M}_1^q(f)$$

(定理 203) 取

$$f(x, y) = f_1^p(y) \left(0 \leq x < \frac{1}{p}\right), f(x, y) = f_2^{p'}(y) \left(\frac{1}{p} \leq x \leq 1\right)$$

得出.

[参考 Jessen[3].]

247. 若(i) $\phi(x, t)$ 关于 x 为正且連續, 并且是凸的 ($x_1 \leq x \leq x_2, t > 0$); (ii) $p(t) \geq 0$; (iii) 积分

$$I(x) = \int_0^\infty \phi(x, t) p(t) dt$$

对 $x = x_1$ 及 $x = x_2$ 为有限, 則 $I(x)$ 对于 $x_1 < x < x_2$ 为連續且为凸的.

[$I(x)$ 之为有界且凸的, 此由 ϕ 之凸性立刻可以得出; 它之为連續, 則从定理 111 得出.]

248. 若对于正的 x , $f(x)$ 与 $\phi(x)$ 为正, $\phi(x)$ 为凸的, 且

$$I(x) = x \int_0^\infty \phi \left\{ \frac{f(t)}{x} \right\} dt$$

对于 $x = x_1$ 及 $x = x_2$ 为有限, 則 $I(x)$ 对于 $x_1 < x < x_2$ 为連續且凸的.

[由定理 119, $x\phi(1/x)$ 与

$$f(t) \cdot \frac{x}{f(t)} \phi \left\{ \frac{f(t)}{x} \right\}$$

为凸的, 故可运用定理 247. 更一般的結果可从定理 120 得出.]

249. 欲使

$$\int_a^b \phi(g(x)) dx \leq \int_a^b \phi(f(x)) dx$$

对任何連續凸函数 ϕ 皆成立, 其必要且充分之条件是关于所有之 y , 有

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

及

$$\int_a^b (g(x) - y)^+ dx \leq \int_a^b (f(x) - y)^+ dx.$$

[于此,亦如在 § 6.1 中, a^+ 表示 $\max(0, a)$.]

250. 若 f 与 g 为单增函数,则一等价的条件是

$$\int_{\xi}^b g(x) dx \leq \int_{\xi}^b f(x) dx$$

对 $a \leq \xi \leq b$ 皆成立.

[对于上述二定理,它们包含定理 108 中一些部分的积分类似情形,可参考 Hardy, Littlewood 与 Pólya[2].]

251. 若 $f_1(t), f_2(t), \dots, f_l(t)$ 在 $(0, 1)$ 中为实的且可积,则

(i) 存在一函数 $x(t)$, 使得

$$\int_0^1 f_1(t)x(t) dt > 0, \dots, \int_0^1 f_l(t)x(t) dt > 0;$$

(ii) 存在不全为 0 之非负数 $y_1, y_2, \dots, y_l$, 使得

$$y_1 f_1(t) + y_2 f_2(t) + \dots + y_l f_l(t) \equiv 0$$

之一成立.

252. 若 $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$ 在 $(0, 1)$ 中为实且连续, 则

(i) 存在实数 $x_1, x_2, \dots, x_m$, 使得

$$x_1 f_1(t) + x_2 f_2(t) + \dots + x_m f_m(t)$$

对于 $(0, 1)$ 中所有之 t 为非负, 对其中一些为正; (ii) 存在一正连续函数 $y(t)$, 使得

$$\int_0^1 f_1(t)y(t) dt = 0, \dots, \int_0^1 f_m(t)y(t) dt = 0$$

之一成立.

[定理 251 和 252 是 Stiemke[1] 关于线性不等式组之一重要定理的积分类似情形. 设

$$a_{\lambda\mu} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l; \mu = 1, 2, \dots, m)$$

为 l 行 m 列之矩形阵列; 又设

$$L_{\lambda}(x) = a_{\lambda 1}x_1 + a_{\lambda 2}x_2 + \dots + a_{\lambda m}x_m,$$

$$M_{\mu}(x) = a_{1\mu}y_1 + a_{2\mu}y_2 + \dots + a_{l\mu}y_l;$$

而來考慮兩個問題：

(i) 尋求一實數集 (x) ，使得

$$L_1(x) > 0, L_2(x) > 0, \dots, L_l(x) > 0;$$

(ii) 尋求一非負且非零的集 (y) ，使得

$$M_1(y) = 0, M_2(y) = 0, \dots, M_m(y) = 0.$$

因

$$\sum y L(x) = \sum x M(y),$$

故此二問題不可能同時對於同一集 (a) 可解，而 Stiemke 定理則謂，不管什麼樣的集 (a) ，總有一個可解。

定理 251 與 252 道出了 Stiemke 定理的類似情形，於其中， m 列或 l 行乃代之以一連續無限之列或行。這些定理以及其它與綫性不等式組的理論有關的定理，我們之所以把它們排除在計劃之外，只是由於要為它們在代數和幾何方面作一些準備。這些知識可在 Haar[1] 和 Dines[1] 中找到。]

第七章 变分法的一些应用

7.1. 一些一般性的說明. “变分法中最簡單的問題”乃是对所有满足下述条件之 $y = y(x)$:

(1) $y_0 = y(x_0)$, $y_1 = y(x_1)$ 已經給定,

(2) y' 为連續,

去决定

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx.$$

的一个极大值或极小值的問題. 設将满足上述条件之函数做成的类記作 $\mathfrak{R}$. 于是我們的問題即是寻求 $\mathfrak{R}$ 中之一函数 $y = Y(x)$, 使得对于 $\mathfrak{R}$ 中所有异于 Y 的 y , 不是

$$J(y) < \int_{x_0}^{x_1} F(x, Y, Y') dx = J(Y)$$

常成立, 就是 $J(y) > J(Y)$ 常成立. 一般的理論告訴我們, 若存在这样的一个函数 Y , 則它必满足 “Euler 方程”

$$(E) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right).$$

我們来考虑一些简单的例子.

$$(i) \text{ 設 } J(y) = \int_0^1 y'^2 dx,$$

$y_0 = 0$, $y_1 = 1$, 則 (E) 是 $y'' = 0$, 而满足此条件之唯一解答是 $y = x$. 容易証明, $Y = x$ 实际上給出 $J(y)$ 的一个极小. 盖 $J(Y) = 1$, 且由定理 181,

$$1 = \left(\int_0^1 y' dx \right)^2 < \int_0^1 dx \int_0^1 y'^2 dx = J(y),$$

除非 $y' \equiv 1$, $y = x$; 故对所有异于 Y 的 y , $J > 1$.

事实上, 我們所証明的比問題所要求的要多, 因我們的証明只

要 y 是一个积分皆有效。但最后这一假设(即 y 是一积分)是必不可少的, 因为存在函数 y , 使得

$$y(0) = 0, y(1) = 1, y' \equiv 0, J(y) = 0. \quad (7.1.1)$$

欲使 y 为一积分, 就是说, 要使得存在一可积函数 $f(x)$, 满足关系

$$y(x) = \int_a^x f(u) du,$$

其必要且充分的条件是 $y(x)$ 为“绝对连续”。 $f(x)$ 必须是有界变差(但并不充分)。特别, $y(x)$ 为单调是不够的; 存在单增函数 y 满足(7.1.1)。

若 y 是 f 的积分, 则 $y' = f$; 一积分是它导数的积分。所有这些在单实变函数论的书籍中皆有详细说明¹⁾。本章中所需要的主要定理乃是在 § 6.3(a) 中所说明的部分积分定理。

这些解释使得我们作出下面的约定。在本章中我们皆假定, 只要 y 和 y' 同在某一段叙述或某一个证明中出现, y 就是一个积分(因而是 y' 的积分)。关于 y' 和 y'' (若 y'' 在问题中出现)也作同样的假设; 这项假设当然也适用于异于 y 的字母。没有这一假设, 所有这一章中的问题皆失其意义。

(ii)²⁾ 设

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y'^3) dx,$$

$y_0 = y_1 = 0$ 。满足这些条件的 (E) 的唯一解是 $y = 0$ 。若 $Y = 0$, 则 $J(Y) = 0$, 但 Y 并没有给出 $J(y)$ 的一个极大或极小。事实上, 我们容易构造 $\mathbb{R}$ 中之一 y , 使得 $J(y)$ 随我们的需要为正或为负, 而且要多大就多大。例如, 若 $f(x)$ 是任何使得 $f(0) = f(1) = 0$ 和

$$\int_0^1 f'^3 dx > 0$$

的函数, $y = Cf(x)$, 则当 C 很大时 $J(y)$ 也很大, 且与 C 同号。

(iii) 设

1) 可参考(例如) de la Vallée Poussin [2], Hobson [1], Titchmarsh [1].

2) 这个以及下一个例子属于 Weierstrass, 它们有深远的历史意义。

$$J(y) = \int_0^1 xy'^2 dx,$$

$y_0 = 0, y_1 = 1$. 于此 $J(y)$ 对 $\mathfrak{R}$ 中所有之 y 皆为正; 但由 $y = x^m$ 即得 $J = \frac{1}{2}m$, 在 $\mathfrak{R}$ 中存在 y 使得 $J(y)$ 要多小就多小. 对于 $\mathfrak{R}$ 中之 y , $J(y)$ 具有一个达不到的下界 0. 对于比 $\mathfrak{R}$ 更广的一些 (y 的) 类, 同样的事实也成立 (比如說由积分所成的类). 另一方面, $J(y)$ 对于上面 (i) 中所述的函数达到它的界 0, 对于当 $x = 0$ 时为 0, $x > 0$ 时为 1 这一不連續函数也达到它的界 0.

7.2. 这一章的目的. 預料变分法在积分不等式的証明方面将提供一个非常有力的武器. 但是却难找到它运用于在一般分析中具有重要意义的不等式的例子. 这可从两个原因来解释. 第一, 变分法公开自詡是从事于可达到的极大或极小的研究的, 而許多最重要的积分不等式則是包含关于不可达到的上确界或下确界的論断的. 第二, 古典理論的“連續性”假設是非常限制人的. 要把一个利用变分法对某一特殊函数类所証明的不等式推广到有求于这不等式的最一般的函数类上去, 常常是相当麻煩, 倒不如去构造該完整結果的一个直接証明. 由于这些原因, 变分法在分析的这一部分中几乎被忽略掉.

然而变分法的概念常常是非常有用的, 在这里我們就把它們运用于一些特殊的不等式. 正如在上述的例(i)或下面的定理 254 和 256 中那样, 当由不等式所論断的界可达到时, 而且是由一个极值 (这是一个函数) 达到时, 也就是說, 由 Euler 方程的一个解达到时, 这些概念显然是切合用处的, 而这結果可能是一个利用別的方法很难得到的結果. 然而我們將发现, 即使当这界不能达到, 而且最終的結果不可能用变分法来获得时, 这些概念有时仍然有效.

我們的論証不要求这一理論的任何詳細知識; 除了在 § 7.8 中之外, 我們只要求它的一些最簡單的形式上的概念¹⁾.

1) Euler 方程和 Hilbert 不变积分. 我們所假定要知道的任何东西皆不难在 Bliss [1] 或 Bolza [1] 中找到.

7.3. 一个与一不可达到的极值相应的不等式的例子. 作为运用变分法的第一个例子, 我們現在选择一个定理的一个特殊情形, 这定理我們先是以一种完全不同的方式来証明, 而且将在 §9.8 中返回来討論.

253. 若 y' 属于 $L^2(0, \infty)$, $y_0 = 0$, y 不常为 0, 則

$$J(y) = \int_0^\infty \left(4y'^2 - \frac{y^2}{x^2} \right) dx > 0.$$

对于我們現在的目的來說, 我們必須考慮更一般的积分

$$J(y) = \int_0^\infty \left(\mu y'^2 - \frac{y^2}{x^2} \right) dx \quad (\mu \geq 4). \quad (7.3.1)$$

Euler 方程是

$$x^2 y'' + \lambda y = 0 \quad \left(\lambda = \frac{1}{\mu} \leq \frac{1}{4} \right).$$

当 $\mu > 4$ 时, 它的解是

$$y = Ax^m + Bx^n,$$

其中

$$m = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \lambda \right)}, \quad n = \frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \lambda \right)};$$

若 $\mu = 4$, 則为 $y = x^{\frac{1}{2}}(A + B \log x)$. 不管是在哪种情形, 都不存在一个(异于 0 的)解, 使得 y' 属于 L^2 .

由于这一原因, 在我們试图利用变分概念之前, 必須将問題加以修改. 我們来考虑

$$J(y) = \int_0^1 \left(\mu y'^2 - \frac{y^2}{x^2} \right) dx,$$

它具有 $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $\mu > 4$. 此时有一个¹⁾满足所有条件的极值, 即

$$y = Y = x^m = x^{\frac{1}{2}+\alpha}, \quad (7.3.2)$$

其中

1) 极值

$$y = \lambda x^{\frac{1}{2}+\alpha} + (1-\lambda)x^{\frac{1}{2}-\alpha}$$

对于任何 λ 皆有 $y_0 = 0$, $y_1 = 1$; 但 y' 不属于 L^2 , 且 $J(y)$ 发散, 除非 $\lambda = 1$.

$$a = \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\mu}\right)}, \quad \mu = \frac{1}{\frac{1}{4} - a^2}. \quad (7.3.3)$$

經簡單之計算, 即得

$$J(Y) = \frac{2}{1 - 2a}, \quad (7.3.4)$$

而这就建議了下列的定理.

254⁰. 若 $\mu > 4$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, y' 属于 L^2 , 則

$$J(y) = \int_0^1 \left(\mu y'^2 - \frac{y^2}{x^2} \right) dx \geq \frac{2}{1 - 2a}, \quad (7.3.5)$$

其中 a 由 (7.3.3) 定义. 使得等号成立的唯一情形就是由 (7.3.2) 所定义的情形.

7.4. 定理 254 的第一証明. 我們給以定理 254 两个証明. 前一証明不需要懂得变分法, 虽然我們所使用的变换是根据我們对于极值 Y 的形式已有的了解而联想起来的.

若

$$y = x^{\frac{1}{2}+a} + \eta = Y + \eta, \quad (7.4.1)$$

則

$$J(y) = J(Y) + J(\eta) + K(Y, \eta), \quad (7.4.2)$$

其中

$$K(Y, \eta) = 2 \int_0^1 \left(\mu Y' \eta' - \frac{Y \eta}{x^2} \right) dx.$$

因 Y' 属于 L^2 , η' 也属于 L^2 , 故对于小的 x , $\eta = o(x^{\frac{1}{2}})^2$; 由是有

$$\begin{aligned} K &= 2 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(- \int_{\delta}^1 \frac{Y \eta}{x^2} dx + [\mu Y' \eta]_{\delta}^1 - \int_{\delta}^1 \mu Y'' \eta dx \right) \\ &= -2 \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 \eta \left(\mu Y'' + \frac{Y}{x^2} \right) dx = 0. \end{aligned}$$

因之, 由 (7.4.2) 即得

-
- 1) 关于这一定理以及本章中后面的一些定理, 可参考 Hardy 及 Littlewood [10].
2) 定理 222.

$$J(y) = \frac{2}{1-2a} + J(\eta); \quad (7.4.3)$$

故只須証明

$$J(\eta) > 0$$

即可。在这里， η' 属于 L^2 ， η 不为 0，但在区間的端点为 0。

令

$$\eta = Y\zeta,$$

則得

$$\begin{aligned} J_\delta(\eta) &= \int_\delta^1 \left(\mu \eta'^2 - \frac{\eta^2}{x^2} \right) dx \\ &= \mu \int_\delta^1 (Y\zeta' + Y'\zeta)^2 dx - \int_\delta^1 \frac{Y^2 \zeta^2}{x^2} dx \\ &= \mu \int_\delta^1 Y^2 \zeta'^2 dx + \int_\delta^1 \left(\mu Y'^2 - \frac{Y^2}{x^2} \right) \zeta^2 dx \\ &\quad + 2\mu \int_\delta^1 Y Y' \zeta \zeta' dx. \end{aligned} \quad (7.4.4)$$

但

$$\begin{aligned} 2\mu \int_\delta^1 Y Y' \zeta \zeta' dx &= -\mu (Y Y' \zeta^2)_\delta \\ &\quad - \mu \int_\delta^1 (Y'^2 + Y Y'') \zeta^2 dx. \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

結合(7.4.4)和(7.4.5), 并注意 Y 是

$$\mu Y'' + \frac{Y}{x^2} = 0$$

的一个解, 則得

$$J_\delta(\eta) = -\mu (Y Y' \zeta^2)_\delta + \mu \int_\delta^1 (Y \zeta')^2 dx. \quad (7.4.6)$$

但当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$Y Y' \zeta^2 = \left(\frac{1}{2} + a \right) \frac{(Y \zeta)^2}{x} = \left(\frac{1}{2} + a \right) \frac{\eta^2}{x} \rightarrow 0.$$

因之, 当我們在(7.4.6)中令 $\delta \rightarrow 0$ 时, 即得

$$J(\eta) = \mu \int_0^1 (Y \zeta')^2 dx. \quad (7.4.7)$$

除了当被积函数为 0, 亦即当 $\zeta = 0$ 时, 它常为正.

这就証明了定理. 条件 $\mu > 4$ 是要来使得 Y' 属于 L^2 . 我們已把定理化归依赖于恆等式(7.4.7). 因

$$Y\zeta' = \eta' - \frac{\frac{1}{2} + a}{x} \eta = y' - \frac{\frac{1}{2} + a}{x} y,$$

故由(7.4.7)和(7.4.3), 即得

$$J(y) = \int_0^1 \left(\mu y'^2 - \frac{y^2}{x^2} \right) dx = \frac{2}{1-2a} + \mu \int_0^1 \left(y' - \frac{\frac{1}{2} + a}{x} y \right)^2 dx; \quad (7.4.8)$$

而在这里 Y 业已消失. 因 (7.4.8) 的两边关于 μ 为連續, 故我們現在可将 $\mu = 4, a = 0$ 这一情形包括进去. 这恆等式当它的形状已經看出之后, 可以直接用部分积分来証明(尽管关于在下限的收敛問題方面还多少要加以注意).

現在我們已經可以来証明定理 253. 若令

$$x = X/\xi, \quad cy(x) = Y(X),$$

然后重新再以 x, y 代 X, Y , 則得

$$\int_0^\xi \left(\mu y'^2 - \frac{y^2}{x^2} \right) dx = \frac{2}{1-2a} \frac{c^2}{\xi} + \mu \int_0^\xi \left(y' - \frac{\frac{1}{2} + a}{x} y \right)^2 dx, \quad (7.4.9)$$

其中 $y(0) = 0, y(\xi) = c$. 若 y' 属于 $L^2(0, \infty)$, 則对于大的 ξ , $c = o(\xi^{\frac{1}{2}})^{1)}$. 因而当 $\xi \rightarrow \infty$ 时, 右边第一項趋于 0. 令 $\xi \rightarrow \infty$, 并設 $\mu = 4$, 則得

$$\int_0^\infty \left(4y'^2 - \frac{y^2}{x^2} \right) dx = 4 \int_0^\infty \left(y' - \frac{y}{2x} \right)^2 dx.$$

这一使得定理 253 成为直观可見的公式, 当 y' 属于 L^2 时皆有效,

1) 定理 223.

而且当然可以直接来证明¹⁾。

7.5. 定理 254 的第二证明. 在这第二个证明中,我们要把作为前一证明的基础的变分理论表面化。

设 $y = Y(x)$ 或 E 是过端点 P_0 和 P_1 的极值,又设

$$y = y(x, \alpha) \quad (7.5.1)$$

或 $E(\alpha)$ 是一族包含 E 且与一参数 α 有关的极值。其次,更假设,或有

(i) $E(\alpha)$ 盖住了一个包含 E 的区域,使得过域内每一点恰有一极值通过,且 α 是 x 与 y 的单值函数;或有

(ii) $E(\alpha)$ 中的每一曲线皆通过 P_0 , 使得 $y(x_0, \alpha)$ 与 α 无关,但条件 (i) 在所有其它方面则皆满足。

当这些条件成立时²⁾,我们就说(7.5.1)定义了一个包含 E 的极值场。

过场内一点 P 的极值的斜率

$$y'(x, \alpha)$$

可以表成 x 与 y 的一单值函数

$$p = p(x, y).$$

Hilbert 的“不变积分”是

$$J^*(C) = \int_C \{(F - pF_p)dx + F_p dy\}.$$

于此, F 和 F_p 是 $F(x, y, y')$ 和 $F_{y'}(x, y, y')$ 当 y' 代以 p 时所取之值,而此积分则是沿任何一条属于被此场所盖住之区域内的曲线 C 而取。

Hilbert 积分的基本性质如下。

(i) $J^*(C)$ 只与 C 的端点 Q, R 有关;换言之,

$$(F - pF_p)dx + F_p dy = dW$$

为一全微分,且

$$J^*(C) = W_R - W_Q;$$

1) Grandjot^[1] 关于级数给出了一些多少有点类似的恒等式。

2) 还须加上一些有关 $\alpha(x, y)$ 的可微分性的条件,这在这里没有重复的必要。参考 Bolza [1, p p. 95—105].

(ii) 若 C 就是极值 E , 則

$$J^*(E) = \int_E F dx = J(E), \quad (\text{設}).$$

由是可知, 若 C 从 P_0 跑到 P_1 , 則

$$\begin{aligned} J(C) - J(E) &= J(C) - J^*(E) = J(C) - J^*(C) \\ &= \int_C F(x, y, y') dx - \int_C \{ (F(x, y, p) \\ &\quad - pF_p(x, y, p)) dx + F_p(x, y, p) dy \} \\ &= \int_C \mathcal{G}(x, y, p, y') dx, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, y, p, y') &= \\ &= F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p). \end{aligned}$$

在这里, y' 是 C 在任意一点的斜率, p 是极值过該点的斜率, $\mathcal{G}$ 則是 Weierstrass 的“过量函数”, 若当 $y' \neq p$ 时总有 $\mathcal{G} > 0$, 則

$$J(E) < J(C),$$

因而 E 即給出 J 的一个真正的极小.

在現刻的情形, 我們取

$$y = ax^{\frac{1}{2}+a}$$

作为 $E(a)$, 則得

$$p = a\left(\frac{1}{2} + a\right)x^{-\frac{1}{2}+a} = \left(\frac{1}{2} + a\right)\frac{y}{x},$$

$$F = \mu p^2 - \frac{y^2}{x^2}, \quad F_p = \frac{2y}{\left(\frac{1}{2} - a\right)x}, \quad F - pF_p = -\frac{y^2}{\left(\frac{1}{2} - a\right)x^2},$$

$$J^* = \frac{1}{\frac{1}{2} - a} \int \left(-\frac{y^2}{x^2} dx + \frac{2y}{x} dy \right) = \int dW,$$

其中

$$W = \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2} - a\right)x}.$$

在这里,

$$\mathcal{E} = \mu y'^2 - \mu p^2 - (y' - p)2\mu p = \mu(y' - p)^2 > 0,$$

除非 $y' = p$. 恆等式

$$J(C) - J(E) = \int_C \mathcal{E} dx$$

即化为

$$\int_0^1 \left(\mu y'^2 - \frac{y^2}{x^2} \right) dx - \frac{2}{1-2a} = \mu \int_0^1 \left\{ y' - \left(\frac{1}{2} + a \right) \frac{y}{x} \right\}^2 dx,$$

此即(7.4.8).

这一論証說明了(7.4.8)的由来,但並沒有証明它. 这有两个原因. 其一, F 在 $x=0$ 有一奇点,因而場論不适用. 其二,該理論先就假設了 y' 为連續.

为了克服前一个困难,我們可将 P_0 和 P_1 分別取成 $(\delta, \delta^{\frac{1}{2}+a})$ 和 $(1,1)$. 由我們的理論即得恆等式

$$\int_{\delta}^1 \left(\mu y'^2 - \frac{y^2}{x^2} \right) dx = \frac{2(1-\delta^{2a})}{1-2a} + \mu \int_{\delta}^1 \left\{ y' - \left(\frac{1}{2} + a \right) \frac{y}{x} \right\}^2 dx;$$

于是,对于連續的 y' ,我們可令 δ 趋于 0 而得(7.4.8).

当(7.4.8)既經对于連續的 y' 証明之后,由标准的逼近手法,即可将它推广到 L^2 中一般的 y' 上去. 我們将于下节中在另一个問題里来处理这一点,在那里,我們还没有别的初等的証明.

由类似的討論,可得恆等式

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\mu y'^k - \frac{y^k}{x^k} \right) dx &= \frac{1}{(k-1)(1-\lambda)} \\ &+ \mu \int_0^1 \left\{ y'^k - \left(\frac{\lambda y}{x} \right)^k - k \left(y' - \frac{\lambda y}{x} \right) \left(\frac{\lambda y}{x} \right)^{k-1} \right\} dx^{1)}. \end{aligned} \quad (7.5.2)$$

于此,

$$y(0) = 0, y(1) = 1, y' \geq 0, k > 1, \mu > \left(\frac{k}{k-1} \right)^k = K,$$

而 λ 則是

1) 由場論可得出此恆等式的形式,这些恆等式又可独立地驗證. 在一个变分的証明中对曲綫要求 $y' > 0$ 的限制将带来另外的一点复杂性.

$$\mu(k-1)\lambda^{k-1}(\lambda-1)+1=0 \quad (7.5.3)$$

的(唯一的)根,它位于 $\frac{1}{k'}$ 与 1 之間. 当 (7.5.2) 的形式既經決定之后,我們可令

$$\mu = K,$$

其中 $\lambda = \frac{1}{k'}$, $\mu\lambda^k = 1$. 于是,我們有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(Ky'^k - \frac{y^k}{x^k} \right) dx &= \frac{k}{k-1} \\ &+ K \int_0^1 \left\{ y'^k - \left(\frac{\lambda y}{x} \right)^k - k \left(y' - \frac{\lambda y}{x} \right) \left(\frac{\lambda y}{x} \right)^{k-1} \right\} dx. \end{aligned}$$

用部分积分直接可以証明,上式当 y' 属于 L^k 时成立;此外,可按照 § 7.4 中証明: 此恆等式当上限 1 代之以 ∞ ,同时将 $k/(k-1)$ 这一項省去之后仍然成立. 因由定理 41,对所有正的 a, b ,

$$a^k - b^k > k(a-b)b^{k-1},$$

于是,我們就得到了一个定理(定理 327)的一个証明. 这定理我們将在 § 9.8 中明白的陈述出来,而且以一种完全不同的方法去証明.

順便我們还得到了

$$255. \text{ 若 } k > 1, \mu > \left(\frac{k}{k-1} \right)^k = K,$$

$y(0) = 0, y(1) = 1, y'$ 属于 L^k , 則

$$J = \int_0^1 \left(\mu y'^k - \frac{y^k}{x^k} \right) dx \geq \frac{1}{(k-1)(1-\lambda)},$$

其中 λ 是 (7.5.3) 在 $1/k'$ 与 1 之間的根.

7.6. 用来闡明变分法的其它例子. 要确切的把“初等的”和“变分的”証明区分开来是困难的,因为存在着許多中間类型的証明. 我們現在选取几个这类的証明,并在本节和其下各节中以各种不同的詳細程度把它們写出来.

(I). **256.** 若 $y(0) = 0, 2k$ 为一正偶数,則

$$\int_0^1 y^{2k} dx \leq C \int_0^1 y'^{2k} dx, \quad (7.6.1)$$

其中

$$C = \frac{1}{2k-1} \left(\frac{2k}{\pi} \sin \frac{\pi}{2k} \right)^{2k}. \quad (7.6.2)$$

等号只对某些超椭圆曲线成立.

(i) 我们先假定 $y(1) \neq 0$. 在此种情形, 我们可取 $y(1) = 1$, 并来考虑

$$J(y) = \int_0^1 (C y'^{2k} - y^{2k}) dx.$$

Euler 方程是

$$(2k-1)C y'^{2k-2} y'' + y^{2k-1} = 0,$$

由此即得

$$(2k-1)C y'^{2k} = C' - y^{2k},$$

其中 C' 是一积分常数.

存在一个极值, 它过 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$ 并与 $x = 1$ 交成直角. 事实上, 若我们取 $C' = 1$, 则 y' 当 $y = 1$ 时为 0. 又

$$x = \{(2k-1)C\}^{1/2k} \int \frac{dy}{(1 - y^{2k})^{1/2k}},$$

又因

$$\int_0^1 \frac{dy}{(1 - y^{2k})^{1/2k}} = \frac{1}{2k} \int_0^1 (1-u)^{-1/2k} u^{1/2k-1} du = \frac{\pi}{2k} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2k},$$

故有此种形状之一极值, 它过 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$. 若我们将此极值记作 Y , 则

$$J(Y) = [C Y Y'^{2k-1}]_0^1 - \int_0^1 Y \{(2k-1)C Y'^{2k-2} Y'' + Y^{2k-1}\} dx = 0,$$

盖 $Y'(1) = 0$.

要证明这定理, 我们必须指出 $y = Y$ 给出一个强的极小; 而这从一般的理论容易得出. 极值是一条拱的曲线, 其一般形式有如曲线 $y = \sin \frac{1}{2} \pi x$, 当 $k = 1$ 时也就化为此曲线. 曲线 $y = \alpha Y$ 也是一极值; 族 $y = \alpha Y$ 定义了一个依 § 7.5 的意义而言的场; 过量函数

$$\mathcal{E} = y'^{2k} - p^{2k} - 2k(y' - p)p^{2k-1}$$

为正。因之，关于一极小的标准条件已经满足。这一证明真正是“变分的”，而且（鉴于要明白算出斜率函数 p 所出现的困难）要寻求一个更初等的证明也许有困难。

但在证明中有一点需要加以说明，“一般理论”假定 y' 是连续的，而它的结论，特别是关于解的唯一性方面，如何推广到这里所考虑的更一般的 y ，则可能是不明显的。

我们现用 I^{2p} 表示 L^{2p} 中的函数的积分 y 所成之类， I^* 表示连续函数的积分所成之类。一般理论指出，对于一异于 Y 的 y^* ，

$$J(y^*) > J(Y), \quad (7.6.3)$$

而我们则要求对于 I^{2p} 中的任何 y 都有同样的结果。我们可以用一系列函数 y^* 逼近 I^{2p} 中一异于 Y 的 y ，使得

$$J(y) = \lim J(y^*);$$

但这时从(7.6.3)所能得出的不过是

$$J(y) \geq J(Y),$$

在取极限的过程中，严格的不等式失效。

若我们另外来考察这一问题，这项困难即告消失。一般理论不仅证明了不等式(7.6.3)，而且也证明了恒等式

$$J(y^*) - J(Y) = \int \mathcal{E}(y^*) dx,$$

其中 $\mathcal{E}(y^*)$ 是与 y^* 和场 $y = \alpha Y$ 相应的过量函数。用一系列适当的 y^* 逼近 y ，我们即将此恒等式代之以

$$J(y) - J(Y) = \int \mathcal{E}(y) dx,$$

而此积分为正，除非 $y = Y$ 。

(ii) $y(1) = 0$ 的情形也可类似地讨论，因此时 $y = 0$ 是一满足条件的极值，而且包含在 (i) 中所用的场 $y = \alpha Y$ 中。

若我们关于 $y(1)$ 的值不作假定，这一证明可以另外安排。这问题于是就是一个具有“变动端点”的问题，任务是要对于过原点与直线 $x = 1$ 相交的直线确定极小的 $J(y)$ 。诸极值“横截过”（在

这一情形則是直交于)此直綫,且所有的曲綫 $y = \alpha Y$ 皆滿足此条件。一般的理論指出所有这些极值皆給出同一的 $J(y)$ 值,而这一值則必为 0,因当 $\alpha = 0$ 时它为 0¹⁾。

7.7. 另外的例子: Wirtinger 不等式. (II) 我們更詳細地考虑 (I) 中 $k = 1$ 的情形。若 $y(0) = 0$, 且 y 不是 $\sin x$ 的一倍数,則將上下限改变,結果即为

$$\int_0^{\pi/2} y^2 dx < \int_0^{\pi/2} y'^2 dx. \quad (7.7.1)$$

从一般理論,我們可以联想到存在形如

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (y'^2 - y^2) dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \{y' - y\psi(x)\}^2 dx$$

或

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \{y^2(1 + \psi^2) - 2yy'\psi\} dx = 0$$

的恆等式。若

$$y^2(1 + \psi^2) dx - 2y\psi dy$$

是一完全微分 dz , 且 z 在上下限为 0, 則此显然成立;而要这样,則要求

$$-\psi' = 1 + \psi^2, \quad \psi = -\tan(x + k),$$

在此种情形, $z = -\psi y^2$ 。若我們取 $k = \frac{1}{2}\pi$, $\psi = \cot x$, 則 z 当 $x = \frac{1}{2}\pi$ 时为 0; 又因 y' 属于 L^2 , 因而²⁾ $y = o(x^{\frac{1}{2}})$, z 当 $x = 0$ 时亦为 0。由是我們即得

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (y'^2 - y^2) dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (y' - y\cot x)^2 dx, \quad (7.7.2)$$

这使(7.7.1)变得显而易见。

將(7.7.2)稍加修改,則得

257. 若 $y(0) = y(\pi) = 0$, 且 y' 属于 L^2 , 則

$$\int_0^{\pi} y^2 dx < \int_0^{\pi} y'^2 dx,$$

1) 这些注釋应归功于 Bliss.

2) 定理 222.

除非

$$y = C \sin x.$$

盖对于小的 x , $y = o(x^{\frac{1}{2}})$; 对于靠近 π 的 x , $y = o\{(\pi - x)^{\frac{1}{2}}\}$,
故 $y^2 \cot x$ 在上下限皆为 0. 因之,

$$\int_0^\pi (y'^2 - y^2) dx = \int_0^\pi (y' - y \cot x)^2 dx. \quad (7.7.3)$$

将 (7.7.2) 作另外的修改, 则可得出一个更值得注意的属于 Wirtinger 的定理²⁾.

258. 若 y 具有周期 2π , y' 属于 L^2 , 且

$$\int_0^{2\pi} y dx = 0, \quad (7.7.4)$$

则

$$\int_0^{2\pi} y^2 dx < \int_0^{2\pi} y'^2 dx,$$

除非

$$y = A \cos x + B \sin x.$$

我們还不能立刻写下一个与 (7.7.2) 或 (7.7.3) 相似但以 $0, 2\pi$ 为上下限的恆等式, 因为 $y \cot x$ 通常在积分范围内总有无数值, 但我們可以如下来論証³⁾.

函数

$$z(x) = y(x + \pi) - y(x)$$

对于变数 x 和 $x + \pi$ 具有相反的符号, 因而在 $(0, \pi)$ 中至少有一次为 0. 我們假設 $z(\alpha) = 0$, 其中 $0 \leq \alpha < \pi$, 并令 $y(\alpha) = a$. 因 y' 属于 L^2 , $(y - a)^2 \cot(x - \alpha)$ 当 $x = \alpha$ 和 $x = \alpha + \pi$ 时⁴⁾ 为 0; 且

1) 定理 222.

2) 参考 Blaschke [1, p. 105]. 最直接的証明是把 Parseval 定理运用于 Fourier 展式

$$y \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad y' \sim \sum (nb_n \cos nx - na_n \sin nx) \\ (a_0 = 0).$$

3) 下述的証明是由 Hans Lewy 告知我們的.

4) 正如在 § 7.4 中以及上面一样, 运用定理 222.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} [y'^2 - (y-a)^2 - \{y' - (y-a)\cot(x-\alpha)\}^2] dx &= \\ &= [(y-a)^2 \cot(x-\alpha)]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

因之, 利用(7.7.4), 則得

$$\int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2) dx = 2\pi a^2 + \int_0^{2\pi} \{y' - (y-a)\cot(x-\alpha)\}^2 dx,$$

上式常为正, 除非 $a=0$ 且

$$y' \equiv y \cot(x-\alpha), \quad y = C \sin(x-\alpha).$$

定理 258 之所以特別值得注意, 是因为圓的古典的等周性質的証明可以以之為根据. 我們現來考慮一簡單閉曲綫 C , 其面积为 A , 周长为 L , 并取

$$\phi = \frac{2\pi s}{L}$$

作为参数, 其中 s 是曲綫的弧长, 因而

$$x = x(\phi), \quad y = y(\phi) \quad (0 \leq \phi \leq 2\pi).$$

为簡單起見, 我們可設 x' 和 y' 为連續; 对于更一般的 x, y , 証明仍然有效. 不失其普遍性, 我們也可假定曲綫之周长的重心在 x 軸上, 因而

$$\int_0^{2\pi} y \, d\phi = 0.$$

于是, 我們有

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2 &= \left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right\} \frac{L^2}{4\pi^2} = \frac{L^2}{4\pi^2}, \\ \frac{L^2}{2\pi} - 2A &= \int_0^{2\pi} \left\{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2\right\} d\phi + 2 \int_0^{2\pi} y \frac{dx}{d\phi} d\phi^{1)} \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{dx}{d\phi} + y\right)^2 d\phi + \int_0^{2\pi} \left\{\left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2 - y^2\right\} d\phi \\ &\geq \int_0^{2\pi} \left\{\left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2 - y^2\right\} d\phi \geq 0. \end{aligned}$$

1) 或 $-2 \int_0^{2\pi} y \frac{dx}{d\phi} d\phi$, 这是按照当我们依一給定的意向沿曲綫經過时, s 的变化意向而定.

最后一个不等式用到了定理 258, 等号只当

$$y = A \cos \phi + B \sin \phi,$$

因而

$$x = - \int y d\phi = - A \sin \phi + B \cos \phi + C$$

时成立, 此时曲线为一圆¹⁾.

7.8. 包含二次导数的一个例子. (III) 如所周知²⁾, 若 f 对 $x \geq 0$ 具有二次导数, μ_0, μ_1, μ_2 是 $|f|, |f'|, |f''|$ 的上界, 则

$$\mu_1^2 \leq 4\mu_0\mu_2.$$

从这使我们联想起, 在积分

$$J_0 = \int_0^\infty |f|^p dx, J_1 = \int_0^\infty |f'|^p dx, J_2 = \int_0^\infty |f''|^p dx$$

可能有一相应的关系, 于此 $p \geq 1$. 下之定理对 $p = 2$ 这一情形解决了这一问题.

259. 若 y 和 y'' 属于 $L^2(0, \infty)^3)$, 则

$$\left(\int_0^\infty y'^2 dx \right)^2 < 4 \int_0^\infty y^2 dx \int_0^\infty y''^2 dx,$$

除非 $y = AY(Bx)$, 其中

$$Y = e^{-\frac{1}{2}x} \sin(x \sin \gamma - \gamma) \quad \left(\gamma = \frac{1}{3} \pi \right),$$

此时等号成立.

若我们来考虑由“设 $J_0 = \int_0^\infty y^2 dx$ 和 $J_2 = \int_0^\infty y''^2 dx$ 为已知, 求 $J_1 = \int_0^\infty y'^2 dx$ 的极大”所定义的变分法中的“等周”问题, 我们就要对

$$\int_0^\infty (y'^2 - \lambda y^2 - \mu y''^2) dx$$

做起 Euler 方程. 它是形如

1) 这证明在原则上即 Hurwitz^[1] 的证明, 但区别在于我们没有使用 Fourier 级数论, 并且我们非对称的对待 x 与 y .

2) Landau [2, 3].

3) 依照 § 7.1 所作之规定, y' 是 y'' 的积分, y 是 y' 的积分.

$$ay^{(iv)} + by'' + Cy = 0$$

的一个綫性方程，其解为实指数或复指数的綫性組合。当我们試图以最有利的方法去选取参数时，我們就需要考虑函数 Y 。

看起来要利用一般理論順着这些路綫去完成証明，似乎有困难。我們將从下述較为简单的理論导出定理 259。

260. 在定理 259 的假定之下，

$$J(y) = \int_0^\infty (y^2 - y'^2 + y''^2) dx > 0,$$

除非 $y = AY$ ，此时等号成立。

我們对这定理給出几个証明，用来闡明各种方法。前两个本身是初等的；第三个我們只給出一个大綱，它把作为其它两者的基础的变分理論变得明朗。

我們先作一点必要的說明，即 J_1 是有限的。

要証明这一点，我們有

$$\int_0^x y'^2 dx = [yy']_0^x - \int_0^x yy'' dx. \quad (7.8.1)$$

因 J_0 和 J_2 为有限，后一积分当 $X \rightarrow \infty$ 时趋于一有限极限¹⁾。若 J_1 为无限，則 yy' ，更不用說

$$y^2 = 2 \int yy' dx,$$

必趋于无穷。但由于 J_0 为收斂，这是不可能的。因之， J_0 为有限，且(7.8.1)中所有之三項趋于极限。特別， yy' 趋于一限，此限只能为 0 (仍是由于 J_0 的收斂性)。

(1) 我們的第一个証明多少是按照 § 7.4 中的路綫来进行。容易証明

$$Y + Y' + Y'' = 0, Y(0) + Y'(0) = 0, Y''(0) = 0$$

和

$$J(Y) = 0^{2)}.$$

我們現令

$$y = z + cY,$$

1) 由定理 181.

2) 这需要一点計算。

并选取 c 使得 $z(0) = 0$, 于是 z, z' 及 z'' 皆属于 L^2 . 对于大的 x, z 和 z' 皆为 $o(x^{\frac{1}{2}})$ ¹⁾, 且 $zz' \rightarrow 0$.

但

$$J(y) = J(z) + 2cK(Y, z) + c^2J(Y),$$

其中

$$\begin{aligned} K &= \int_0^\infty (Yz - Y'z' + Y''z'')dx \\ &= -\int_0^\infty (Y' + Y'')zdx - \int_0^\infty (Y + Y')z''dx \\ &\quad - \int_0^\infty Y'z'dx = \int_0^\infty (Y + Y' + Y'')z'dx = 0. \end{aligned}$$

因之, $J(y) = J(z)$, 故只須証明 $J(z) > 0$, 除非 $z = 0$. 但因 $z(0) = 0$, 且当 $x \rightarrow \infty$ 时, $zz' \rightarrow 0$, 故

$$\int_0^\infty z'^2 dx = - \int_0^\infty zz'' dx,$$

因而

$$J(z) = \int_0^\infty (z^2 + zz'' + z''^2) dx > 0,$$

除非 $z = 0$. 此即証明定理 260.

(2) 我們可以設法(依据 § 7.5 和 § 7.7 中的路綫)把定理 260 化为依赖于一个恆等式. 为此, 我們將使

$$\{y^2 - y'^2 + y''^2 - (y'' + \phi y + \psi y')^2\} dx \quad (7.8.2)$$

成为一完全微分; ϕ 与 ψ 的最簡單的取法是 $\phi = \psi = 1$, 此时 (7.8.2) 化为

$$-d(y + y')^2.$$

于是,

$$\int_0^x \{y^2 - y'^2 + y''^2 - (y'' + y + y')^2\} dx = -[(y + y')^2]_0^x.$$

因 J_0, J_1, J_2 皆为有限, 故左边当 $X \rightarrow \infty$ 时有一极限²⁾. 又 $yy' \rightarrow 0$,

1) 由定理 223.

2) 积分

$$\int_0^\infty yy' dx, \int_0^\infty y'y'' dx, \int_0^\infty yy'' dx$$

由定理 181 皆为收敛.

因而 $y^2 + y'^2$ 趨于一限, 它只能為 0. 由此即得

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty (y^2 - y'^2 + y''^2) dx \\ &= \{y(0) + y'(0)\}^2 + \int_0^\infty (y + y' + y'')^2 dx, \end{aligned} \quad (7.8.3)$$

它常為正, 除非

$$y'' + y' + y = 0$$

且

$$y(0) + y'(0) = 0.$$

由這兩個條件即得 $y = AY$.

(3) 作為上述證明的基礎的變分理論比之 § 7.5 中所述者要稍微複雜一些. 若令

$$y' = z, \quad (7.8.4)$$

$$J(y) = J(y, z) = \int_0^\infty (y^2 - y'^2 + z'^2) dx, \quad (7.8.5)$$

並設

$$y(0) = 1, z(0) = \zeta, y(\infty) = 0, z(\infty) = 0, \quad (7.8.6)$$

則問題即為一“Lagrange 問題”, 即在條件(7.8.4)和(7.8.6)之下求 $J(y, z)$ 的極小值的問題.

在空間 (x, y, z) 中場的極值是由

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'} \right) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z'} \right) = 0 \quad (7.8.7)$$

給出¹⁾, 其中

$$\Phi = F - \lambda(y' - z) = y^2 - y'^2 + z'^2 - \lambda(y' - z),$$

λ 是 x 之一函數, 由諸方程本身所定義. 在現刻的情形, 方程(7.8.7)化為

$$2y + \frac{d}{dx} (2y' + \lambda) = 0, \quad \lambda = \frac{d}{dx} (2z'), \quad (7.8.8)$$

由此及(7.8.4), 即得

$$y^{(IV)} + y'' + y = 0. \quad (7.8.9)$$

1) 關於一般理論的論述, 可參考 Bliss [2].

(7.8.9)的最一般的解中,使 y 和 z 在无穷处为 0 者,是

$$y = ae^{-\rho x} + \bar{a}e^{-\bar{\rho}x}, \quad (7.8.10)$$

其中 $\rho = e^{\frac{1}{2}\pi i}$, 一横表示共轭数,

方程(7.8.10)和

$$z = -a\rho e^{-\rho x} - \bar{a}\bar{\rho}e^{-\bar{\rho}x}, \quad (7.8.11)$$

$$\lambda = 2ae^{-\rho x} + 2\bar{a}e^{-\bar{\rho}x} \quad (7.8.12)$$

定义了一个过 $(\infty, 0, 0)$ 的双参数极值“場”. 域的“斜率函数” p, q 和“乘数” λ 乃是将极值的斜率和由 (7.8.8) 所定义的 λ 用 x, y, z 表出所得到的函数

$$p(x, y, z), q(x, y, z), \lambda(x, y, z).$$

經直接計算,可得

$$p = z, \quad q = -y - z, \quad (7.8.13)$$

$$\lambda = 2y^D. \quad (7.8.14)$$

推广的 Hilbert 积分是

$$J^* = \int [(\Phi - p\Phi_p - q\Phi_q)dx + \Phi_p dy + \Phi_q dz].$$

这一积分具有与 § 7.5 中的积分相应的性质;它与端点之间的路径无关,它沿一极值(曲线)的值与

$$J = \int F dx$$

的值相同. 又若 E 为极值, C 是连接 E 的端点的任何别的曲线, 則有

$$J_C - J_E = J_C - J_E^* = J_C - J_C^* = \int_C \mathcal{E} dx, \quad (7.8.15)$$

其中 $\mathcal{E}$ 是过量函数, 在这里是由下式定义:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \Phi(x, y, z, y', z', \lambda) - \Phi(x, y, z, p, q, \lambda) \\ & - (y' - p)\Phi_p - (z' - q)\Phi_q. \end{aligned}$$

在現在的情形, 我們有

1) p, q, λ 先是 x 和极值的参数 $a, \bar{a}$ 的函数. 特別, 在这里有

$$y' = -a\rho e^{-\rho x} - \bar{a}\bar{\rho}e^{-\bar{\rho}x}, \quad z' = a\rho^2 e^{-\rho x} + \bar{a}\bar{\rho}^2 e^{-\bar{\rho}x} = -y - z,$$

$$\lambda = 2x'' = -2a\rho^3 e^{-\rho x} - 2\bar{a}\bar{\rho}^3 e^{-\bar{\rho}x} = 2y.$$

$$\mathcal{E} = (y + z + z')^2 - (y' - z)^2, \quad (7.8.16)$$

$$J_E = (1 + \zeta)^2.$$

因 $\mathcal{E}$ 当 $y' = z$ 时化为 $(y + y' + z)^2$, 我們有

$$\int_0^\infty (y^2 - y'^2 + z'^2) dx = (1 + \zeta)^2 + \int_0^\infty (y + y' + z')^2 dx,$$

此即(7.8.3). 由是, 我們即以三种不同的方法証明了定理 260.

我們已經假定 $y(0) \neq 0$, 因此可取 $y(0) = 1$. $y(0) = 0$ 可以同法討論¹⁾.

我們的目的只是要闡明一个方法, 而不是去討論一个很难的一般理論, 因此我們就很簡略的表达我們的論証. 下面的說明²⁾可能有助于了解这个方法.

(a) 从极值的双参数組构造出来的积分 J^* 不必是不变的. 在这里, 我們可以直接証明 J^* 的不变性; 事实上,

$$J^* = - \int d(y + z)^2.$$

这一不变性保証了我們的极值做成一“場”. “理由”在下之事实中找到: 它們皆經過一个定点, 而且 y, z 和 λ 当 $x = \infty$ 时皆为 0.

(b) 在現刻的情形, Φ 为二次,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \{ (y' - p)^2 \Phi_{pp} + 2(y' - p)(z' - q) \Phi_{pq} + (z' - q)^2 \Phi_{qq} \},$$

由此立可得出公式(7.8.16).

(c) 設 E 和 C 定义如上, E_0 是 x 的正軸, L 是連接 $(0, 1, \zeta)$ 与原点的任一曲綫, 則

$$\begin{aligned} J_C &= J_C - J_{E_0} = J_C - J_{E_0}^* = J_L^* + J_C - J_{L+E_0}^* \\ &= J_L^* + J_C - J_C^* = J_L^* + \int_0^\infty \mathcal{E} dx \\ &= (1 + \zeta)^2 + \int_0^\infty (y + y' + y'')^2 dx. \end{aligned}$$

1) 比較 § 7.6.

2) 对于这点, Bliss 和 L. C. Young 曾給予帮助.

此即 (7.8.3); 这一証法避开了直接去計算 J_E . 若不这样, 我們可作如下論証:

$$J_C - J_E = \int_0^\infty \mathcal{E} dx,$$

$$J_E = J_E^* = J_L^* + J_{E_0}^* = (1 + \zeta)^2.$$

要想从定理 260 导出定理 259, 我們可将上之定理运用于 $y\left(\frac{x}{\rho}\right)$ 以代 $y(x)$, 于是即得

$$\rho^4 J_0 - \rho^2 J_1 + J_2 = \int_0^\infty (\rho^4 y^2 - \rho^2 y'^2 + y''^2) dx > 0.$$

因上式对所有之 ρ 皆成立, 特別当 $\rho^2 = J_1/2J_0$ 时成立, 故知 $J_1^2 < 4J_0J_2$, 除非 $y(x/B) = AY(x)$.

7.9. 一个較简单的定理. 值得注意的是, 对于区間 $(-\infty, \infty)$, 相应的定理是大为初等而且全然不同.

261. 若 y 和 y' 属于 $L^2(-\infty, \infty)$, 則

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} y'^2 dx\right)^2 < \int_{-\infty}^{\infty} y^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} y''^2 dx,$$

除非 $y = 0$. (单位)常数为最好者.

事实上(正如在定理 260 的証明中那样), $yy' \rightarrow 0$, 而且

$$J_1^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} y'^2 dx\right)^2 = \left(-\int_{-\infty}^{\infty} yy'' dx\right)^2 < \int_{-\infty}^{\infty} y^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} y''^2 dx = J_0 J_2.$$

要証明常数是最好的, 当 $|x| \leq n\pi$ 时我們取 $y = \sin x$, 当 $|x| > n\pi$ 时取 $y = 0$, 并把在 $x = \pm n\pi$ 处之角弄圓, 以使 y'' 为連續. 在把角弄圓时, 我們显然可以做得使三个积分所发生的改变当 $n \rightarrow \infty$ 时为有界, 于是每一积分与 $n\pi$ 相差一有界之数 (即各积分等于 $n\pi + O(1)$), 因而当 n 充分大时, 有

$$J_1^2 > (1 - \varepsilon) J_0 J_2.$$

各种定理及各种例

262. 若 $y(0) = y(1) = 0$, 且 y' 属于 L^2 , 則

$$\int_0^1 \frac{y^2}{x(1-x)} dx < \frac{1}{2} \int_0^1 y'^2 dx,$$

除非 $y = cx(1-x)$.

[若

$$J(y) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} y'^2 - \frac{y^2}{x(1-x)} \right) dx,$$

則 (E) 为

$$x(1-x)y'' + 2y = 0.$$

不管 α 为何, $y = \alpha x(1-x)$ 是一满足条件的极值. 变动 α , 我們可以定义一个环绕任何給定的极值的場¹⁾. 可以看出, 在这情形, $J(Y) = 0$,

$$p = \frac{1-2x}{x(1-x)} y, \quad W = \frac{1-2x}{2x(1-x)} y^2, \\ \mathcal{E} = \frac{1}{2} \left\{ y' - \frac{1-2x}{x(1-x)} y \right\}^2.$$

基础的恆等式是

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} y'^2 - \frac{y^2}{x(1-x)} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(y' - \frac{1-2x}{x(1-x)} y \right)^2 dx.$$

这定理应与定理 225 相比較. 关于利用 Legendre 函数作出的这两个定理的証明, 以及更完备的細节, 可参考 Hardy 和 Littlewood [10].]

$$\text{263. 若 } J = \int_0^\infty y^2 dx, \quad K = \int_0^\infty y'^2 dx, \text{ 則} \\ 4JK > \{y(0)\}^4,$$

除非 $y = ae^{-bx}$.

264. 若

$$(a) \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 1, \quad y'(-1) = y'(1) = 0,$$

k 为一正整数, 則

$$\int_{-1}^1 (y'')^{2k} dx \geq 2 \left(\frac{4k-1}{2k-1} \right)^{2k-1},$$

除非

1) 这个場在性质上与 § 7.5 中所述者稍有不同, 因各极值皆过 $(0, 0)$ 和 $(1, 0)$.

$$y = \frac{4k-1}{2k}x - \frac{2k-1}{2k}x^{(4k-1)/(2k-1)};$$

否則不等号成立.

[这是 § 7.8 中的理論的一个例子, 比正文中的要簡單. 在現在的情形,

$$\mathcal{E} = z'^{2k} - q^{2k} - 2k(z' - q)q^{2k-1}.]$$

265. 若 y 滿足(a), 且对 $(-1, 1)$ 中之每一 x , 具有二阶导数 y'' , 則对某些 x , $|y''(x)| > 2$.

[这一容易直接証明的定理, 相当于定理 264 的极限情形 $k = \infty$. 定理 264 的极值曲綫化为

$$y = 2x - x^2 \operatorname{sgn} x.$$

对于这一曲綫, $y' = 2(1 - |x|)$, 且除 $x=0$ 之外, $y'' = -2 \operatorname{sgn} x$. 在 origin 无二阶导数.]

266. 若 y 属于 L^2 , $z' = y$, 且

$$y(0) = y(2\pi) = z(0) = z(2\pi) = 0,$$

則

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ y' + \frac{(x \cos x - \sin x)y + (1 - \cos x)z}{2 - 2\cos x - x \sin x} \right\}^2 dx. \end{aligned}$$

[这一恆等式給出了定理 258 的另一(虽然不太簡單)証明, 乃是依照 § 7.8 的綫索, 把 Wirtinger 不等式作为 Lagrange 問題的一种情形来处理的結果.]

267.

$$\int_0^\infty (y^2 + 2y'^2 + y''^2) dx > \frac{3}{2} \{y(0)\}^2,$$

除非

$$y = Ce^{-x}(x+2).$$

268. 若 $k \geq 1$, y 与 y'' 属于 $L^k(-\infty, \infty)$ 或 $L^k(0, \infty)$, 則

$$\left(\int |y'|^k dx \right)^2 \leq K(k) \int |y|^k dx \int |y''|^k dx,$$

积分系就所考虑的区间而取者,

269. 若 $k > 1$, y 与 y'' 分别属于 L^k 和 $L^{k'}$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} y'^2 dx < \left(\int_{-\infty}^{\infty} |y|^k dx \right)^{1/k} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |y''|^{k'} dx \right)^{1/k'},$$

除非 y 为 0.

270. 若 y' 属于 L^2 , 则

$$(i) \quad \int_0^{\infty} \frac{y^4}{x^3} dx < \frac{3}{2} \left(\int_0^{\infty} y'^2 dx \right)^2,$$

除非

$$(ii) \quad y = \frac{x}{ax + b},$$

其中 a 与 b 为正. 在此种情形等号成立. 更一般言之, 若

$$(iii) \quad l > k > 1, \quad r = \frac{l}{k} - 1,$$

y' 为正且属于 L^k , 则

$$(iv) \quad \int_0^{\infty} \frac{y^l}{x^{l-r}} dx < K \left(\int_0^{\infty} y'^k dx \right)^{l/k},$$

其中

$$(v) \quad K = \frac{1}{l-r-1} \left[\frac{r\Gamma(l/r)}{\Gamma(1/r)\Gamma\{(l-1)/r\}} \right],$$

除非

$$(vi) \quad y = \frac{x}{(ax^r + b)^{1/r}}.$$

[容易证明一个形如 (i) 但常数差一些的不等式. 例如若将 (i) 中的积分分别记作 K 和 J , 则有

$$y^2 = \left(\int_0^x y' dt \right)^2 \leq Jx,$$

因而由定理 253,

$$K = \int_0^{\infty} \frac{y^4}{x^3} dx \leq J \int_0^{\infty} \frac{y^2}{x^2} dx < 4J^2.$$

我們不知道这个完整結果的任何初等証明. 对于变分証明的細節, 該証明的比定理 260 的要困难得多, 我們可參考 Bliss[3].]

271. 若 $\alpha > 1$, $\mathcal{G}(f)$ 是 f 在 $(0, x)$ 上的几何平均, 則

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \mathcal{G}^{\alpha}(f) dx < \frac{1}{\alpha-1} \left\{ \Gamma\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) \right\}^{1-\alpha} \left(\int_0^{\infty} f dx \right)^{\alpha},$$

除非

$$f \equiv C \exp(-Bx^{\alpha-1}).$$

[参考 Hardy 与 Littlewood [7]. 极限情形 $\alpha = 1$ 相当于定理 335.]

272. 在問題

“設 $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 y^2 dx$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty} y'^2 dx$ 为已知, 求 $\int_{-\infty}^{\infty} y^2 dx$ 的极大”中, Euler

方程为

$$y'' + (a + bx^2)y = 0.$$

它可借助拋物圓柱函数来解出. 若 $b = -a^2 = -(2c)^2$, 則它有一解 $y = e^{-cx^2}$.

[这給出了 Weyl 不等式的变分基础(參看定理 226).]

第八章 有关双綫性形式和多綫性形式的一些定理

8.1. 导引. 在本章中,我們将要証明若干有关双綫性和多綫性形式的极大值的一般性定理. 在本章的前面部分中,我們將討論 n 組变数的形式,但假定变数和系数皆为正. 之后,我們將取消这一限制,但假定 $n = 2$; 本章后面的部分大半是用来証明 M. Riesz 的一个有关具有复变数和复系数的双綫性形式的重要定理.

正多綫性形式

8.2. 具有正变数和正系数的多綫性形式不等式. 我們假定

$$x_i, y_j, \dots, z_k$$

为 n 組变数, $i, j, \dots, k$ 从 $-\infty$ 跑到 ∞ ; 又設

$$\sum, \sum_i, \sum_i'$$

分別表示关于所有的附标求和,只关于 i 求和,关于 $j, \dots, k$ (除 i 以外所有的附标)求和. 和数

$$S = \sum a_{ij\dots k} x_i y_j \dots z_k$$

称为变数 $x, y, \dots, z$ 的一多綫性形式. 当 n 是 1, 2, 3 时,这个形式称为綫性的,双綫性的,三綫性的.

若此級数为绝对收敛,則

$$S = \sum_i x_i \sum_i' a_{ij\dots k} y_j \dots z_k = \sum_j y_j \sum_j' a_{ij\dots k} x_i \dots z_k = \dots,$$

273. 設

$$0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1, \dots, 0 < \gamma \leq 1, \quad (8.2.1)$$

且

$$0 \leq \frac{\alpha + \beta + \dots + \gamma - 1}{n - 1} \leq \min(\alpha, \beta, \dots, \gamma); \quad (8.2.2)$$

又設 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots, \bar{\gamma}$ 由

$$\alpha - \bar{\alpha} = \beta - \bar{\beta} = \dots = \gamma - \bar{\gamma} = \frac{\alpha + \beta + \dots + \gamma - 1}{n - 1} \quad (8.2.3)$$

所定義(因而 $0 \leq \bar{\alpha} \leq \alpha, \dots, 0 \leq \bar{\gamma} \leq \gamma$), $\rho, \sigma, \dots, \tau$ 皆為正, 且

$$\bar{\alpha}\rho + \bar{\beta}\sigma + \dots + \bar{\gamma}\tau = 1. \quad (8.2.4)$$

此外, 更設

$$x_i \geq 0, y_i \geq 0, \dots, z_k \geq 0, a_{ij\dots k} \geq 0, \\ \sum_i x_i^{1/\alpha} \leq X, \sum_j y_j^{1/\beta} \leq Y, \dots, \sum_k z_k^{1/\gamma} \leq Z, \quad (8.2.5)$$

$$\sum_i' a_{ij\dots k}^\rho = A_i \leq A, \sum_j' a_{ij\dots k}^\sigma = B_j \leq B, \quad (8.2.6)$$

$$\dots, \sum_k' a_{ij\dots k}^\tau = C_k \leq C,$$

則

$$S = \sum a_{ij\dots k} x_i y_j \dots z_k \leq A^{\bar{\alpha}} B^{\bar{\beta}} \dots C^{\bar{\gamma}} X^{\alpha} Y^{\beta} \dots Z^{\gamma}.$$

事實上, 我們有

$$1 - \bar{\alpha} - \bar{\beta} - \dots - \bar{\gamma} = \frac{\alpha + \beta + \dots + \gamma - 1}{n - 1} \\ = \alpha - \bar{\alpha} = \beta - \bar{\beta} = \dots,$$

因而由定理 11¹⁾, 有

$$S = \sum (a^\rho x^{1/\alpha})^{\bar{\alpha}} (a^\sigma y^{1/\beta})^{\bar{\beta}} \dots (a^\tau z^{1/\gamma})^{\bar{\gamma}} (x^{1/\alpha} y^{1/\beta} \dots z^{1/\gamma})^{1-\bar{\alpha}-\bar{\beta}-\dots-\bar{\gamma}} \\ \leq (\sum a^\rho x^{1/\alpha})^{\bar{\alpha}} (\sum a^\sigma y^{1/\beta})^{\bar{\beta}} \dots (\sum a^\tau z^{1/\gamma})^{\bar{\gamma}} \\ \times (\sum x^{1/\alpha} y^{1/\beta} \dots z^{1/\gamma})^{1-\bar{\alpha}-\bar{\beta}-\dots-\bar{\gamma}} \\ = \left(\sum_i x^{1/\alpha} \sum_i' a^\rho \right)^{\bar{\alpha}} \dots \left(\sum_k z^{1/\gamma} \sum_k' a^\tau \right)^{\bar{\gamma}} \\ \times \left(\sum_i x^{1/\alpha} \dots \sum_k z^{1/\gamma} \right)^{1-\bar{\alpha}-\dots-\bar{\gamma}} \\ \leq (AX)^{\bar{\alpha}} \dots (CZ)^{\bar{\gamma}} (XY \dots Z)^{1-\bar{\alpha}-\dots-\bar{\gamma}} \\ = A^{\bar{\alpha}} B^{\bar{\beta}} \dots C^{\bar{\gamma}} X^{\alpha} Y^{\beta} \dots Z^{\gamma}.$$

1) 推广到无穷级数: 我們將不常常重复这一說明.

我們來注意一些特殊情形。

(1) 若

$$\alpha + \beta + \cdots + \gamma = 1,$$

則

$$\bar{\alpha} = \alpha, \bar{\beta} = \beta, \cdots, \bar{\gamma} = \gamma.$$

定理的敘述即變得比較簡單。

(2) 當 $n = 2$ 時, 條件(8.2.2)的第二項自然成立。若令¹⁾

$$\alpha = \frac{1}{p}, \beta = \frac{1}{q},$$

則

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{q'}, \bar{\beta} = \frac{1}{p'}.$$

交換 p 與 σ , A 與 B , 則得

274. 若

$$p \geq 1, q \geq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1,$$

$$\rho > 0, \sigma > 0, \frac{\rho}{p'} + \frac{\sigma}{q'} = 1,$$

$$\sum_i a_{ij}^p \leq A, \sum_j a_{ij}^q \leq B, \sum_i x_i^\rho \leq X, \sum_j y_j^\sigma \leq Y,$$

則

$$S = \sum a_{ij} x_i y_j \leq A^{1/p'} B^{1/q'} X^{1/\rho} Y^{1/\sigma}.$$

(3) 一個值得注意但仍然是較為特殊的情形是當 $p = \sigma = 1$, $q = p'$ 的情形。

275. 若

$$p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$\sum_i a_{ij} \leq A, \sum_j a_{ij} \leq B, \sum_i x_i^p \leq X, \sum_j y_j^q \leq Y,$$

1) 在前几章中, 字母 p 和 q 作為平均值的權被保留下來。在本章中, 已不再要求它們用於這一目的, 我們用來作為指標。

則

$$S = \sum \sum a_{ij} x_i y_j \leq (BX)^{1/p} (AY)^{1/q}.$$

关于 $p = q = 2$ 的情形,可参考 Frobenius [1] 和 Schur [1].

8.3. W. H. Young 之一定理. 将定理 274 作另外的特殊化,可得出 W. H. Young 之一不等式,它在 Fourier 級数論中特別重要.

設 $\sigma = \rho > 1$, 因而

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{\rho} < 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1;$$

又取 $a_{ij} = a_{i+j}$. 則对每一 j 和每一 i , 有

$$\sum_i a_{ij}^\rho = \sum_j a_{ij}^\rho = \sum a_n^\rho = A \quad (\text{設}).$$

因之,若令

$$z_n = \sum_{i+j=n} x_i y_j, \quad (8.3.1)$$

則由定理 274, 有

$$\sum a_n z^n = \sum a_{i+j} x_i y_j \leq A^{1/\rho} X^{1/p} Y^{1/q}. \quad (8.3.2)$$

因 (8.3.2) 对于所有使得 $\sum a_n^\rho = A$ 之 a_n 皆成立,故由定理 15, 即得

$$\sum z_n^{\rho'} \leq X^{\rho'/p} Y^{\rho'/q}.$$

当 $\rho = 1$ 时,上式必須代之以 $z_n \leq X^{1/p} Y^{1/q}$.

于是,我們业已証明了(除了列举等号成立的情形之外)下之 Young 定理¹⁾.

276. 若

$$p > 1, \quad q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1,$$

z_n 由 (8.3.1) 定义,則

$$\sum z_n^{\frac{pq}{p+q-pq}} \leq (\sum x_i^p)^{\frac{q}{p+q-pq}} (\sum y_j^q)^{\frac{p}{p+q-pq}}. \quad (8.3.3)$$

1) Young [3, 4, 6]. Young 沒有考慮等号成立的問題.

等号只当所有的 x , 或所有的 y , 或所有的 x 除掉一个之外和所有的 y 除掉一个之外, 皆为 0 时才能出现.

我們現加上一个较为直接的証明, 它使得我們可以解决等号出现的問題. 若令 $1/p = 1 - \lambda$, $1/q = 1 - \mu$, 則 $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\lambda + \mu < 1$, 于是我們可将这定理表成下之形式.

277. 若

$$\lambda > 0, \mu > 0, \lambda + \mu < 1,$$

z 由 (8.3.1) 定义, $\mathfrak{S}_r(x)$ 与 § 2.10 中所定义者同, 則

$$\mathfrak{S}_{1/(1-\lambda-\mu)}(z) \leq \mathfrak{S}_{1/(1-\lambda)}(x) \mathfrak{S}_{1/(1-\mu)}(y), \quad (8.3.4)$$

等号只在定理 276 中所述的情形下出现.

令 $\nu = 1 - \lambda - \mu$, 由定理 11, 有

$$\begin{aligned} (\sum uv)^{\frac{1}{\nu}} &= \left(\sum u^{\frac{\lambda}{\lambda+\nu}} v^{\frac{\mu}{\mu+\nu}} u^{\frac{\nu}{\lambda+\nu}} v^{\frac{\nu}{\mu+\nu}} \right)^{\frac{1}{\nu}} \\ &\leq \left(\sum u^{\frac{1}{\lambda+\nu}} \right)^{\frac{\lambda}{\nu}} \left(\sum v^{\frac{1}{\mu+\nu}} \right)^{\frac{\mu}{\nu}} \sum u^{\frac{1}{\lambda+\nu}} v^{\frac{1}{\mu+\nu}}. \end{aligned}$$

取

$$u = y_{n-i} = y_i, \quad v = x_i,$$

而将此不等式运用于 (8.3.1), 即得

$$z_n^{\frac{1}{\nu}} \leq \left(\sum_i x_i^{\frac{1}{\mu+\nu}} \right)^{\frac{\mu}{\nu}} \left(\sum_j y_j^{\frac{1}{\lambda+\nu}} \right)^{\frac{\lambda}{\nu}} \sum_{i+j=n} x_i^{\frac{1}{\mu+\nu}} y_j^{\frac{1}{\lambda+\nu}}, \quad (8.3.5)$$

$$z_n^{\frac{1}{\nu}} \leq \mathfrak{S}_{\frac{\mu}{\frac{1}{\mu+\nu}}}^{\frac{\mu}{\nu}}(x) \mathfrak{S}_{\frac{\lambda}{\frac{1}{\lambda+\nu}}}^{\frac{\lambda}{\nu}}(y) \sum_{i+j=n} x_i^{\frac{1}{\mu+\nu}} y_j^{\frac{1}{\lambda+\nu}}, \quad (8.3.6)$$

因之,

$$\sum_n z_n^{\frac{1}{\nu}} \leq \mathfrak{S}_{\frac{\mu}{\frac{1}{\mu+\nu}}}^{\frac{\mu}{\nu}}(x) \mathfrak{S}_{\frac{\lambda}{\frac{1}{\lambda+\nu}}}^{\frac{\lambda}{\nu}}(y) \sum_n \sum_{i+j=n} x_i^{\frac{1}{\mu+\nu}} y_j^{\frac{1}{\lambda+\nu}}.$$

因为这里的二重和等于

$$\sum_i \sum_j x_i^{\frac{1}{\mu+\nu}} y_j^{\frac{1}{\lambda+\nu}} = \mathfrak{S}_{\frac{1}{\mu+\nu}}^{\frac{1}{\nu}}(x) \mathfrak{S}_{\frac{1}{\lambda+\nu}}^{\frac{1}{\nu}}(y),$$

故得

$$\sum_n z_n^{\frac{1}{\nu}} \leq \mathfrak{S}_{\frac{1}{\mu+\nu}}^{\frac{1}{\nu}}(x) \mathfrak{S}_{\frac{1}{\lambda+\nu}}^{\frac{1}{\nu}}(y),$$

此即(8.3.4).

我們可以把等号何时出現的問題处理如下.

若不是所有的 x , 也不是所有的 y , 皆为 0, 則存在 n , 使得对于某些滿足关系 $i + j = n$ 的 i, j , 有 $x_i y_j > 0$. 我們把与一对如此的 i, j 相对应的格子点叫做一点 P_n . 对于一个如此的 n , 若于(8.3.5)中, 我們在右边的前两个和数內限于只取与諸点 P_n 相对应的 i 和 j , 則該式仍成立. 若在(8.3.5)等号成立, 則对于此种 i, j , 比值

$$\frac{1}{x_i^{\mu+\nu}} : \frac{1}{y_j^{\lambda+\nu}} : \frac{1}{x_i^{\mu+\nu}} \frac{1}{y_j^{\lambda+\nu}}$$

与 i 和 j 无关, 因而相应的 x_i 以及相应的 y_j 全皆相等. 由是可知, 对于任一 n , 只能有有限个点 P_n .

設对某一 n , 所有这些条件皆滿足, 則在不等式(8.3.6)中等号仍不会出現, 除非与諸 P_n 相应之 i 和 j 包含了使得 $x_i > 0$ 和 $y_j > 0$ 之所有的 i 和 j . 由是可知, 正的 x_i 和 y_j 的总数是有限的. 因而存在唯一的点, 使得 $x_i y_j > 0$ 且 $n = i + j$ 为极小. 对于这一 n , 有一个唯一的 P_n , 而且假若在(8.3.6)中, 对于这一 n , 等号成立, 則除相应的这对 i, j 之外, $x_i = 0, y_j = 0$.

8.4. 推广和类似情形. 定理 276 和 277 有着許多值得注意的特殊情形、类似情形和推广. 我們現在列举其中一些而不加証明.

278. 若 $\lambda > 0, \mu > 0, \dots, \nu > 0, \lambda + \mu + \dots + \nu < 1$, 且

$$w_n = \sum_{i+j+\dots+k=n} x_i y_j \dots z_k,$$

則

$$\Theta_{\frac{1}{1-\lambda-\mu-\dots-\nu}}(w) \leq \Theta_{\frac{1}{1-\lambda}}(x) \Theta_{\frac{1}{1-\mu}}(y) \dots \Theta_{\frac{1}{1-\nu}}(z),$$

除非一集中所有之數皆为 0, 或每一集中除一个之外皆为 0.

279. 若

$$c_n = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k},$$

則

$$\sum c_n^2 \leq (\sum a_n^{\frac{2k}{2k-1}})^{2k-1},$$

除非所有之 a 除一个之外皆为 0.

定理 277—279 按照 § 1.4 的意义来说“关于 Σ 为齐次的”，都具有积分的类似情形.

280. 若 $\lambda > 0, \mu > 0, \lambda + \mu < 1$,

$$\mathfrak{S}_r(f) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^r dx \right)^{1/r},$$

且

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt,$$

則

$$\mathfrak{S}_{\frac{1}{1-\lambda-\mu}}(h) < \mathfrak{S}_{\frac{1}{1-\lambda}}(f)\mathfrak{S}_{\frac{1}{1-\mu}}(g),$$

除非 f 或 g 为 0.

281. 若 $\lambda > 0, \mu' > 0, \lambda + \mu < 1$,

$$\mathfrak{S}_r(f) = \int_0^{\infty} f^r dx,$$

且

$$h(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt,$$

則

$$\mathfrak{S}_{\frac{1}{1-\lambda-\mu}}(h) < \mathfrak{S}_{\frac{1}{1-\lambda}}(f)\mathfrak{S}_{\frac{1}{1-\mu}}(g),$$

除非 f 或 g 为 0.

282. 若 k 为一整数, 且

$$\begin{aligned} \phi(x) = & \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_{k-1}) \times \\ & \times f(x-x_1-\cdots-x_{k-1})dx_1dx_2\cdots dx_{k-1}, \end{aligned}$$

則

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x)dx \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^{\frac{2k}{2k-1}}(x)dx \right)^{2k-1}.$$

283. 若

$$\phi(x) = \int \cdots \int f(x_1) \cdots f(x_{k-1}) f(x - x_1 - \cdots - x_{k-1}) dx_1 \cdots dx_{k-1},$$

积分范围是由

$$x_i \geq 0, \quad \sum x_i \leq x$$

定义, 则

$$\int_0^\infty \phi^2(x) dx \leq \left(\int_0^\infty f^{2k-1}(x) dx \right)^{2k-1}.$$

284. 若 $f(x)$ 具有周期 2π , 且

$$\begin{aligned} \phi(x) = & \frac{1}{(2\pi)^{k-1}} \int_{-\pi}^x \cdots \int_{-\pi}^x f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_{k-1}) \\ & \times f(x - x_1 - \cdots - x_{k-1}) dx_1 dx_2 \cdots dx_{k-1}, \end{aligned}$$

则

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^x \{\phi(x)\}^2 dx \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^x f^{2k-1}(x) dx \right)^{2k-1}.$$

8.5. 在 Fourier 级数中的应用. 定理 279 和 284 在 Fourier 级数论中有着重要的应用, 虽然我们在这里所涉及的函数和系数不是正的, 但已经证明了的定理已足够应用.

先设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 L^2 中的复函数, 又设

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{nix}, \quad \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{nix}$$

是它们的复 Fourier 级数, 众所周知, 有

$$\sum a_n \bar{b}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^x f(x) \overline{g(x)} dx \quad (8.5.1)$$

(一横表示共轭). 特别, 若 $f(x)$ 属于 L^2 , 则

$$\sum |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^x |f|^2 dx. \quad (8.5.2)$$

反之, 若 $\sum |a_n|^2$ 收敛, 则存在 L^2 中之一 $f(x)$, 它以 a_n 为其 Fourier 常数, 且满足 (8.5.2).

这些定理 (“Parseval 定理”和 “Riesz-Fischer 定理”) 已由 Young

和 Hausdorff 加以推广. 令

$$\mathfrak{S}_p(a) = (\sum |a_n|^p)^{1/p}, \quad \mathfrak{S}_p(f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}; \quad (8.5.3)$$

因而 $\mathfrak{S}_p(a)$ 即为 § 2.10 中定义之 $\mathfrak{S}_p(|a|)$, 于是 (8.5.2) 即可写成

$$\mathfrak{S}_2(a) = \mathfrak{S}_2(f). \quad (8.5.4)$$

Young 和 Hausdorff 证明了: 若

$$1 < p \leq 2, \quad (8.5.5)$$

则

$$\mathfrak{S}_{p'}(f) \leq \mathfrak{S}_p(a) \quad (8.5.6)$$

和

$$\mathfrak{S}_p(a) \leq \mathfrak{S}_p(f). \quad (8.5.7)$$

在 p 上所作的限制是必不可少的. 这些定理先是由 Young^[3,4,6] 对一系列特殊的 p 和 p' , 即

$$p = \frac{2k}{2k-1}, \quad p' = 2k \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (8.5.8)$$

给以证明, 然后由 Hausdorff 普遍加以证明.

在这里, 我们只限于讨论 Young 所考虑的情形 (8.5.8). 在这种情形, (8.5.6) 和 (8.5.7) 分别是定理 279 和 284 的系. 例如, 定理 279¹⁾ 中之 c_n 乃是 $\psi = f^k$ 的 Fourier 常数, 因而

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{2k}^k(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^{2k} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\psi|^2 dx \\ &= \sum |c_n|^2 \leq \mathfrak{S}_{2k/(2k-1)}^{2k}(a), \end{aligned}$$

此即 (8.5.6). 同理, a_n^k 乃是定理 284 中之 $\phi(x)$ 的 Fourier 常数, 因而 (8.5.7) 可从定理 284 导出.

对于一般的 p , (8.5.6) 和 (8.5.7) 的证明肯定要困难得多. 可参考 § 8.17.

值得注意一下 (作为 Hölder 不等式的另一应用), (8.5.7) 是如何能够从 (8.5.6) 推导出来的. 令

$$b_n = |a_n|^{p'-1} \operatorname{sgn} a_n = |a_n|^{p'/\bar{a}_n},$$

1) 现在当然是由复数 a 来做成.

若 $a_n \neq 0$ 且 $|n| \leq N$, 否則即令 $b_n = 0$; 又令

$$g(x) = \sum b_n e^{nix}.$$

則因 $\bar{g}$ 是一三角多項式, 有

$$\sum_{-N}^N |a_n|^{p'} = \sum_{-N}^N a_n \bar{b}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

因之, 利用 Hölder 不等式及 (8.5.6), 即得

$$\begin{aligned} \sum_{-N}^N |a_n|^{p'} &\leq \mathfrak{I}_p(f) \mathfrak{I}_{p'}(g) \leq \mathfrak{I}_p(f) \mathfrak{O}_p(b) \\ &= \mathfrak{I}_p(f) \left(\sum_{-N}^N |a_n|^{(p'-1)p} \right)^{1/p} \\ &= \mathfrak{I}_p(f) \left(\sum_{-N}^N |a_n|^{p'} \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

將最後一個因子除左邊, 并讓 N 趨于無窮, 即得 (8.5.7).

8.6. 關於多綫性形式的凸性定理. 在這一節中我們將要証明具有正變數和正系數的多綫性形式的一個簡單而又重要的性質. 我們所証明的定理只不過是 Hölder 不等式的一個系, 但它有用, 而且將要用來作為 § 8.13 中一個較為深刻的定理的導引.

285¹⁾. 設 $a \geq 0, x \geq 0, \dots, z \geq 0$, 又設

$$M_{\alpha, \beta, \dots, \gamma}$$

是

$$S = \sum a_{ij\dots k} x_i y_j \dots z_k$$

關於所有使得

$$\sum x^{1/\alpha} \leq 1, \sum y^{1/\beta} \leq 1, \dots, \sum z^{1/\gamma} \leq 1$$

的 $x, y, \dots, z$ 的上界, 則 $\log M_{\alpha, \beta, \dots, \gamma}$ 在區域 $\alpha > 0, \beta > 0, \dots, \gamma > 0$ 中是 $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ 的一個凸函數.

所謂 n 個變數 $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ 之一凸函數, 我們是指 (§ 3.12) 沿着 $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ 的空間中任一直綫皆為凸的函數.

我們要証明, 若

1) M. Riesz [1]: Riesz 取 $n = 2$.

$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_1 + t_2 = 1,$$

$$\alpha = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2, \beta = t_1\beta_1 + t_2\beta_2, \dots; \gamma = t_1\gamma_1 + t_2\gamma_2,$$

則

$$M_{\alpha, \beta, \dots, \gamma} \leq M_{\alpha_1, \beta_1, \dots, \gamma_1}^{t_1} M_{\alpha_2, \beta_2, \dots, \gamma_2}^{t_2} \quad (8.6.1)$$

今

$$\begin{aligned} S &= \sum axy \cdots z = \sum (ax^{\alpha_1/\alpha} y^{\beta_1/\beta} \cdots z^{\gamma_1/\gamma})^{t_1} (ax^{\alpha_2/\alpha} y^{\beta_2/\beta} \cdots z^{\gamma_2/\gamma})^{t_2} \\ &\leq (\sum ax^{\alpha_1/\alpha} y^{\beta_1/\beta} \cdots z^{\gamma_1/\gamma})^{t_1} (\sum ax^{\alpha_2/\alpha} y^{\beta_2/\beta} \cdots z^{\gamma_2/\gamma})^{t_2}. \end{aligned}$$

因

$$\sum (x^{\alpha_1/\alpha})^{1/\alpha_1} = \sum x^{1/\alpha} \leq 1, \dots,$$

故右边第一个和数不超过 $M_{\alpha_1, \beta_1, \dots, \gamma_1}$; 同理, 第二个和数不超过 $M_{\alpha_2, \beta_2, \dots, \gamma_2}$. 此即証明(8.6.1).

若当 $\alpha, \beta, \dots$ 为 0 时, 我們將条件 $\sum x^{1/\alpha} \leq 1, \sum y^{1/\beta} \leq 1, \dots$ 代之以 $x \leq 1, y \leq 1, \dots$, 則此定理可推广到閉区域 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \dots$ 上去.

例如設 $n = 2$,

$$\sum_i a_{ij} \leq A, \quad \sum_j a_{ij} \leq B,$$

則 $M_{0,1} \leq A, M_{1,0} \leq B$, 因而当 $0 < \alpha < 1$ 时, $M_{\alpha, 1-\alpha} \leq B^\alpha A^{1-\alpha}$. 若 $p > 1, q = p'$, 我們可取 $\alpha = 1/p, 1 - \alpha = 1/q$; 于是即得

$$M_{1/p, 1/q} \leq M_{1,0}^{1/p} M_{0,1}^{1/q} \leq B^{1/p} A^{1/q},$$

这等价于定理 275 中的結果.

关于双綫性形式的一般推論

8.7. 一般的双綫性形式. 直到現在, 我們全是在討論“正的”多綫性形式, 即其变数和系数皆为非負的形式. 最重要的多綫性形式是双綫性形式, 因而在本章中余下的部分以及下章中的大部分皆是从这种或那种观点来討論双綫性形式, 它們一般不是正的.

我們把系数为 a_{ij} 的形式記作 A , 对于其它的字母同样类推. 我們把 § 8.1 中关于指标的变程所作的約定加以改变; 直到 § 8.12 末, $i, j, \dots$ 皆是从 1 跑到 ∞ . 令

$$\mathfrak{S}_r(x) = \mathfrak{S}_r(|x|) = \left(\sum_1^\infty |x_i|^r \right)^{1/r}.$$

我們又令

$$\sum_i a_{ij} x_i = X_j, \quad \sum_j a_{ij} y_j = Y_i. \quad (8.7.1)$$

当这形式为正, 則

$$A = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j = \sum_i x_i Y_i = \sum_j y_j X_j, \quad (8.7.2)$$

而这三个級数中任何一个之收敛必包含其余两者之收敛, 且三者相等. 当这形式为有限时, 方程(8.7.2)对复的 a, x, y 亦成立.

我們將要反复用到下面几个一般性定理¹⁾.

286. 設

$$p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$$

(因而 $p' > 1, q' > 1$), 又設 a, x, y 为实且非負, 則下之三个命題为等价:

$$|A(x, y)| \leq K \mathfrak{S}_p(x) \mathfrak{S}_q(y) \quad (8.7.3)$$

对所有之 x, y 成立²⁾;

$$\mathfrak{S}_{q'}(X) \leq K \mathfrak{S}_p(x) \quad (8.7.4)$$

对所有之 x 成立;

$$\mathfrak{S}_{p'}(Y) \leq K \mathfrak{S}_q(y) \quad (8.7.5)$$

对所有之 y 成立.

287. 下之三个命題为等价:

(i) 在(8.7.3)中不等式成立, 除非 (x_i) 或 (y_j) 为 0;

(ii) 在(8.7.4)中不等式成立, 除非 (x_i) 为 0;

(iii) 在(8.7.5)中不等式成立, 除非 (y_j) 为 0.

288. 当形式为有限时, 定理 286 和 287 对于复变数和复系数之形式亦成立.

1) 对于 $p = q = 2$ 的情形, 可参考 Hellinger 和 Toeplitz [1]; 对于 $q = p'$, 可参考 F. Riesz [1]. 这几个一般性定理的实质是在 M. Riesz [1] 中发现的. 重要的情形当然是 K 取其最小可能值, 亦即是 A 的界的情形 (§ 8.8).

2) 在这里 $A \geq 0$; 但鉴于定理 288, 我們还是写 $|A|$ 代 A .

定理 286 乃是定理 13 和 15 之一简单的系。由(8.7.2)和定理 13 可知,

$$A = \sum_j y_j X_j \leq \Theta_q(y) \Theta_{q'}(X), \quad (8.7.6)$$

因而(8.7.4)是(8.7.3)成立之一充分条件;同时,定理 15 指出,它也是一个必要条件。因之,(8.7.3)和(8.7.4)为等价,同理,(8.7.3)和(8.7.5)为等价。

在(8.7.3)中不等号成立,除非 (y_j) 为 0 或在(8.7.4)中等号成立。因之,定理 287 之第二命题隐含第一命题。若诸 x_i , 因而诸 X_j 已经给定,则由定理 13, 我们可选取一非 0 的 (y_j) 使得(8.7.6)中等号成立。因之,若在(8.7.4)中对于一非 0 之 (x_i) 等号成立,则在(8.7.3)中对于一非 0 之 (x_i) 和 (y_j) 等号成立。故此二命题等价,同理,第一与第三等价。此即证明定理 287。

最后,当形式为有限时¹⁾,全部论证同样也适用于复的 a, x, y 。我们只须用定理 14 代替定理 13 即可。

最重要的是 $q = p', q' = p$ 的情形,此时(8.7.3), (8.7.4) 和 (8.7.5)即变为

$$\begin{aligned} |A| &\leq K \Theta_p(x) \Theta_{p'}(y), \quad \Theta_p(X) \leq K \Theta_p(x), \\ \Theta_{p'}(Y) &\leq K \Theta_{p'}(y). \end{aligned}$$

有界双綫性形式

8.8. 有界双綫性形式的定义。 本章以后的所余部分,除了有另外的明确申明之外,我们皆假定所讨论的形式中变数和系数皆是任意的实数或复数。

我们把所有使得

$$\Theta_p(x) = \Theta_p(|x|) = (\sum |x_i|^p)^{1/p} \leq 1 \quad (8.8.1)$$

成立的数组 (x) 或 $x_1, x_2, \dots$ (不管是实的或复的)所成之集称为空间 $[p]$, 这里的 p 是任一正数;但通常皆是 $p > 1$ 。同理,我们把所有使得

1) 否则在关于 A 的求和次序方面就存在困难。

$$\mathfrak{S}_p(x) \leq 1, \mathfrak{S}_q(y) \leq 1 \quad (8.8.2)$$

的数组 (x, y) 所成之集称为空間 $[p, q]$. 最重要的是 $p = q = 2$ 的情形. 这一空間的重要性首先是由 Hilbert 認識到的, 因而我們可以簡称之为 Hilbert 空間.

在我們的一般的定义中, 若將 $\mathfrak{S}_\infty(x)$ 解釋为 $\max |x|$, 則 p 或 q 可为 ∞ . 于是, 空間 $[\infty, \infty]$ 即为所有使得 $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ 的数组 (x, y) 所成之集.

$$\text{設} \quad A = A(x, y) = \sum \sum a_{ij} x_i y_j \quad (8.8.3)$$

为一双綫性形式. 若对于 $[p, q]$ 中所有之点, 皆有

$$|A_n(x, y)| = \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j \right| \leq M, \quad (8.8.4)$$

其中 M 与 x, y 和 n 无关, 則称 A 在 $[p, q]$ 中为有界. 我們称 A_n 为 A 的一截点 (section, Abschnitt): 一个形式当其各截段为有界时为有界.

显而易见, 若 (8.8.4) 对于所有使得

$$\mathfrak{S}_p(x) = 1, \mathfrak{S}_q(y) = 1 \quad (8.8.5)$$

之 (x, y) 成立, 則它对于 $[p, q]$ 中所有之点也成立. 在这种情形, (8.8.4) 可以写作

$$|A_n(x, y)| \leq M \mathfrak{S}_p(x) \mathfrak{S}_q(y), \quad (8.8.6)$$

而这里两边对 x 和 y 皆为一次齐次式, 因而 (8.8.5) 中之条件就无关重要. 因之, 我們可以取 (8.8.6) 来作有界形式的定义, 此时 (8.8.6) 中之 x, y 不加以限制.

直到現在为止, M 乃是使得 (8.8.4) 或 (8.8.6) 成立的任意一数; 若是如此, 則称 A 为 M 所界, 或 M 是 A 的一界. 一件自然的事情就是把 M 取作这种界中之最小者, 此时我們称該 M 为 A 之界¹⁾.

1) 若 M_n 是在条件

$$\sum_1^n |x_i|^p \leq 1, \quad \sum_1^n |y_j|^q \leq 1$$

之下 A_n 的极大值, 則显然有 $M_n \leq M_{n+1}$, 且 M_n 关于 n 为有界. 因之

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$$

存在, 且为 A 的最小的界.

一个重要的特殊情形是 $p = q$ 且

$$a_{ij} = a_{ji}$$

的情形,此时 A 称为对称的. 在这种情形, A 为有界之充要条件是二次型

$$A(x, x) = \sum \sum a_{ij} x_i x_j$$

为有界. 当我们说 $A(x, x)$ 为有界时,当然是指 $A(x, y)$ 当 x 与 y 相同时为有界,亦即对于所有使得 $\Theta_p(x) = 1$ 的 x , 有

$$|A_n(x, x)| \leq M.$$

首先,条件显然是必要的,而且 $A(x, x)$ 的界显然不超过 $A(x, y)$ 的界. 至于条件之为充分的,这可从恒等式

$$A_n(x, y) = \frac{1}{4} A_n(x + y, x + y) - \frac{1}{4} A_n(x - y, x - y) \quad (8.8.7)$$

得出. 当 $p = 2$ 时,我们还可稍进一步: $A(x, x)$ 的界和 $A(x, y)$ 的界相同. 事实上,若 M 是 $A(x, x)$ 的界,则由(8.8.7)即得

$$\begin{aligned} |A_n(x, y)| &\leq \frac{1}{4} M \sum (|x + y|^2 + |x - y|^2) \\ &= \frac{1}{2} M \sum (|x|^2 + |y|^2) \leq M. \end{aligned}$$

显而易见,当系数 a 为正时,若 A 对非负的 x 与 y 为有界,则它为有界,而且它的界可以只关于这种 x 与 y 来定义. 若

$$A^* = \sum \sum |a_{ij}| x_i y_j$$

为有界, A 称为绝对有界.

8.9. $[p, q]$ 中有界形式的一些性质. 有界形式的理论非常重要,但我们在这里不可能系统的加以讨论. 我们只证明一些结果,仅供用来处理后而将涉及到的一些特殊形式.

我们取 $p > 1, q > 1$, 并一如以往,令

$$p' = \frac{p}{p-1}, \quad q' = \frac{q}{q-1}.$$

289. 若 A 在 $[p, q]$ 中之界为 M , 则对于每一 j 和每一 i 分别有

$$\sum_i |a_{ij}|^{p'} \leq M^{p'}, \quad \sum_j |a_{ij}|^{q'} \leq M^{q'}, \quad (8.9.1)$$

取 $x_j = 1$, 其余所有之 x 为 0, 又除 $y_1, y_2, \dots, y_J$ 之外, 其余所有之 y 为 0. 由 (8.8.6),

$$\left| \sum_1^J a_{ij} y_j \right| \leq M \left(\sum_1^J |y_j|^q \right)^{1/q}.$$

因上式对于所有之 y_j 和所有之 J 成立, 由定理 15, 有

$$\sum_j |a_{ij}|^{q'} \leq M^{q'}.$$

此即 (8.9.1) 中之第二式, 第一式可同法证明.

由是, 在 $[2, 2]$ 中为有界之必要条件是: 对于所有之 j 和 i , 有

$$\sum_i |a_{ij}|^2 < \infty, \quad \sum_j |a_{ij}|^2 < \infty.$$

条件

$$\sum \sum |a_{ij}|^2 < \infty$$

是充分的, 盖此时有

$$|A|^2 \leq \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \sum_{i,j} |x_i^2 y_j^2| = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \sum_i |x_i|^2 \sum_j |y_j|^2;$$

但这条件决不是必要的, 即使当诸系数皆为正时也是这样. 例如在 § 8.12 中我们将看到

$$\sum \sum \frac{x_i y_j}{i+j}$$

为有界.

290. 一有界形式之任一行或任一列必为绝对收敛.

盖由定理 289, 有

$$\begin{aligned} \sum_i |a_{ij} x_i y_j| &\leq |y_j| \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_i |a_{ij}|^{p'} \right)^{1/p'} \\ &\leq M |y_j| \mathfrak{S}_p(x). \end{aligned}$$

显而易见, 当 $a_{ij} \geq 0$ 时, A 为有界之一必要条件是: 对于 $[p, q]$ 中所有正的 x 和 y ,

$$\sum \sum a_{ij} x_i y_j \quad (8.9.2)$$

为收敛。自然会問：这对于具有任意实或复系数的有界形式是否也成立，换言之，当 A 为有界时，級数(8.9.2)是否一定就某一公认的意义为收敛(对 $[p, q]$ 中之 x 和 y)。答案是肯定的：若 A 有界，級数(8.9.2)就三个标准的意义为收敛(必然是一致的)，即作为一二重級数就 Pringsheim 的意义或作为一迭和数按行或列为收敛。但二重級数收敛的观念与我們現在的目的无关(而且在一般理論中也不很重要)，因此我們不來証明这些定理。对于情形 $[2, 2]$ ，参考 Hellinger 与 Toeplitz [1]。

8.10. $[p, p']$ 中两个形式的卷积 (Convolution, Faltung). 我們現設 $q = p'$ 。若 A 与 B 在 $[p, p']$ 中为有界，其界分別为 M 和 N ，則由定理 289，有

$$\sum_k |a_{ik}|^p \leq M^p, \quad \sum_k |b_{kj}|^{p'} \leq N^{p'},$$

因而由定理 13，級数

$$f_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} \quad (8.10.1)$$

为绝对收敛。我們称

$$F = F(A, B) = \sum \sum f_{ij} x_i x_j$$

为 A 与 B 的卷积。 A 和 B 的次序是有关系的， $F(A, B)$ 和 $F(B, A)$ 通常是两个不同的形式。

291. 若 A 与 B 在 $[p, p']$ 中分別具有界 M 和 N ，則 F 在 $[p, p']$ 中为有界，其界不超过 MN 。

設 $m \geq n$ ，又設当 $i > n$ 时 $x_i = 0$ 。于是，因 A 在 $[p, p']$ 中为 M 所界，对于所有使得 $\Theta_p(x) \leq 1$ 和 $\Theta_{p'}(y) \leq 1$ 的 x 和 y ，我們有

$$|A_m| = \left| \sum_{k=1}^m y_k \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i \right| \leq M.$$

因之，由定理 15，对于 $m \geq n$ 有

$$\sum_{k=1}^m \left| \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i \right|^p \leq M^p;$$

由是有

$$\sum_k \left| \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i \right|^p \leq M^p. \quad (8.10.2)$$

同理,有

$$\sum_k \left| \sum_{j=1}^n b_{kj} y_j \right|^{p'} \leq N^{p'}. \quad (8.10.3)$$

但

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} x_i y_j &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \sum_k a_{ik} b_{kj} \\ &= \sum_k \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_{kj} y_j \right). \end{aligned} \quad (8.10.4)$$

由(8.10.2), (8.10.3), (8.10.4)及定理 13, 即得

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} x_i y_j \right| \leq MN,$$

此即証明定理.

显而易见, 不管 A 与 B 是否有界, 只要級数

$$\sum_k |a_{ik}|^p, \quad \sum_k |b_{kj}|^{p'}$$

收敛, 我們皆可定义 A 与 B 的卷积.

8.11. 关于 $[2, 2]$ 中形式的一些特有定理¹⁾. 在这节中, 我們只限于討論古典情形 $p = q = 2$, 并設变数和系数皆为实的(虽然一般不是正的). 于是, 我們假定 A 为一实形式, 并用

$$A' = \sum \sum a_{ij} x_i y_j \quad (8.11.1)$$

記从 A 經交換 a_{ij} 中的指标而得的形式.

若对所有之 i ,

$$\sum_k a_{ik}^2 < \infty, \quad (8.11.2)$$

則級数

1) Hellinger 和 Toeplitz [1], Schur [1].

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} a_{jk} \quad (8.11.3)$$

为绝对收敛,且由(8.10.1),

$$C(x, y) = \sum \sum c_{ij} x_i y_j \quad (8.11.4)$$

是 A 和 A' 的卷积 $F(A, A')$. 特别, $C(x, x)$ 是一二次形式,根据(8.10.4),它的截段 C_n 是由

$$C_n(x, x) = \sum_k \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} x_i \right)^2 \quad (8.11.5)$$

给出. 我们令

$$C(x, x) = N(A),$$

而称之为 A 的模. 当 A 满足(8.11.2)时,我们说 A 的模存在. 根据定理 289, $N(A)$ 的存在乃是 A 为有界的一必要条件.

若 A 为有界,其界为 M ,则由定理 291, $N(A)$ 为有界,其界 P 不超过 M^2 . 另一方面,只要 $N(A)$ 存在,则

$$\begin{aligned} |A_n(x, y)| &= \left| \sum_{j=1}^n y_j \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \right| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n y_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n y_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \{C_n(x, x)\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

因之,若 $N(A)$ 为 P 所界,则 A 为 $P^{\frac{1}{2}}$ 所界.

集合我们的结果,即得

292. 一实形式 A 在 $[2, 2]$ 中为有界之充要条件是 A 的模 $N(A)$ 存在且为有界. 若 M 为 A 的界, P 为 $N(A)$ 的界,则

$$P = M^2.$$

一个有用的系是

293. 若 $A, B, \dots$ 是有限多个形式,它们的模皆存在,且

$$H(x, x) = N(A) + N(B) + \dots$$

为有界,其界为 P ,则 $A, B, \dots$ 为有界,其界不超过 $P^{\frac{1}{2}}$.

事实上,若 $N_n(A), \dots$ 是 $N(A), \dots$ 的截段,则由(8.11.5),

$N_n(A), \dots$ 为非負¹⁾, 且

$$H_n(x, x) = N_n(A) + N_n(B) + \dots.$$

因之, $N_n(A), \dots$ 为 $P^{\frac{1}{2}}$ 所界.

8.12. 应用于 Hilbert 形式. 我們現在运用定理 293 于两个非常重要的由 Hilbert 首先从事研究的特殊形式.

294. 形式

$$A = \sum \sum \frac{x_i y_j}{i + j - 1}, \quad B = \sum \sum' \frac{x_i y_j}{i - j},$$

其中, $i, j = 1, 2, \dots$, 撇表示将 $i = j$ 之項略去, 在实空間 $[2, 2]$ 中为有界, 其界不超过 π .

显而易见, 各形式滿足条件(8.11.2). 我們令

$$N(A) = \sum \sum c_{ij} x_i x_j, \quad N(B) = \sum \sum d_{ij} x_i x_j,$$

而来計算 $c_{ij} + d_{ij}$.

若 $i = j$, 我們有

$$\begin{aligned} c_{ii} + d_{ii} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(i+k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}' \frac{1}{(i-k)^2} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}' \frac{1}{(i-k)^2} = \frac{1}{3} \pi^2. \end{aligned} \quad (8.12.1)$$

若 $i \neq j$, 則

$$\begin{aligned} c_{ij} + d_{ij} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(i+k-1)(j+k-1)} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty}' \frac{1}{(i-k)(j-k)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}' \frac{1}{(i-k)(j-k)} \\ &= \frac{1}{i-j} \sum_{k=-\infty}^{\infty}' \left(\frac{1}{j-k} - \frac{1}{i-k} \right), \end{aligned}$$

1) 就是說, 对于实的 x 只取非負的值. “正形式”一辭在本章曾以另一种意义来使用, 即具有非負系数和变数的形式.

这里的撇表示除去值 $k = i$ 和 $k = j$. 若 K 同时大于 $|i|$ 和 $|j|$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{k=-K}^K' \left(\frac{1}{j-k} - \frac{1}{i-k} \right) \\ = \frac{2}{i-j} + \left(\frac{1}{j-K} + \cdots + \frac{1}{j+K} \right. \\ \left. - \frac{1}{i-K} - \cdots - \frac{1}{i+K} \right), \end{aligned}$$

最后的括号中乃是两个連續不断的級数, 不过要略去分母为 0 的項, 此括号当 $K \rightarrow \infty$ 时趋于 0¹⁾. 因之,

$$c_{ij} + d_{ij} = \frac{2}{(i-j)^2} \quad (i \neq j). \quad (8.12.2)$$

由(8.12.1)和(8.12.2), 可得

$$N(A) + N(B) = \frac{\pi^2}{3} \sum x_i^2 + 2 \sum \sum' \frac{x_i x_j}{(i-j)^2}. \quad (8.12.3)$$

这里的第一項具有界 $\frac{1}{3} \pi^2$; 又因

$$\sum_i' \frac{1}{(i-j)^2} = \sum_j' \frac{1}{(i-j)^2} < \frac{1}{3} \pi^2,$$

故第二項滿足定理 275 中之条件, 且具有界 $\frac{2}{3} \pi^2$. 因之, $N(A) + N(B)$ 具有界 π^2 , 因而定理 294 由定理 293 即可得出²⁾.

A 之为有界可以比較簡單的証出: 在第九章中我們將給出一些証明.

A 为絕對有界 (§ 8.8), 因其系数为正. 重要的是要注意, 这一点对 B 并不成立. 欲明此, 只須証明: 对于使得 $\sum x_i^2$ 和 $\sum y_i^2$ 为收敛的正的集 (x, y) , 有

$$\sum \sum' \frac{x_i y_j}{|i-j|} = \infty$$

1) 除去一些就个数來說与 K 无关的項之外, 全皆消去.

2) 这証明是 Schur^[1] 的.

即可。取

$$x_i = i^{-\frac{1}{2}}(\log i)^{-1}(i > 1),$$

$$y_j = j^{-\frac{1}{2}}(\log j)^{-1}(j > 1),$$

又 $x_1 = x_2, y_1 = y_2$, 則

$$\begin{aligned} \sum \sum' \frac{x_i y_j}{|i - j|} &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} x_{j+k} y_j \geq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \sum_{l=k+1}^{\infty} x_l y_l \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{1}{l(\log l)^2} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{k+1}^{\infty} \frac{du}{u(\log u)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \log(k+1)}, \end{aligned}$$

而此級数为发散。

在第九章中我們將看到, A 在 $[p, p']$ 中为有界, B 在 $[p, p']$ 中亦为有界, 但証明要困难得多。参考 M. Riesz [1, 2], Titchmarsh [2, 3]。

M. Riesz 定理

8.13. 关于具有复变数和系数的双綫性形式的凸数定理。 其次, 我們来証明一个属于 M. Riesz¹⁾ 的非常重要的定理。这一定理, 正如定理 285 一样, 肯定了 $\log M_{\alpha, \beta}$ 的凸性, 于此 $M_{\alpha, \beta}$ 乃是 A 型的一形式的上界; 但在 Riesz 定理中, 这形式是双綫性的, α, x, y 則是一般的复数, 凸性只是在 α 和 β 的一个带有限制的区域中得到証明。

在 Riesz 的論証中紧要的一点是 $M_{\alpha, \beta}$ 必須是一可以达到的极大值, 而不只是一个上界; 因此我們就来考虑一有限双綫性形式

$$A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j. \quad (8.13.1)$$

295. 設 $M_{\alpha, \beta}$ 是当

1) M. Riesz [1]. 我們的証明实质上是 Riesz 的那个証明。Paley [2, 4] 曾(不十分完善的)給出另一个証明。

$$\sum_1^m |x_i|^{\frac{1}{\alpha}} \leq 1, \quad \sum_1^n |y_j|^{\frac{1}{\beta}} \leq 1 \quad (8.13.2)$$

时 A 的极大值, 在这里我們規定, 若 $\alpha = 0$ 或 $\beta = 0$, 这些不等式即由 $|x_i| \leq 1$ 或 $|y_j| \leq 1$ 代替. 于是 $\log M_{\alpha, \beta}$ 在三角形

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad \alpha + \beta \geq 1 \quad (8.13.3)$$

中为凸的.

我們要来証明, 若 (α_1, β_1) 和 (α_2, β_2) 是三角形 (8.13.3) 中的两点, $0 < t < 1$, 且

$$\alpha = \alpha_1 t + \alpha_2 (1 - t), \quad \beta = \beta_1 t + \beta_2 (1 - t), \quad (8.13.4)$$

則

$$M_{\alpha, \beta} \leq M_{\alpha_1, \beta_1}^t M_{\alpha_2, \beta_2}^{1-t}. \quad (8.13.5)$$

我們需要用到这样的事实, 即当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, $M_{\alpha, \beta} \rightarrow M_{0, \beta}$. 設 $(\bar{x}, \bar{y})$ 和 $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ 分別为关于 (α, β) 和 $(0, \beta)$ 的一个最大組, 則 $(\bar{x}, \bar{y})$ 是关于 $(0, \beta)$ 的一个“容許組”, $(m^{-\alpha} \bar{x}_0, \bar{y}_0)$ 是关于 (α, β) 的一个容許組. 因之, $m^{-\alpha} M_{0, \beta} \leq M_{\alpha, \beta} \leq M_{0, \beta}$, 因而 $M_{\alpha, \beta} \rightarrow M_{0, \beta}$. 同理, 当 $\beta \rightarrow 0$ 时, $M_{\alpha, \beta} \rightarrow M_{\alpha, 0}$. 由是, 在三角形 (8.13.3) 的角 $(0, 1)$ 和 $(1, 0)$, 存在着 $M_{\alpha, \beta}$ 的某种連續性, 而在此三角形其它的点, $M_{\alpha, \beta}$ 显为連續. 因之, 根据定理 88, 只須証明, 当 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ 已經給定之后, (8.13.5) 对 $0 < t < 1$ 中之某一 t 成立即可. 而且只須考虑 $\alpha > 0, \beta > 0$ 时之 $M_{\alpha, \beta}$, 在此种情形, 我們可定义 p, q, p', q' 如

$$\alpha = \frac{1}{p}, \quad \beta = \frac{1}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1. \quad (8.13.6)$$

于是, 我們可将 (8.13.2) 写成

$$\mathfrak{S}_p(x) \leq 1, \quad \mathfrak{S}_q(y) \leq 1; \quad (8.13.7)$$

而 (8.13.3) 中之諸不等式即等价于

$$q' \geq p \geq 1 \quad (8.13.8)$$

和

$$p' \geq q \geq 1 \quad (8.13.9)$$

中之一. 如同 § 8.7 中一样, 我們也令

$$X_i = X_i(x) = \sum_j a_{ij}x_j, \quad Y_i = Y_i(y) = \sum_j a_{ij}y_j, \quad (8.13.10)$$

因而有

$$A = \sum_j X_j y_j = \sum_i x_i Y_i \quad (8.13.11)$$

或簡写作

$$A = \sum X y = \sum x Y. \quad (8.13.12)$$

定理 286 使得我們可以給 $M_{\alpha, \beta}$ 另下一定义, 它更适合于我們現在的目的. 显而易見, A 对一組使得

$$\Theta_p(x) = 1, \quad \Theta_q(y) = 1 \quad (8.13.13)$$

的 (x, y) 取其极大值; 而 $M_{\alpha, \beta}$ 則是对于所有此种 (x, y) 滿足

$$|A| \leq K \Theta_p(x) \Theta_q(y) \quad (8.13.14)$$

的最小的 K . 因上式两边就 x 和 y 皆是一次齐次式, 故 (8.13.13) 这一限制就无关重要, 因而 $M_{\alpha, \beta}$ 可定义为对于所有 (x, y) 滿足 (8.13.14) 的最小的 K ¹⁾.

由定理 286, 这也就是对于所有的 x , 滿足

$$\Theta_{q'}(X) \leq K \Theta_p(x) \quad (8.13.15)$$

的最小的 K , 或对于所有的 y , 滿足

$$\Theta_{p'}(Y) \leq K \Theta_q(y) \quad (8.13.16)$$

的最小的 K . 因此我們可以定义 $M_{\alpha, \beta}$ 为

$$M_{\alpha, \beta} = \max \frac{\Theta_{q'}(X)}{\Theta_p(x)} = \max \frac{\Theta_{p'}(Y)}{\Theta_q(y)},$$

在这里, 极大值是就所有非零組 x 或 y 而取者.

8.14. 最大組 (x, y) 的另外的性質. 設 (x^*, y^*) 是 (x, y) 的一組, 它滿足 (8.13.7), 且使 $|A|$ 取其极大; 又設 X^*, Y^* 是相应的 X, Y 的值. 显而易見(如同我們曾經看到的那樣), 我們有

$$\Theta_p(x^*) = 1, \quad \Theta_q(y^*) = 1. \quad (8.14.1)$$

又, 如在 (8.7.6) 中那样, 有

$$|A| \leq \Theta_{q'}(X) \Theta_q(y), \quad |A| \leq \Theta_{p'}(Y) \Theta_p(x). \quad (8.14.2)$$

1) 这只不过是把 § 8.8 中用过的一个論証重复一次.

(8.14.2) 中的各式当 x, y 取值 x^*, y^* 时等号必成立; 否則我們可以令 x, X 不动而变更 y , 或令 y, Y 不动而变更 x , 使得 $|A|$ 增大. 因之, 有

$$M_{\alpha, \beta} = |A(x^*, y^*)| = \Theta_{q'}(X^*)\Theta_q(y^*) = \Theta_{p'}(Y^*)\Theta_p(x^*).$$

此外, 由定理 14, 有

$$|X_j^*|^{q'} = \omega^{q'} |y_j^*|^q$$

或

$$|X_j^*| = \omega |y_j^*|^{q^{-1}}, \quad (8.14.3)$$

其中 ω 为正并与 j 无关; 且

$$\arg X_j^* y_j^*$$

与 j 无关. 因之,

$$\begin{aligned} M_{\alpha, \beta} &= |A(x^*, y^*)| = |\sum X^* y^*| \\ &= \sum |X^* y^*| = \omega \sum |y^*|^q = \omega. \end{aligned}$$

代入(8.14.3), 并添上关于 Y_j^* 的相应的結果, 則得

$$|X_j^*| = M_{\alpha, \beta} |y_j^*|^{q^{-1}}, \quad |Y_j^*| = M_{\alpha, \beta} |x_j^*|^{p^{-1}}. \quad (8.14.4)$$

8.15. 定理 295 的証明. 下面我們就假定 (x, y) 为 (关于指标 α, β 的) 一最大組, 而将星号省去. 写 $p_1 = 1/\alpha_1$, 等等, 又以 M, M_1, M_2 代 $M_{\alpha, \beta}, M_{\alpha_1, \beta_1}, M_{\alpha_2, \beta_2}$. 我們使用 $p, p_1, \dots$ 时是把三角形的頂点 $(0, 1), (1, 0)$ 排除在外, 但正如我們在 § 8.13 中所指出, 这并不有損于我們的証明.

由(8.14.4), 有

$$\begin{aligned} M \Theta_{(p-1)p_1'}^{p-1}(x) &= (M^{p_1'} \sum |x_i|^{(p-1)p_1'})^{1/p_1'} \\ &= (\sum |Y_i|^{p_1'})^{1/p_1'} = \Theta_{p_1'}(Y). \end{aligned}$$

将此与(8.13.17)比較, 即得

$$M \Theta_{(p-1)p_1'}^{p-1}(x) \leq M_1 \Theta_{q_1}(y). \quad (8.15.1)$$

同理, 有

$$M \Theta_{(q-1)q_2'}^{q-1}(y) \leq M_2 \Theta_{p_2}(x). \quad (8.15.2)$$

因之,若 $0 < t < 1$, 則得

$$M \Theta_{(p-1)p_1}^{(p-1)t}(x) \Theta_{(q-1)q_2}^{(q-1)(1-t)} \leq M_1^t M_2^{1-t} \Theta_{q_1}^t(y) \Theta_{p_2}^{(1-t)}(x). \quad (8.15.3)$$

我們暫時假定: 在 0 与 1 之間存在某一 t , 滿足关系

$$\frac{1}{p} = \frac{t}{p_1} + \frac{1-t}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{t}{q_1} + \frac{1-t}{q_2}, \quad (8.15.4)$$

亦即滿足方程(8.13.4), 并假定

$$\Theta_{p_2}^{1-t}(x) \leq \Theta_{(p-1)p_1}^{(p-1)t}(x), \quad \Theta_{q_1}^t(y) \leq \Theta_{(q-1)q_2}^{(q-1)(1-t)}(y). \quad (8.15.5)$$

于是, 由(8.15.3)及(8.15.5), 对某一 t , 有

$$M \leq M_1^t M_2^{1-t},$$

然后由定理 88 即得我們的定理。

留下来的事情就是去証明由(8.15.4)和(8.15.5)所表現出来的假定是对的。我們現在又假定: 存在数 μ 和 ν , 使得

$$0 < \mu \leq 1, \quad 0 < \nu \leq 1, \quad (8.15.6)$$

$$\begin{aligned} p_2 &= (p-1)p_1\mu + p(1-\mu), \\ q_1 &= (q-1)q_2\nu + q(1-\nu). \end{aligned} \quad (8.15.7)$$

由定理 18¹⁾, $r \log \Theta_r(x) = \log \Theta_r^r(x)$ 是 r 的一个凸函数; 而 x , 作为一最大組, 則滿足(8.13.13)。因之,

$$\Theta_{p_2}^{p_2}(x) \leq \Theta_{(p-1)p_1}^{(p-1)p_1\mu}(x) \Theta_p^{p(1-\mu)}(x) = \Theta_{(p-1)p_1}^{(p-1)p_1\mu}(x); \quad (8.15.8)$$

同理, 有

$$\Theta_{q_1}^{q_1}(y) \leq \Theta_{(q-1)q_2}^{(q-1)q_2\nu}(y) \Theta_q^{q(1-\nu)}(y) = \Theta_{(q-1)q_2}^{(q-1)q_2\nu}(y). \quad (8.15.9)$$

最后, 若

$$\frac{p_1\mu}{p_2} = \frac{t}{1-t}, \quad \frac{q_2\nu}{q_1} = \frac{1-t}{t}, \quad (8.15.10)$$

則(8.15.8)和(8.15.9)即等价于(8.15.5)。

欲使証明完整, 就必須証明 (8.15.4), (8.15.6), (8.15.7),

1) 严格言之, 是从一个由定理 18 改写出来的定理, 犹之乎定理 17 改写成定理 87 那样。

(8.15.10) 是可以并立的。这些条件一共包含了六个方程，为四个数 p, q, μ, ν 所满足，还有两个不等式。由 (8.15.10) 之第一方程即得

$$(p'_1 - 1)\mu + 1 = \frac{(p'_1 - 1)p_2}{p'_1} \frac{t}{1-t} + 1 = \frac{p_2}{p_1} \frac{t}{1-t} + 1$$

和

$$p_2 + p'_1\mu = p_2 \left(1 + \frac{t}{1-t} \right) = \frac{p_2}{1-t};$$

由 (8.15.7) 之第一方程即得

$$\frac{1}{p} = \frac{(p'_1 - 1)\mu + 1}{p_2 + p'_1\mu} = \frac{p_2 t + p_1(1-t)}{p_1 p_2} = \frac{t}{p_1} + \frac{1-t}{p_2},$$

此与 (8.15.4) 一致。

同样的论证也适用于包含 q 之方程，因而 (8.15.4) 是 (8.15.7) 和 (8.15.10) 之一推论。给定 p_1, q_1, p_2, q_2, t ，我们即可由 (8.15.10) 求出 μ, ν ，由 (8.15.7) 求出 p, q ，而且这些数皆满足该六个方程。

留下来的只是去考核不等式 (8.15.6)，若 μ 和 ν 满足 (8.15.10)，且 $0 < t < 1$ ，则此诸不等式即等价于

$$\frac{q_1}{q'_2} \leq \frac{t}{1-t} \leq \frac{p'_1}{p_2}. \quad (8.15.11)$$

因 (α_1, β_1) 和 (α_2, β_1) 在三角形 (8.13.3) 内，故由 (8.13.8) 和 (8.13.9) 有

$$q_1 \leq p'_1, \quad q'_2 \geq p_2.$$

由是更有

$$\frac{q_1}{q'_2} \leq \frac{p'_1}{p_2}.$$

因之，我们可选取 t ，使之满足 (8.15.11)。于是，所有我们的条件皆已满足。

我们可以看出，只是在证明的最后一段中才用到主要的不等式 $\alpha + \beta \geq 1$ 。当形式为正时，这不等式是无关紧要的；此时由定理 285， $\log M_{\alpha, \beta}$ 在 (α, β) 的整个正象限内为凸的。

8.16. M. Riesz 定理的应用。 (i) 定理 295 很容易转化为

另外一个外表大不相同的定理.

296. 設

$$X_j(x) = \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (8.16.1)$$

又設 $M_{\alpha, \gamma}^*$ 是

$$\left(\sum_1^n |X_j|^{1/\gamma} \right)^\gamma$$

当

$$\sum_1^m |x_i|^{1/\alpha} \leq 1$$

时的极大值, 則 $\log M_{\alpha, \gamma}^*$ 在三角形

$$0 \leq \gamma \leq \alpha \leq 1 \quad (8.16.2)$$

中为凸的.

事实上, 由(8.13.17), 我們有

$$M_{\alpha, \beta} = \max \frac{\mathfrak{S}_{q'}(X)}{\mathfrak{S}_p(x)},$$

而

$$M_{\alpha, \gamma}^* = \max \frac{\mathfrak{S}_{1/\gamma}(X)}{\mathfrak{S}_{1/\alpha}(x)} = \max \frac{\mathfrak{S}_{1/\gamma}(X)}{\mathfrak{S}_p(x)}.$$

因之, 若 $\gamma = 1/q' = 1 - \beta$, 則

$$M_{\alpha, \beta} = M_{\alpha, \gamma}^*;$$

此时条件(8.16.2)即等价于(8.13.8)或(8.13.3). 由是, $M_{\alpha, \gamma}^*$ 即为 $(\alpha, 1 - \gamma)$ 之一凸函数, 或者, 也是一样, 是 (α, γ) 之一凸函数.

(ii) 297. 設 X_j 由(8.16.1)定义, 而且对于所有之 x ,

$$\sum_1^n |X_j|^2 \leq \sum_1^m |x_i|^2; \quad (8.16.3)$$

又設

$$1 \leq p \leq 2, \quad (8.16.4)$$

則

$$\mathfrak{S}_{p'}(X) \leq m^{(2-p)/p} \mathfrak{S}_p(x), \quad (8.16.5)$$

其中

$$m = \max |a_{ij}|. \quad (8.16.6)$$

欲从定理 296 导出定理 297, 我們可如前令 $\alpha = 1/p$, 并考虑 (α, γ) 平面上由 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 到 $(1, 0)$ 的直线段. 这线段全在三角形 (8.16.2) 之中; 因而由定理 296, 对于 $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ 有

$$M_{\alpha, 1-\alpha}^* \leq (M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^*)^{2(1-\alpha)} (M_{1,0}^*)^{2\alpha-1}.$$

由 (8.16.3), 显然有 $M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^* \leq 1$; 又

$$M_{1,0}^* = \frac{\max |X|}{\sum |x|} \leq m,$$

因之, 有

$$M_{\alpha, 1-\alpha}^* \leq m^{2\alpha-1} = m^{(2-p)/p},$$

此与 (8.16.5) 等价.

若 (8.16.1) 是一“单式”(酉, unitary) 置换, 即一使 $\sum |x|^2$ 不变的置换, 则条件 (8.16.3) 必然(以等号)成立¹⁾. 定理的这种情形是由 F. Riesz^[4] 发现的, 而此一般性定理则属于 M. Riesz^[1].

8.17. 在 Fourier 级数上的应用. 从 Riesz 定理的许多其它重要应用中, 我們現在选取定理 297 在 Hausdorff 定理的证明中之一应用²⁾.

(i) 設 m 为一奇整数, 且

$$f_m(\theta) = \sum_{-\frac{1}{2}m}^{\frac{1}{2}m} e^{i\mu\theta} x_\mu,$$

$$X_\nu = \sum_{-\frac{1}{2}m}^{\frac{1}{2}m} a_{\mu\nu} x_\mu = \frac{1}{\sqrt{m}} f_m\left(\frac{2\pi\nu}{m}\right),$$

1) 在此种情形, $n = m$, 一实单式置换是正交的.

2) 参考 § 8.5, Riesz 以另外不同的方法导出这些定理, 并给出一些别的应用.

3) 我們現写 μ, ν 代 i, j , 并将求和范围展布于

$$-\frac{1}{2}m < \mu < \frac{1}{2}m.$$

$$a_{\mu\nu} = m^{-\frac{1}{2}} e^{2\mu\nu\pi i/m}.$$

这置换是单式的,因而

$$\sum |X_\nu|^2 = \sum |x_\mu|^2.$$

又 $\mathfrak{M} = m^{-\frac{1}{2}}$, 因之,由定理 297, 有

$$\left(\frac{1}{m} \sum \left| f_m \left(\frac{2\pi\nu}{m} \right) \right|^{p'} \right)^{1/p'} \leq (\sum |x_\mu|^p)^{1/p}. \quad (8.17.1)$$

左边是 $\mathfrak{S}_p(f)$ 的一逼近, 故可由取极限导出 Hausdorff 定理 (8.5.6)¹⁾.

(ii) 若 m 仍为一奇整数,

$$x_\mu = f_m \left(\frac{2\pi\mu}{m} \right) = \sum_{r=-\frac{1}{2}m}^{\frac{1}{2}m} a_r e^{2r\mu\pi i/m},$$

$$X_\nu = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{-\frac{1}{2}m}^{\frac{1}{2}m} e^{-2\nu\mu\pi i/m} x_\mu,$$

則經簡單之計算,如前可得

$$X_\nu = m^{\frac{1}{2}} a_\nu,$$

$$\sum |X_\nu|^2 = \sum |x_\mu|^2.$$

在此种情形,由定理 297 即得

$$(\sum |a_\nu|^{p'})^{1/p'} \leq \left(\frac{1}{m} \sum \left| f_m \left(\frac{2\pi\mu}{m} \right) \right|^p \right)^{1/p};$$

因而 Hausdorff 定理(8.5.7)經适当的取极限手續即可得出.

有如 § 8.5 中所指出,我們也可从前一定理导出第二定理.

各种定理和各种例题

298. 若 $p > 1$, $a(x, y)$ 为正且可测, 則下之三个命题为等

1) 若 $f(\theta)$ 是一多项式

$$\sum_{-\frac{1}{2}M}^{\frac{1}{2}M} x_\mu e^{i\mu\theta},$$

則当 $m \geq M$ 时, $f_m(\theta) = f(\theta)$, 而关于 $f(\theta)$ 的定理由 (8.17.1) 立可得出. 欲推广到任意的 $f(\theta)$, 則須依賴于“強收斂”定理.

价:

(i) 对于所有非負的 f, g ,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty a(x, y) f(x) g(y) dx dy \leq K \left(\int_0^\infty f^p dx \right)^{1/p} \left(\int_0^\infty g^{p'} dy \right)^{1/p'};$$

(ii) 对于所有非負的 f ,

$$\int_0^\infty dy \left(\int_0^\infty a(x, y) f(x) dx \right)^p \leq K^p \int_0^\infty f^p dx;$$

(iii) 对于所有非負的 g ,

$$\int_0^\infty dx \left(\int_0^\infty a(x, y) g(y) dy \right)^{p'} \leq K^{p'} \int_0^\infty g^{p'} dy.$$

命题: “在 (i) 中不等号成立, 除非 f 或 g 为 0”, “在 (ii) 中不等号成立, 除非 f 为 0”, “在 (iii) 中不等号成立, 除非 g 为 0” 是等价的.

[此乃定理 286 和 287 的类似定理, 其中 $q = p'$. 存在更一般形式的定理, 其中 p 和 q 皆为任意.]

299. 設 $\lambda > 0$, 則形式

$$A = \sum \sum \frac{x_i y_j}{i + j - 1 + \lambda}, \quad B = \sum \sum' \frac{x_i y_l}{i - j + \lambda}$$

在 $[2, 2]$ 中为有界, 且若 λ 为整数, 其界为 π ; λ 为非整数时, 其界为 $\pi |\operatorname{cosec} \lambda \pi|$, 一撇只当 λ 为整数时才需要.

[Schur [1], Pólya 和 Szegő [1, I, 117, p. 290].]

300. 若 $p > 1$, 且 $A = \sum \sum a_{ij} x_i y_j$ 在 $[p, p']$ 中具有一界 M , 又

$$h_{ij} = \int f_i(t) g_j(t) dt,$$

其中

$$\int |f_i|^p dt \leq \mu^p, \quad \int |g_j|^{p'} dt \leq \nu^{p'},$$

則

$$A^* = \sum \sum a_{ij} h_{ij} x_i y_j$$

具有一界 $M_{\mu\nu}$.

| 盖

$$\begin{aligned}
|A^*| &= \left| \int \{ \sum \sum a_{ij} x_i f_i(t) y_j g_j(t) \} dt \right| \\
&\leq M \int \{ \sum |x_i f_i(t)|^p \}^{1/p} \{ \sum |y_j g_j(t)|^{p'} \}^{1/p'} dt \\
&\leq M \left\{ \sum |x_i|^p |f_i(t)|^p dt \right\}^{1/p} \\
&\quad \times \left\{ \sum |y_j|^{p'} |g_j(t)|^{p'} dt \right\}^{1/p'} \\
&\leq M_{\mu\nu} (\sum |x_i|^p)^{1/p} (\sum |y_j|^{p'})^{1/p'}.
\end{aligned}$$

对于 $p = p' = 2$ 的情形,可参考 Schur [1].]

301. $\sum \sum' \frac{(ij)^{\frac{1}{2}(\mu-1)}}{i^\mu - j^\mu} x_i y_j$ 在 $[2, 2]$ 中为有界.

302. 对任何实的 θ , $\sum \sum' \frac{\sin(i-j)\theta}{i-j} x_i y_j$ 在 $[2, 2]$ 中为有界. 若 $0 \leq \theta \leq \pi$, 则界不超过 $\max(\theta, \pi - \theta)$.

[关于上之二定理,可参考 Schur [1].]

303. 若 a_n 是一奇有界函数之 Fourier 正弦系数,或为一偶有界函数之 Fourier 余弦系数,则形式

$$\sum \sum a_{i+j} x_i y_j, \quad \sum \sum a_{i-j} x_i y_j$$

在 $[2, 2]$ 中为有界.

[Toeplitz [1]. 设 i 和 j 从 1 跑到 n ; x 与 y 为实的,且

$$\sum x_i^2 = \sum y_j^2 = 1;$$

又设 $X = \sum x_i \cos i\theta$, $X' = \sum x_i \sin i\theta$, $Y = \sum y_j \cos j\theta$, $Y' = \sum y_j \sin j\theta$, 且(例如)

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\theta) \sin n\theta d\theta,$$

其中 $|f| \leq M$. 经简单计算,即得

$$\sum_1^n \sum_1^n a_{i-j} x_i y_j = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (X'Y - XY') f(\theta) d\theta.$$

因

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^\pi XY' f(\theta) d\theta \right| &\leq \frac{1}{2} M \int_0^\pi (X^2 + Y'^2) d\theta \\
&= \frac{1}{4} M \pi (\sum x^2 + \sum y^2) = \frac{1}{2} M \pi,
\end{aligned}$$

我們可求出 A 的上界 $2M$. 对其余情形可同法处理.

若(例如說) $f(\theta)$ 为奇的, 且当 $0 < \theta < \pi$ 时等于 $\frac{1}{2}(\pi - \theta)$,

則 $M = \frac{1}{2}\pi$, $a_n = n^{-1}$. 于是我們即得定理 294 中关于 B 的結果.]

304. 若 (i) $\sum \sum a_{ij} x_i y_j$ 在 $[p, q]$ 中为有界, (ii) $k > 1$, $l > 1$, (iii) $(u_i), (v_j)$ 是兩組使得 $\mathfrak{S}_{pk'}(u) < \infty$, $\mathfrak{S}_{ql'}(v) < \infty$ 的給定的数, 則

$$A = \sum \sum a_{ij} u_i v_j x_i y_j$$

在 $[pk, ql]$ 中为有界.

[蓋

$$\begin{aligned} |A| &\leq M(\sum |u x|^p)^{1/p} (\sum |v y|^q)^{1/q} \\ &\leq M(\sum |u^{pk'}|)^{1/pk'} (\sum |v^{ql'}|)^{1/ql'} \\ &\quad \times (\sum |x|^{pk})^{1/pk} (\sum |y|^{ql})^{1/ql}. \end{aligned}$$

305. 設 u_i 和 v_j 是兩組給定的滿足关系

$$\sum |u_i|^2 \leq 1, \quad \sum |v_j|^2 \leq 1$$

的数, 則形式

$$\sum \sum' \frac{u_i v_j}{i-j} x_i y_j$$

在 $[\infty, \infty]$ 中为有界, 但不一定为絕對有界.

[在定理 304 中取 $p = q = 2$, $k = l = \infty$.

若此形式常为絕對有界, 則 § 8.12 中之 Hilbert 形式 B 亦必为絕對有界, 而这是不对的.]

306. 若

$$\mathfrak{M}_2(a) \geq A_2 H, \quad \mathfrak{M}_4(a) \leq A_4 H,$$

則

$$\frac{A_2^3}{A_4^2} H \leq \mathfrak{M}_1(a) \leq A_4 H.$$

[利用定理 16 和 17. 在下一定理的証明中需要用到这一結果.]

307. 若从 m 維空間中之“单位立方体”的頂点 $(\pm 1, \pm 1, \dots,$

± 1) 向經過此立方体中心之任一超平面 $[m-1]$ ($m-1$ 維綫性組合) 引垂綫, 則这些垂綫的平均必在二常数 A 和 B 之間, A 和 B 与 m 和此 $[m-1]$ 的位置无关.

308. 若

$$b_j = \left(\sum_i |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad c_i = \left(\sum_j |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

則

$$P = (\sum \sum |a_{ij}|^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{4}} \leq K(\sum b_j + \sum c_i) = K(B + C),$$

其中 K 为一絕對常数.

309. 一实或复系数之形式 $A = \sum \sum a_{ij} x_i y_j$ 在 $[\infty, \infty]$ 中为有界, 且以 M 为界之必要条件是: 采用上定理中之記号, B, C, P 必小于 KM .

[关于上述之五个定理, 可参考 Littlewood [2].]

310. 若

$$p \geq 2, \quad q \geq 2, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2},$$

$$\lambda = \frac{pq}{pq - p - q}, \quad \mu = \frac{4pq}{3pq - 2p - 2q},$$

且 A 在 $[p, q]$ 中为有界, 其界为 M , 則

$$(\sum b_j^\lambda)^{1/\lambda} \leq KM, \quad (\sum c_i^\lambda)^{1/\lambda} \leq KM, \quad (\sum \sum |a_{ij}|^\mu)^{1/\mu} \leq KM,$$

其中 b_j 和 c_i 按照定理 308 中定义, K 只与 p 和 q 有关.

311. 若

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1,$$

但定理 310 中之条件在其它方面皆滿足, 則

$$(\sum b_j^\lambda)^{1/\lambda} \leq KM, \quad (\sum c_i^\lambda)^{1/\lambda} \leq KM, \quad (\sum \sum |a_{ij}|^\lambda)^{1/\lambda} \leq KM.$$

312. 若

$$p < 2 < q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1,$$

但定理 310 中之条件在其它方面皆滿足, 則

$$(\sum \sum |a_{ij}|^\lambda)^{1/\lambda} \leq KM,$$

313. 若

$$p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1,$$

$$a_{ij} \geq 0,$$

A 在 $[p, q]$ 中为有界, 其界为 M ; 又

$$\beta_i = \left(\sum_j a_{ij}^{p'} \right)^{1/p'}, \quad \gamma_i = \left(\sum_j a_{ij}^{q'} \right)^{1/q'},$$

則

$$(\sum \beta_i^1)^{1/\lambda} \leq M, (\sum \gamma_i^1)^{1/\lambda} \leq M, (\sum \sum a_{ij}^1)^{1/\lambda} \leq M.$$

[关于上之四定理, 可参考 Hardy 与 Littlewood [13].]

314. $[p, p']$ 中之 Hilbert 形式. 在第九章中将証明, 定理 294 中之形式 A 在 $[p, p']$ 中为有界. 相应的关于 B 的定理要深得多. 我們要証

$$(i) \quad \left| \sum_1^n \sum_1^n' \frac{x_i y_j}{i-j} \right| \leq K \Theta_p(x) \Theta_{p'}(y),$$

其中 $K = K(p)$ 只与 p 有关; 或者, 根据定理 286, 也是一样, 要証

$$(ii) \quad \sum_i \left| \sum_j' \frac{y_j}{i-j} \right|^{p'} \leq K^{p'} \sum |y_j|^{p'}.$$

根据定理 295, 只須对偶整数 p' (或对某一系列这种值) 来証明 (i) 或 (ii) 即可. 这要求一些特殊的技巧, 从现在的观点来看, 最自然的 就是 Titchmarsh^[2] 所用者.

第九章 Hilbert 不等式及其类似情形和推广

9.1. Hilbert 二重级数定理. 这一章所讲述的研究起源于一个重要的双线性形式,它是由 Hilbert 首先加以研究的. 这形式我们已经在 § 8.12 中遇到过,即

$$\sum \sum \frac{a_m b_n}{m+n},$$

其中 m 和 n 从 1 跑到 ∞ . 我们的第一个定理是下面的定理 315, 我们还连带叙述了它的积分类似情形,又添上了它的一个补充. 这种类型的补充在本章中将要常常出现.

315. 若

$$p > 1, \quad p' = p/(p-1), \\ \sum a_m^p \leq A, \quad \sum b_n^{p'} \leq B,$$

求和是从 1 到 ∞ 来取的, 则

$$\sum \sum \frac{a_m b_n}{m+n} < \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} A^{1/p} B^{1/p'}, \quad (9.1.1)$$

除非 (a) 或 (b) 为 0.

316. 若

$$p > 1, \quad p' = p/(p-1), \\ \int_0^\infty f^p(x) dx \leq F, \quad \int_0^\infty g^{p'}(y) dy \leq G,$$

则

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y} dx dy < \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} F^{1/p} G^{1/p'}, \quad (9.1.2)$$

除非 $f \equiv 0$ 或 $g \equiv 0$.

317. 在定理 315 和 316 中, 常数 $\pi \operatorname{cosec}(\pi/p)$ 皆是可能最好的常数.

定理 315 中当 $p = p' = 2$ 的情形就是 “Hilbert 二重级数定

理”，是由 Hilbert 在他的积分方程讲义中首先证明的（除了确切的决定常数之外）。Hilbert 的证明是由 Weyl^[2] 发表的。常数的决定以及积分类似情形归之于 Schur^[1]，而推广到一般的 p 则归之于 Hardy 和 M. Riesz，参看 Hardy[3]。这定理的全部或其中一部分的其它证明，以及在各种方向的推广，曾由下述诸人所给出：Fejér 和 F. Riesz^[1]，F. Riesz 和 Littlewood^[1]，Hardy^[2]，Hardy, Littlewood 及 Pólya^[1]，Mulholland^[1,3]，Owen^[1]，Pólya 和 Szegő^[1,1,pp.117,290]，Schur^[1]，F. Wiener^[1]。其中有一些推广在后面将要给以证明或引用。

不等式(9.1.1)与 § 8.2 中所讨论的一般不等式属同一类型；但定理 315 并不包含在定理 275 中，这是因为

$$\sum_m \frac{1}{m+n}$$

为发散。我们注意， $\pi \operatorname{cosec} \alpha\pi$ （按照定理 295）在 $0 < \alpha < 1$ 中为凸的，其中 $\alpha = 1/p$ 。

9.2. 一类广泛的双线性形式。 我们将从下面一个较为广泛的定理¹⁾导出定理 315。

318. 设 $p > 1$ ， $p' = p/(p-1)$ ，又设 $K(x, y)$ 具有下之性质：

(i) K 为非负，且为 -1 次齐次式；

(ii) $\int_0^\infty K(x, 1)x^{-1/p}dx = \int_0^\infty K(1, y)y^{-1/p'}dy = k$ ；

而且或者 (iii) $K(x, 1)x^{-1/p}$ 是 x 的一个严格单降函数， $K(1, y)y^{-1/p'}$ 为 y 的一个严格单降函数；或者，更一般些，(iii') $K(x, 1)x^{-1/p}$ 从 $x = 1$ 起为单降，而区间 $(0, 1)$ 可以分成两部分： $(0, \xi)$ 和 $(\xi, 1)$ ，其中有一个可以为 0。在前一部分中，函数为单降，在后一部分中为单增；而且 $K(1, y)y^{-1/p'}$ 也有类似性质。最后，我们假定，只当较弱的条件 (iii') 成立时，

1) Hardy, Littlewood 及 Pólya[1]。这定理当 $p = 2$ 的情形本质上属于 Schur^[1]；Schur 假定 $K(x, y)$ 是两个变数的一单降函数。

$$(iv) \quad K(x, x) = 0.$$

則

$$(a) \quad \sum \sum K(m, n) a_m b_n < k (\sum a_m^p)^{1/p} (\sum b_n^{p'})^{1/p'},$$

除非 (a) 或 (b) 为 0;

$$(b) \quad \sum_n \left(\sum_m K(m, n) a_m \right)^p < k^p \sum a_m^p,$$

除非 (a) 为 0;

$$(c) \quad \sum_m \left(\sum_n K(m, n) b_n \right)^{p'} < k^{p'} \sum b_n^{p'},$$

除非 (b) 为 0.

在每一种情形, 求和皆是从 1 到 ∞ . 由定理 286 和 287 可知, 这三个結論 (a), (b), (c) 是等价的.

我們可将上之假設闡明如下.

(1) 由于 K 的齐次性, 条件 (ii) 中的两个积分之为收敛和相等乃是其中任意一个之为收敛的結果.

(2) “单降”……等名詞在整个定理中乃是按照严格意义来解释的.

(3) ξ 可为 0 或 1, 此时区間 $(0, \xi)$ 和 $(\xi, 1)$ 中有一个消失.

(4) 在最为重要的应用中, 即对于

$$K(x, y) = \frac{1}{x + y}$$

的情形, 条件 (iii) 是滿足的. 要用到条件 (iii') 的一个有趣的情形:

$$K(x, y) = \frac{1}{(x + y)^{1-\alpha} |x - y|^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1)^{1)}.$$

在这一情形, $K(x, 1)$ 在 $x = 1$ 为无穷. 在此种情形, 为了要把相等的对 (m, m) 从求和中除去, 我們要用到条件 (iv).

容易看出, 若 m 与 n 为正整数, 而且求和是就 $r = 1, 2, \dots$ 来取, 則

1) 参考 Hardy, Littlewood 和 Pólya[1].

$$\sum K\left(\frac{r}{n}, 1\right)\left(\frac{r}{n}\right)^{-1/p} \frac{1}{n} < \int_0^\infty K(x, 1)x^{-1/p} dx = k, \quad (9.2.1)$$

$$\sum K\left(1, \frac{r}{m}\right)\left(\frac{r}{m}\right)^{-1/p'} \frac{1}{m} < \int_0^\infty K(1, y)y^{-1/p'} dy = k. \quad (9.2.2)$$

盖若 (iii) 成立, 则

$$K\left(\frac{r}{n}, 1\right)\left(\frac{r}{n}\right)^{-1/p} \frac{1}{n} < \int_{(r-1)/n}^{r/n} K(x, 1)x^{-1/p} dx, \quad (9.2.3)$$

对 n 求和即得 (9.2.1). 若仅 (iii') 成立, 则对 $r > n$ 和 $r \leq \xi n$ 时用 (9.2.3), 对 $\xi n < r < n$ 时用

$$K\left(\frac{r}{n}, 1\right)\left(\frac{r}{n}\right)^{-1/p} \frac{1}{n} < \int_{r/n}^{(r+1)/n} K(x, 1)x^{-1/p} dx;$$

注意 $K(1, 1) = 0$, 则对 n 求和仍得所要之结果. (9.2.2) 的证明与此相同.

因之, 有

$$\begin{aligned} \sum \sum K(m, n) a_m b_n &= \sum \sum a_m K^{1/p} \left(\frac{m}{n}\right)^{1/pp'} b_n K^{1/p'} \left(\frac{n}{m}\right)^{1/pp'} \\ &\leq P^{1/p} Q^{1/p'}, \end{aligned}$$

于此, 由 (9.2.2),

$$\begin{aligned} P &= \sum_m a_m^p \sum_n K(m, n) \left(\frac{m}{n}\right)^{1/p'} \\ &= \sum_m a_m^p \sum_n K\left(1, \frac{n}{m}\right) \left(\frac{n}{m}\right)^{-1/p'} \frac{1}{m} < k \sum a_m^p, \end{aligned}$$

除非 (a) 为 0; 同理,

$$Q < k \sum b_n^{p'},$$

除非 (b) 为 0, 此即证明定理.

若取

$$K(x, y) = \frac{1}{x+y},$$

我們即得定理 315. 可以証明, 定理 318 中之 k 为可能最好之常数, 但在这一方面, 我們將只限于証明定理 317, 而不及其它¹⁾.

1) 参考 § 9.5, 常数 k 关于 $\alpha = 1/p$ 为凸的 (仍用定理 295).

9.3. 关于积分的相应定理. 关于积分与定理 318 相应的定理是

319. 設 $p > 1$, $K(x, y)$ 为非負, 且为 -1 次齐次式; 又設

$$\int_0^\infty K(x, 1)x^{-1/p}dx = \int_0^\infty K(1, y)y^{-1/p'}dy = k,$$

則

$$(a) \int_0^\infty \int_0^\infty K(x, y)f(x)g(y)dx dy \leq k \left(\int_0^\infty f^p dx \right)^{1/p} \left(\int_0^\infty g^{p'} dy \right)^{1/p'},$$

$$(b) \int_0^\infty dy \left(\int_0^\infty K(x, y)f(x)dx \right)^p \leq k^p \int_0^\infty f^p dx,$$

$$(c) \int_0^\infty dx \left(\int_0^\infty K(x, y)g(y)dy \right)^{p'} \leq k^{p'} \int_0^\infty g^{p'} dy.$$

若 $K(x, y)$ 为正, 則在 (b) 中不等式成立, 除非 $f \equiv 0$; 在 (c) 中不等式成立, 除非 $g \equiv 0$; 在 (a) 中不等式成立, 除非 $f \equiv 0$ 或 $g \equiv 0$.

这定理可用 § 9.2 中之方法証明. 当然, 在此种情形, 証明要容易一些. 我們有

$$\begin{aligned} & \iint K(x, y)f(x)g(y)dx dy \\ &= \iint f(x)K^{1/p}\left(\frac{x}{y}\right)^{1/pp'} g(y)K^{1/p'}\left(\frac{y}{x}\right)^{1/pp'} dx dy \\ &\leq P^{1/p}Q^{1/p'}, \end{aligned}$$

其中

$$P = \int f^p(x)dx \int K(x, y)\left(\frac{x}{y}\right)^{1/p'} dy = k \int f^p dx,$$

$$Q = k \int g^{p'} dy.$$

若 $K > 0$, 又設等号成立, 則对几乎所有之 y ¹⁾,

$$A f^p(x) \left(\frac{x}{y}\right)^{1/p'} \equiv B g^{p'}(y) \left(\frac{y}{x}\right)^{1/p}.$$

1) 即是說, 对于几乎所有之 y , (9.3.1) 的两边对于几乎所有之 x 相等. 参考 § 6.3 (d).

若我們給定一个 y , 使得 $g(y)$ 为正且有限, 而且使得上之等价关系成立, 則可看出, $f^p(x)$ 等价于一个函数 Cx^{-1} , 而这与 $\int f^p dx$ 之为收敛相矛盾. 因之, 或 f 或 g 为 0. 我們也可証明, 这常数是可能最好者.

另外一个有趣的証法¹⁾属于 Schur. 我們有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)dx \int_0^\infty K(x, y)g(y)dy &= \int_0^\infty f(x)dx \int_0^\infty xK(x, xw)g(xw)dw \\ &= \int_0^\infty f(x)dx \int_0^\infty K(1, w)g(xw)dw \\ &= \int_0^\infty K(1, w) \int_0^\infty f(x)g(xw)dx\end{aligned}$$

(假若其中有某一个积分收敛的话). 应用定理 189 于内部的积分, 并注意

$$\int g^{p'}(xw)dx = \frac{1}{w} \int g^{p'}(y)dy,$$

則得 (a); 由定理 191, (b) 和 (c) 都是推論.

令 $K(x, y) = 1/(x + y)$ 即得定理 316. 以后 (§ 9.9) 我們还要討論別的应用.

9.4. 定理 318 和定理 319 的推广. (1) 下面的定理比之定理 318 在某些方面要广一些, 但在某些方面又要差一些.

320. 設 $K(x, y)$ 是 x 和 y 的一严格单降函数, 且滿足定理 318 中之条件 (i) 和 (ii); 又設 $\lambda_m > 0, \mu_n > 0$,

$$A_m = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m, M_n = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n;$$

再設 $p > 1$. 則

$$\sum \sum K(A_m, M_n) \lambda_m^{1/p'} \mu_n^{1/p} a_m b_n < k (\sum a_m^p)^{1/p} (\sum b_n^{p'})^{1/p'},$$

除非 (a) 或 (b) 为 0²⁾.

特殊情形 $A_m = m, M_n = n$ 也是定理 318 的一个特殊情形.

我們用一种具有許多用場的方法从定理 319 导出定理 320³⁾.

1) Schur[1]. Schur 假定 $p = 2$.

2) 关于 $p = 2$ 的情形, 可参考 Schur[1].

3) 比較 § 6.4; 并参考, 例如, § 9.11.

我們將 Λ_0 和 M_0 解釋為 0, 並在定理 319 中取

$$f(x) = \lambda_m^{-1/p} a_m (\Lambda_{m-1} \leq x < \Lambda_m),$$

$$g(y) = \mu_n^{-1/p'} b_n (M_{n-1} \leq y < M_n).$$

試注意, 若非 $a_m = 0$ 或 $b_n = 0$, 則

$$\int_{\Lambda_{m-1}}^{\Lambda_m} \int_{M_{n-1}}^{M_n} K(x, y) f(x) g(y) dx dy > \lambda_m^{1/p'} \mu_n^{1/p} a_m b_n K(\Lambda_m, M_n),$$

我們即得定理 320.

若 $K(x, y) = 1/(x + y)$, 則得¹⁾

$$321. \quad \sum \sum \frac{\lambda_m^{1/p'} \mu_n^{1/p}}{\Lambda_m + M_n} a_m b_n < \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} (\sum a_m^p)^{1/p} (\sum b_n^{p'})^{1/p'},$$

除非 (a) 或 (b) 為 0.

(2) 定理 318 和 319 可以推廣到任意多重的級數或積分.

322²⁾. 設 n 個數 $p, q, \dots, r$ 滿足關係

$$p > 1, q > 1, \dots, r > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{r} = 1;$$

$K(x, y, \dots, z)$ 是 n 個變數 $x, y, \dots, z$ 的一個正函數, 且為 $-n+1$ 次齊次式; 又設

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty K(1, y, \dots, z) y^{-\frac{1}{q}} \dots z^{-\frac{1}{r}} dy \dots dz = k, \quad (9.4.1)$$

則

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty K(x, y, \dots, z) f(x) g(y) \dots h(z) dx dy \dots dz \\ & \leq k \left(\int_0^\infty f^p dx \right)^{1/p} \left(\int_0^\infty g^q dy \right)^{1/q} \dots \left(\int_0^\infty h^r dz \right)^{1/r}. \end{aligned}$$

又若

$$y^{-1/q} \dots z^{-1/r} K(1, y, \dots, z), x^{-1/p} \dots z^{-1/r} K(x, 1, \dots, z), \dots$$

各為其所涉及的變數的單降函數, 則

$$\begin{aligned} & \sum \sum \dots \sum K(m, n, \dots, s) a_m b_n \dots c_s \\ & \leq k (\sum a_m^p)^{1/p} (\sum b_n^q)^{1/q} \dots (\sum c_s^r)^{1/r}. \end{aligned}$$

由 K 的齊次性, (9.4.1) 的收斂即隱含所有屬於同一類型的 n

1) Owen^[1] 給出了一個更一般但不甚精密的結果.

2) 關於 $p = q = \dots = r$ 的情形, 可參考 Schur[1].

个积分的收敛。

定理 322 可从定理 318 和 319 的证明直接加以推广来证明。

9.5. 可能最好的常数: 定理 317 的证明. 我們还須要证明定理 317. 这定理说明: 定理 315 和 316 中的常数 $\pi \operatorname{cosec}(\pi/p)$ 是“可能最好”者 (best possible), 就是说, 当 $\pi \operatorname{cosec}(\pi/p)$ 代之以任何較小的数时, 这两个定理所断言的不等式必須对某些 a_m, b_n 或 $f(x), g(y)$ 不成立. 我們所用的方法闡明了一个重要的普遍原則, 而且可运用于許多这种“負”性质的定理的证明之中。

我們取

$$a_m = m^{-(1+\varepsilon)/p}, \quad b_n = n^{-(1+\varepsilon)/p'},$$

其中 ε 是一小的正数; 我們可假定 $\varepsilon < p'/2p$. 我們又用 $O(1)$ 表示一个数, 它可能与 p 和 ε 有关, 但当 p 固定而 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时为有界; 又用 $o(1)$ 表示一个数, 它滿足这些条件, 并且随 ε 趋于 0. 于是,

$$\frac{1}{\varepsilon} = \int_1^\infty x^{-1-\varepsilon} dx < \sum_1^\infty m^{-1-\varepsilon} < 1 + \int_1^\infty x^{-1-\varepsilon} dx = 1 + \frac{1}{\varepsilon},$$

因而有

$$\sum a_m^p = \sum m^{-1-\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} + O(1), \quad \sum b_n^{p'} = \frac{1}{\varepsilon} + O(1). \quad (9.5.1)$$

又有

$$\begin{aligned} \sum \sum \frac{a_m b_n}{m+n} &> \int_1^\infty \int_1^\infty x^{-(1+\varepsilon)/p} y^{-(1+\varepsilon)/p'} \frac{dx dy}{x+y} \\ &= \int_1^\infty x^{-1-\varepsilon} dx \int_{1/x}^\infty u^{-(1+\varepsilon)/p'} \frac{du}{1+u}. \end{aligned}$$

若将内部积分中之下限代之以 0, 則因此而引起的誤差小于 $x^{-\alpha}/\alpha$, 其中 α 为正且与 ε 无关¹⁾; 而

$$\frac{1}{\alpha} \int_1^\infty x^{-1-\alpha-\varepsilon} dx < \frac{1}{\alpha^2}.$$

1) 它小于

$$\int_0^{1/x} u^{-(1+\varepsilon)/p'} du = \frac{x^{-\beta}}{\beta},$$

其中

$$\beta = 1 - \frac{1+\varepsilon}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{\varepsilon}{p'};$$

若 $\varepsilon < p'/2p$, 我們可取 $\alpha = 1/2p$.

因之,有

$$\begin{aligned}\sum\sum \frac{a_m b_n}{m+n} &> \int_1^\infty x^{-1-\varepsilon} dx \int_0^\infty u^{-(1+\varepsilon)/p'} \frac{du}{1+u} + O(1) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} + o(1) \right\} + O(1) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} + o(1) \right\}.\end{aligned}\quad (9.5.2)$$

由(9.5.1)和(9.5.2)显可看出,若 k 是小于 $\pi \operatorname{cosec}(\pi/p)$ 的任一数,则当 ε 充分小时,有

$$\sum\sum \frac{a_m b_n}{m+n} > k(\sum a_m^p)^{1/p}(\sum b_n^{p'})^{1/p'}.$$

这就证明了(9.1.1)中的常数是可能最好的. 因(9.1.1)可以用 § 9.4 中的方法从(9.1.2)推出,故知(9.1.2)中的常数也是可能最好者. 当然,我們也可以直接証明这一結果.

另外的一个方法是当 $m \leq \mu, n \leq \mu$ 时取

$$a_m = m^{-1/p}, b_n = n^{-1/p'},$$

在其它情形則取 $a_m = 0, b_n = 0$, 然后令 μ 趋于无穷. 在各种情形,原則都相同;我們取 a_m 和 b_n 依赖于参数(ε 或 μ),使得所涉及的級数当該参数趋于一极限时趋于无穷,然后对于靠近这一极限的参数的不同的值来比較級数的值. 这一方法在許許多多与定理 317 属于同一类型的定理的証明中都有效. 不等式(9.1.1)和(9.1.2)肯定了一些达不到的上界;除非两边皆为 0,等号总不能成立;因此之故,在余定理的証明中就必須引入一个参数(ε 或 μ).

9.6. 关于 Hilbert 定理的进一步說明¹⁾. 定理 315 和 316 已經用若干不同的方法加以証明,并且有着各种各样的应用. 在这一节和下一节,我們收集了一些注释,它們既涉及到証明,也涉及到应用,而且我們还有意去闡明在这些定理和函数論中若干部分之間存在的联系.

1) 我們把定理 315 (加上較深刻的定理 323) 以及定理 316 說成是“Hilbert 定理”. 严格說来, Hilbert 的定理是定理 315, 其中 $p = 2$.

(1) 定理 315 可以利用我們推导定理 321 所用的方法从定理 316 得出. 我們定义 $f(x)$ 和 $g(y)$ 如下:

$$f(x) = a_m(m-1 \leq x < m), \quad g(y) = b_n(n-1 \leq y < n).$$

我們可以看出此时有

$$\int_{m-1}^m \int_{n-1}^n \frac{f(x)g(y)}{x+y} dx dy \geq \frac{a_m b_n}{m+n}.$$

但在这里我們还可以稍进一步, 这是因为对于 $0 < \alpha < 1$, 有

$$\frac{1}{m+n-1-\alpha} + \frac{1}{m+n-1+\alpha} > \frac{2}{m+n-1},$$

因而有¹⁾

$$\int_{m-1}^m \int_{n-1}^n \frac{dx dy}{x+y} > \frac{1}{m+n-1}.$$

若我們現將 m 和 n 分別代以 $m+1$ 和 $n+1$, 我們即得定理 315 的一个稍微精密的形式, 即

323. 若定理 315 的条件满足, 則

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{a_m b_n}{m+n+1} < \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \left(\sum_0^\infty a_m^p \right)^{1/p} \left(\sum_0^\infty b_n^{p'} \right)^{1/p'}.$$

Hilbert 定理的几个另外的証明, 例如 Mulholland[1]的証明, § 8.12 中所給出的 Schur 的証明, 下面所給出的 Fejer 和 F. Riesz 的証明, 以及 Pólya 和 Szegő [1, I, p. 290]的証明, 也都是以这一形式給出結果. 后面三个証明只限于 $p=2$ 的情形.

(2) Fejér 和 F. Riesz 的証明是以函数論作基础, 其法如下. 設 $f(x) = \sum a_n x^n$ 是一不恆为 0 的非負系数的 N 次多項式. 于是, 由 Cauchy 定理,

$$\int_{-1}^1 f^2(x) dx = -i \int_0^{2\pi} f^2(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta;$$

因而有

$$\int_0^1 f^2(x) dx < \int_{-1}^1 f^2(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta, \quad (9.6.1)$$

1) 积分的相伴 (associate) 元素关于取积分的正方形是对称分布的.

或

$$\sum_0^N \sum_0^N \frac{a_m a_n}{m+n+1} < \pi \sum_0^N a_n^2.$$

若令 $N \rightarrow \infty$, 則得 Hilbert 定理, 但其中 $a_m = b_m$, 且以“ $\leq$ ”代“ $<$ ”. 前一个限制并不重要, 因由 § 8.8, [2, 2] 中之一对称双綫性形式具有一界, 它等于相应的二次型之界. 要将“ $\leq$ ”代之以“ $<$ ”, 这要求將論証精密化, 我們在这里將不加以討論.

(9.6.1)中之第二不等式可以写成

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta,$$

而就这种形式, 不管 a_n 是实的或复的, 它总是成立的, 并有着一些重要的函数論应用¹⁾.

(3) Hilbert 原来的証明是基于恆等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_1^n (-1)^r (a_r \cos rt - b_r \sin rt) \right\}^2 dt = 2\pi(S - T), \quad (9.6.2)$$

其中

$$S = \sum_1^n \sum_1^n \frac{a_r b_s}{r+s}, \quad T = \sum_1^n \sum_1^n' \frac{a_r b_s}{r-s}$$

(一撇表示 $r = s$ 的那种对 r, s 省去). 由此即得

$$\begin{aligned} 2\pi|S - T| &\leq \pi \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_1^n (-1)^r (a_r \cos rt - b_r \sin rt) \right\}^2 dt \\ &= \pi^2 \sum_1^n (a_r^2 + b_r^2). \end{aligned} \quad (9.6.3)$$

若 $a_r = b_r$, T 即消失, 此时即得

$$\sum_1^n \sum_1^n \frac{a_r a_s}{r+s} \leq \pi \sum_1^n a_r^2; \quad (9.6.4)$$

1) 参看 Fejér 和 F. Riesz[1]. 真正說来, 这不等式对于任何使得 $\sum |a_n|^2$ 收斂的 $f(z)$ 皆是成立的(而且是以“ $<$ ”这一严格形式), 除非 $f(z) = 0$; 而这就是 Hilbert 定理的一个系, 假若这定理已經用某一另外的方法証明了的話.

由(9.6.4)和(2)中提到的 § 8.8 的注释, 即得

$$\begin{aligned} \sum_1^n \sum_1^n \frac{a_r b_s}{r+s} &\leq \pi \left(\sum_1^n a_r^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_1^n b_s^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} \pi \left(\sum_1^n a_r^2 + \sum_1^n b_s^2 \right). \end{aligned} \quad (9.6.5)$$

由(9.6.3)和(9.6.5)即得

$$|T| = \left| \sum_1^n \sum_1^n' \frac{a_r b_s}{r-s} \right| \leq \pi \left(\sum_1^n a_r^2 + \sum_1^n b_s^2 \right);$$

因之, 根据齐次性, 即得

$$\left| \sum_1^n \sum_1^n' \frac{a_r b_s}{r-s} \right| \leq 2\pi \left(\sum_1^n a_r^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_1^n b_s^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

由此即得定理 294 的第二结果, 除了常数 2π 不是可能最好的常数这一点之外.

9.7. Hilbert 定理的应用. (1) 作为 Hilbert 定理在解析函数论上的一个应用, 我们现选取下面的结果. 设 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 中正则, 且属于“复 Lebesgue 类 L ”, 就是说,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta$$

当 $r < 1$ 时为有界. 若 $f(z)$ 是 “Wurzelfrei”*, 就是说, 在 $|z| < 1$ 中无根, 则

$$f(z) = \sum c_n z^n = g^2(z) = (\sum a_n z^n)^2,$$

于此, $g(z)$ 也在 $|z| < 1$ 中为正则. 因 $\int |g(re^{i\theta})|^2 d\theta$ 为有界, 故 $\sum |a_n|^2$ 收敛, 因而由定理 323,

$$\sum \frac{|a_m| |a_n|}{m+n+1}$$

收敛. 由是更有

$$\sum_v \frac{|c_v|}{v+1} = \sum_v \frac{1}{v+1} \left| \sum_{m+n=v} a_m a_n \right|$$

* 德语“无根”之意——译者注.

收斂。

利用复变函数論的这一部分当中一个比較熟知的方法，相当容易地就可以把这一結論推广到一般的 f (不必 “Wurzelfrei”) 上去¹⁾。由是即得定理：若 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 中属于 L ，則它积分出来所得之幂級数当 $|z| = 1$ 时为绝对收斂²⁾。

(2) 作为 Hilbert 級数定理在单实变函数論中的一个应用，我們現来証明

324³⁾。若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 中为实的，属于 L^2 ，且不为 0，又若

$$a_n = \int_0^1 x^n f(x) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

則

$$\sum a_n^2 < \pi \int_0^1 f^2(x) dx.$$

这常数是可能最好的。

我們显然可假定 $f(x) \geq 0$ 。于是，由 Hilbert 定理，若 (b_n) 是任一非負且不为 0 的序列，則

$$\sum a_n b_n = \sum b_n \int_0^1 x^n f(x) dx = \int_0^1 (\sum b_n x^n) f(x) dx,$$

$$(\sum a_n b_n)^2 \leq \int_0^1 (\sum b_n x^n)^2 dx \int_0^1 f^2(x) dx$$

$$= \sum \sum \frac{b_m b_n}{m+n+1} \cdot \int_0^1 f^2(x) dx$$

$$< \pi \sum b_n^2 \cdot \int_0^1 f^2(x) dx.$$

由定理 15 即得所要的結果。

欲証明常数 π 是可能最好者，我們可考虑

$$f(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}},$$

1) 参看 F. Riesz[3]，Hardy 和 Littlewood[2]。我們可将 f 表示成 L 中两个 “Wurzelfrei” 函数之和。

2) Hardy 和 Littlewood[2]。这一定理也可表达成“若一幂級数 $g(z) = \sum b_n z^n$ 在 $|z| < 1$ 中为有界变差，則 $\sum |b_n|$ 收斂”。关于此定理的这一形式，以及更为精密的結果，可参考 Fejér[1]。

3) 一个更为广泛得多的不等式，但却缺少常数的可能最好的值，是由 Hardy 和 Littlewood^[11] 証明的，也参考 Hardy[10]。

然后令 ε 趋于 0.

积分 a_n 称为 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 中的矩, 在許多种理論中甚为重要.

在这里, 我們是从定理 323 (取 $p = 2$) 和定理 15 (Hölder 不等式之逆) 导出定理 324. 假若愿意, 我們可将論理反过来, 即从定理 324 和定理 191 (定理 15 的积分类似情形) 导出定理 323 ($p = 2$). 設 $g(x) = \sum b_n x^n$, 其中 b_n 为非負, 且不常为 0; 又設 $f(x)$ 是任一非負且非 0 的函数, 則由定理 324,

$$\int_0^1 fg dx = \int_0^1 (\sum b_n x^n) f dx = \sum b_n \int_0^1 x^n f dx = \sum a_n b_n,$$

$$\left(\int_0^1 fg dx \right)^2 = (\sum a_n b_n)^2 \leq \sum a_n^2 \sum b_n^2 < \pi \sum b_n^2 \int_0^1 f^2 dx.$$

因上式对所有之 f 皆成立, 由定理 191 即得

$$\int_0^1 g^2 dx < \pi \sum b_n^2;$$

而这等价于定理 323.

显而易见, 若两个各涉及一常数因子的不等式在此意义下为“互逆的”, 即每一个可从另一个利用 Hölder 不等式之逆用这种方法导出, 則若其中一个常数为可能最好者, 其它一个亦必如此. 后面 (§ 9.10(1)) 我們还将遇到这一原則的另一应用.

(3) 作为定理 316 (取 $p = 2$) 的一个系, 我們現証

325¹⁾. 設 $a_n \geq 0$, 又設求和是从 0 到 ∞ , 而且

$$A(x) = \sum a_n x^n, \quad A^*(x) = \sum \frac{a_n x^n}{n!}, \quad (9.7.1)$$

則

$$\sum \sum \frac{a_m a_n}{m+n+1} \leq \pi \sum \sum \frac{(m+n)!}{m!n!} \frac{a_m a_n}{2^{m+n+1}}, \quad (9.7.2)$$

$$\int_0^1 A^2(x) dx \leq \pi \int_0^\infty \{e^{-x} A^*(x)\}^2 dx, \quad (9.7.3)$$

利用展开并逐項积分, 我們立可証明 (9.7.2) 和 (9.7.3) 是等价

1) Widder[1], Hardy[9].

的,

欲証明(9.7.3),我們可注意

$$A(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} A^*(xt) dt = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-u/x} A^*(u) du,$$

因而有

$$\begin{aligned} \int_0^1 A^2(x) dx &= \int_0^1 \frac{dx}{x^2} \left(\int_0^{\infty} e^{-u/x} A^*(u) du \right)^2 \\ &= \int_1^{\infty} dy \left(\int_0^{\infty} e^{-uy} A^*(u) du \right)^2 \\ &= \int_0^{\infty} dw \left(\int_0^{\infty} e^{-uw} \alpha(u) du \right)^2, \end{aligned}$$

其中

$$\alpha(u) = e^{-u} A^*(u).$$

由定理 316, 此即

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dw \int_0^{\infty} e^{-uw} \alpha(u) du \int_0^{\infty} e^{-vw} \alpha(v) dv \\ = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\alpha(u) \alpha(v)}{u+v} du dv \leq \pi \int_0^{\infty} \alpha^2(u) du \\ = \pi \int_0^{\infty} \{e^{-u} A^*(u)\}^2 du. \end{aligned}$$

容易看出, 常数 π 为可能最好者. (9.7.1) 中之函数間的关系在发散級数論中是重要的, 特別是在联系到解析函数的奇点时是如此.

9.8. Hardy 不等式. 下面我們所將討論的两个定理乃是由于企图簡化当时所知道的 Hilbert 定理的証明順带发现的¹⁾.

假若我們所要的只是定理 315 的一个不完全的形式: 若 $\sum a_n^p$ 和 $\sum b_n^{p'}$ 收斂, 則二重級数 $\sum \sum \frac{a_m b_n}{m+n}$ 收斂, 我們便可自然地如下进行. 我們按对角綫 $m = n$ 将此二重級数分成两部分 S_1, S_2 , 而来考虑部分 S_1 , 其中 $m \leq n$. 于是

1) 在 Hilbert 二重級数定理的任何真正的簡單証明出現之前, 曾有一段相当长的時間,

$$S_1 = \sum_{m \leq n} \sum_{m+n} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \sum_{m \leq n} \sum_{m+n} \frac{a_m b_n}{n} = \sum \frac{A_n}{n} b_n,$$

其中

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

因 $\sum b_n^p$ 为收敛, 故最后之级数当 $\sum n^{-p} A_n^p$ 为收敛时收敛, 因之, 欲证明 S_1 收敛, 只须证明最后一级数之收敛可从 $\sum a_n^p$ 之收敛推导出来即可. S_2 之收敛亦可同法证明.

上述这一证明的线索逐渐引出下之定理, 并由下之定理使它变得完善.

326. 若 $p > 1$, $a_n \geq 0$, $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则

$$\sum \left(\frac{A_n}{n} \right)^p < \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum a_n^p, \quad (9.8.1)$$

除非所有之 a 皆为 0. 此常数为可能最好者.

关于积分相应的定理是

327¹⁾. 若 $p > 1$, $f(x) \geq 0$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 则

$$\int_0^\infty \left(\frac{F}{x} \right)^p dx < \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f^p dx, \quad (9.8.2)$$

除非 $f \equiv 0$. 这常数是可能最好者.

这两个定理是由 Hardy^[2] 首先证明的, 只是 Hardy 没有能够确定定理 326 中的常数. 这一缺陷是由 Landau^[4] 补救的. 这定理的大量的其它证明曾由许多作者所给出, 例如 Broadbent^[1], Elliott^[1], Grandjot^[1], Hardy^[4], Kaluza 和 Szegő^[1], Knopp^[1]. 我们先给出定理 326 的 Elliott 的证明, 然后给出定理 327 的 Hardy 的证明²⁾.

(i) 在证明定理 326 时, 我们可设 $a_1 > 0$. 盖若假定 $a_1 = 0$, 并以 b_n 代 a_{n+1} , 则(9.8.1)即变为

1) 我们已经在第七章中遇到这一定理, 不过那里所给出的证明(只当 $p = 2$ 时才详细给出)主要是用来阐明变分方法, 并没有特别追求它的简单性.

2) 我们推广了这些证明, 以便处理等号何时出现的问题.

$$\left(\frac{b_1}{2}\right)^p + \left(\frac{b_1+b_2}{3}\right)^p + \dots < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p (b_1^p + b_2^p + \dots),$$

这是一个比(9.8.1)本身更弱的不等式.

我們現將 A_n/n 写作 α_n , 并約定, 任何以 0 为附标的数皆为 0. 則得

$$\begin{aligned} \alpha_n^p - \frac{p}{p-1} \alpha_n^{p-1} a_n &= \alpha_n^p - \frac{p}{p-1} \{n\alpha_n - (n-1)\alpha_{n-1}\} \alpha_n^{p-1} \\ &= \alpha_n^p \left(1 - \frac{np}{p-1}\right) + \frac{(n-1)p}{p-1} \alpha_n^{p-1} \alpha_{n-1} \\ &\leq \alpha_n^p \left(1 - \frac{np}{p-1}\right) + \frac{n-1}{p-1} \{(p-1)\alpha_n^p + \alpha_{n-1}^p\}^{1)} \\ &= \frac{1}{p-1} \{(n-1)\alpha_{n-1}^p - n\alpha_n^p\}. \end{aligned}$$

因之,

$$\sum_1^N \alpha_n^p - \frac{p}{p-1} \sum_1^N \alpha_n^{p-1} a_n \leq -\frac{N\alpha_N^p}{p-1} \leq 0;$$

于是, 由定理 13, 有

$$\sum_1^N \alpha_n^p \leq \frac{p}{p-1} \sum_1^N \alpha_n^{p-1} a_n \leq \frac{p}{p-1} \left(\sum_1^N \alpha_n^p\right)^{1/p} \left(\sum_1^N \alpha_n^p\right)^{1/p'}. \quad (9.8.3)$$

用右边最后一因子 (这必然为正) 来除两边, 并将所得之結果自乘 p 次, 則得

$$\sum_1^N \alpha_n^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_1^N \alpha_n^p. \quad (9.8.4)$$

若令 N 趋于无穷, 則得(9.8.1), 只是以“ $\leq$ ”代替了“ $<$ ”. 特別, 我們可以看出 $\sum \alpha_n^p$ 为有限.

回到(9.8.3), 并以 ∞ 代 N , 則得

$$\sum \alpha_n^p \leq \frac{p}{p-1} \sum \alpha_n^{p-1} a_n \leq \frac{p}{p-1} (\sum \alpha_n^p)^{1/p} (\sum \alpha_n^p)^{1/p'}. \quad (9.8.5)$$

在第二不等式中不等号成立, 除非 (a_n^p) 与 (α_n^p) 成比例, 就是說,

1) 由定理 9.

除非 $a_n = Ca_n$, 其中 C 与 n 无关. 若是如此, 則(因 $a_1 = \alpha_1 > 0$) 必 C 等于 1, 因而对于所有之 n , $A_n = na_n$. 这只有当所有之 a 相等时才有可能, 而这与 $\sum a_n^p$ 之为收敛这一点相矛盾. 因之,

$$\sum \alpha_n^p < \frac{p}{p-1} (\sum a_n^p)^{1/p} (\sum \alpha_n^p)^{1/p'}; \quad (9.8.6)$$

于是, 正如从 (9.8.3) 之得出 (9.8.4) 那样, 从 (9.8.6) 即可得 (9.8.1).

欲証明該常数因子是可能最好者, 我們可取

$$a_n = n^{-1/p} \quad (n \leq N), \quad a_n = 0 \quad (n > N).$$

則得

$$\sum a_n^p = \sum_1^N \frac{1}{n},$$

$$A_n = \sum_1^n n^{-1/p} > \int_1^n x^{-1/p} dx = \frac{p}{p-1} \{n^{(p-1)/p} - 1\} \quad (n \leq N),$$

$$\left(\frac{A_n}{n}\right)^p > \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \frac{1 - \epsilon_n}{n} \quad (n \leq N),$$

于此, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\epsilon_n \rightarrow 0$. 由此即得

$$\sum \left(\frac{A_n}{n}\right)^p > \sum_1^N \left(\frac{A_n}{n}\right)^p > \left(\frac{p}{p-1}\right)^p (1 - \eta_N) \sum a_n^p,$$

于此, 当 $N \rightarrow \infty$ 时 $\eta_N \rightarrow 0$. 因之, 若 a_n 如上选取, N 为充分大, 則任何形如

$$\sum \left(\frac{A_n}{n}\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p (1 - \epsilon) \sum a_n^p$$

之不等式皆是不对的.

另外一种做法就是对于任何 n 取 $a_n = n^{-(1/p)-\epsilon}$, 然后使 ϵ 很小. 比較 § 9.5 可以看出, 該处我們所依循的就是这种做法.

(ii) 我們可假定 f 不是一零函数. 設 $n > 0$, $f_n = \min(f, n)$, $F_n = \int_0^x f_n dx$, 并設 X_0 甚大, 使得 f , 因而 f_n , F_n , 当 $X > X_0$ 时在 $(0, X)$ 中不是一零函数. 我們有

$$\int_0^X \left(\frac{F_n}{x}\right)^p dx = -\frac{1}{p-1} \int_0^X F_n^p \frac{d}{dx} (x^{1-p}) dx$$

$$= \left[-\frac{x^{1-p} F_n^p(x)}{p-1} \right]_0^x - \frac{p}{p-1} \int_0^x \left(\frac{F_n}{x} \right)^{p-1} f_n dx \\ \leq \frac{p}{p-1} \int_0^x \left(\frac{F_n}{x} \right)^{p-1} f_n dx,$$

盖由 $f_n = o(x)$, 已积分出来之项在 $x=0$ 处为 0. 由是有

$$\int_0^x \left(\frac{F_n}{x} \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right) \left(\int_0^x \left(\frac{F_n}{x} \right)^p dx \right)^{1/p'} \left(\int_0^x f_n^p dx \right)^{1/p}. \quad (9.8.7)$$

因左边为正(且有限), 故由此即得

$$\int_0^x \left(\frac{F_n}{x} \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^x f_n^p dx.$$

在上式中令 $n \rightarrow \infty$, 其结果无异把两个附标 n 省略掉; 于是, 令 $X \rightarrow \infty$, 则得

$$\int_0^\infty \left(\frac{F}{x} \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f^p dx,$$

这就是所要的结果, 不过以“ $\leq$ ”代“ $<$ ”. 在(9.8.7)中先令 $n \rightarrow \infty$, 然后再令 $X \rightarrow \infty$, 则得

$$\int_0^\infty \left(\frac{F}{x} \right)^p dx \leq \frac{p}{p-1} \left(\int_0^\infty \left(\frac{F}{x} \right)^p dx \right)^{1/p'} \left(\int_0^\infty f^p dx \right)^{1/p}. \quad (9.8.8)$$

因其中所出现的积分现已知皆为正且有限, 故由(9.8.8), 即得

$$\int_0^\infty \left(\frac{F}{x} \right)^p dx < \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f^p dx,$$

除非 $x^{-p} F^p$ 与 f^p 事实上成比例. 但这是不可能的, 因这会使得 f 成为 x 的一个方次, 因而 $\int f^p dx$ 为发散.

常数为可能最好者的证明可依前面的同一线索得出; 当 $x < 1$ 时取 $f(x) = 0$, 当 $x \geq 1$ 时取 $f(x) = x^{-(1/p)-\epsilon}$.

定理 326 的 Elliott 的证明经浅显的修改即可运用于定理 327. 在(ii)中所给出的定理 327 的证明可以用于级数, 但却不能得出常数的可能最好值.

(iii) 定理 327 的下述证明(属于 Ingham)也是很有趣的, 我们只想证明以“ $\leq$ ”出现的形式. 我们运用定理 203, 而在其中假定

积分的区间各为 $(0, 1)$, 权函数皆为 1, 又设 $r = 1, s = p > 1$,

$f(x, y) = f(xy)$. 于是, 对于 $x \leq 1$, 有

$$\mathfrak{M}_1^{(x)} f(xy) = \int_0^1 f(xy) dx = \frac{F(y)}{y},$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_p^{(y)} f(xy) &= \left\{ \int_0^1 f^p(xy) dy \right\}^{1/p} \\ &= \left\{ \frac{1}{x} \int_0^x f^p(t) dt \right\}^{1/p} \leq \left\{ \frac{1}{x} \int_0^1 f^p(t) dt \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

于是, 由定理 203, 即得

$$\left\{ \int_0^1 \left(\frac{F}{y} \right)^p dy \right\}^{1/p} \leq \left(\int_0^1 f^p dt \right)^{1/p} \int_0^1 x^{-1/p} dx = \frac{p}{p-1} \left(\int_0^1 f^p dx \right)^{1/p}.$$

令 $x = X/c$, $f(X/c) = g(X)$, 并以 x, f 代 X, g , 然后令 $c \rightarrow \infty$, 即得所要之结果.

9.9. 另外的积分不等式. 定理 326 和 327 有着许多类似情形和推广, 这些是由一些不同的作者以不同的方法证明的; 在这里, 我们即给出其中的一部分. 我们先考虑积分不等式, 因为其中大部分可从定理 319 用一种简单而且一致的方法导出, 而关于级数的相应定理有时还多少牵涉到一些额外的麻烦.

(1) 在定理 319 中取

$$K(x, y) = 1/y \quad (x \leq y), \quad K(x, y) = 0 \quad (x > y).$$

于是, 若 $p > 1$, 则

$$k = \int_0^\infty K(x, 1) x^{-1/p} dx = \int_0^1 x^{-1/p} dx = \frac{p}{p-1},$$

且 K 满足所有之条件. 因之, 由定理 319 中之 (b) 和 (c), 即得

$$\int_0^\infty dy \left(\frac{1}{y} \int_0^y f(x) dx \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f^p dx, \quad (9.9.1)$$

$$\int_0^\infty dx \left(\int_x^\infty \frac{g(y)}{y} dy \right)^{p'} \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^{p'} \int_0^\infty g^{p'} dy. \quad (9.9.2)$$

这些不等式中, (9.9.1) 就是定理 327, 不过是以 “ $\leq$ ” 代 “ $<$ ”; 我们不能从该一般性定理中引用 “ $<$ ”, 因为 K 并不常为正. 若对于一非 0 的 f , 在 (9.9.1) 中等号成立, 则对于非 0 的 f 和 g , 有

$$\iint K(x, y) f(x) g(y) dx dy = \frac{p}{p-1} \left(\int f^p dx \right)^{1/p} \left(\int g^{p'} dx \right)^{1/p'}.$$

于是,由 § 9.3 的論証可知,对于 $x < y$ 和对于函数 f , f 当 x 甚小时 $\equiv Cx^{-1/p}$, (9.3.1) 成立,而这与 $\int f^p dx$ 之为收敛相矛盾.

同法可証 (9.9.2) 中之不等号成立,除非 g 为 0. 经过简单的变换即得

328. 若 $p > 1$,

$$F(x) = \int_x^\infty f(t) dt,$$

則

$$\int_0^\infty F^p dx < p^p \int_0^\infty (xf)^p dx, \quad (9.9.3)$$

除非 $f \equiv 0$. 常数为可能最好者.

(2) 更一般言之,命 $r > 0$, 取

$$K(x, y) = \frac{1}{\Gamma(r)} \frac{(y-x)^{r-1}}{y^r} \quad (x < y), \quad K(x, y) = 0 \quad (x \geq y).$$

当 $r = 1$ 时,即为(1). 我們現在有

$$k = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^1 x^{-1/p} (1-x)^{r-1} dx = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(r + 1 - \frac{1}{p}\right)}.$$

于是我們即得

329. 若 $p > 1$, $r > 0$, 且

$$f_r(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^x (x-t)^{r-1} f(t) dt, \quad (9.9.4)$$

則

$$\int_0^\infty \left(\frac{f_r}{x^r}\right)^p dx < \left\{ \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(r + 1 - \frac{1}{p}\right)} \right\}^p \int_0^\infty f^p dx, \quad (9.9.5)$$

除非 $f \equiv 0$. 若

$$f_r = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_x^\infty (t-x)^{r-1} f(t) dt, \quad (9.9.6)$$

則

$$\int_0^{\infty} f_r^p dx < \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(r + \frac{1}{p}\right)} \right]^p \int_0^{\infty} (x'f)^p dx, \quad (9.9.7)$$

除非 $f \equiv 0$. 在此两种情形, 常数皆为可能最好者.

(9.9.4) 中之函数 $f_r(x)$ 就是具有“原点”0 的 $f(x)$ 的 r 阶“Riemann-Liouville 积分”¹⁾. 函数(9.9.6)是 r 阶的“Weyl 积分”, 它在某些方面要方便一些, 特别是在 Fourier 级数論中是如此.

(3) 命 $\alpha < 1/p'$, 取

$$K(x, y) = \frac{y^{\alpha-1}}{x^{\alpha}} (x \leq y), \quad K(x, y) = 0 (x > y),$$

則

$$h = \int_0^1 x^{-\alpha-\frac{1}{p}} dx = \frac{p}{p - \alpha p - 1}.$$

由定理 319 之 (b) 和 (c) 即得

$$\int_0^{\infty} y^{p(\alpha-1)} \left(\int_0^y x^{-\alpha} f(x) dx \right)^p dy < \left(\frac{p}{p - \alpha p - 1} \right)^p \int_0^{\infty} f^p dx, \quad (9.9.8)$$

$$\int_0^{\infty} x^{-\alpha p'} \left(\int_x^{\infty} y^{\alpha-1} g(y) dy \right)^{p'} dx < \left(\frac{p'}{1 - \alpha p'} \right)^{p'} \int_0^{\infty} g^{p'} dy. \quad (9.9.9)$$

变换記号, 即得

330. 若 $p > 1$, $r \neq 1$, $F(x)$ 定义为

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (r > 1), \quad F(x) = \int_x^{\infty} f(t) dt \quad (r < 1),$$

則

$$\int_0^{\infty} x^{-r} F^p dx < \left(\frac{p}{|r-1|} \right)^p \int_0^{\infty} x^{-r} (xf)^p dx, \quad (9.9.10)$$

除非 $f \equiv 0$ ²⁾.

常数是可能最好的. 容易証明, 当 $p = 1$ 时, (9.9.10) 的两边

1) 参考 § 10.17. 定理 329 的一部分是 Knopp^[8] 証明的.

2) 关于直接的証明, 可参考 Hardy[5].

相等.

9.10. 关于級数的另外的定理. 在定理 326 的类似情形和推广之中, 我們現选取下之結果.

(1) 下之定理与定理 326 之間的关系, 正如定理 328 之于定理 327 相似.

331¹⁾. 若 $p > 1$, 則

$$\sum (a_n + a_{n+1} + \cdots)^p < p^p \sum (na_n)^p,$$

除非 (a_n) 为 0. 常数为可能最好者.

这定理就 § 9.7(2) 的意义而言是定理 326 之逆, 就是說, 它可从后一定理利用 Hölder 不等式之逆导出. 把这証明詳細写出来是有教益的, 虽然我們所說的总起来不过是把我們前面已經更普遍地解說过的东西就一特殊情形重复一次²⁾.

若 $K(x, y)$ 如 § 9.9(1) 中所定义, 則由定理 13 和 326, 有

$$\begin{aligned} \sum \sum K(m, n) a_m b_n &= \sum_{m \leq n} \sum \frac{a_m b_n}{n} = \sum \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} b_n \\ &= \sum \frac{A_n}{n} b_n \leq \left\{ \sum \left(\frac{A_n}{n} \right)^p \right\}^{1/p} (\sum b_n^{p'})^{1/p'} \\ &< \frac{p}{p-1} (\sum a_m^p)^{1/p} (\sum b_n^{p'})^{1/p'}, \end{aligned} \quad (9.10.1)$$

除非 (a) 或 (b) 为 0.

另一方面,

$$\sum \sum K(m, n) a_m b_n = \sum a_m \left(\frac{b_m}{m} + \frac{b_{m+1}}{m+1} + \cdots \right);$$

而对于使得 $\sum a_m^p = 1$ 的所有 (a) , 由定理 15, 上式的极大值是

$$\left\{ \sum \left(\frac{b_m}{m} + \frac{b_{m+1}}{m+1} + \cdots \right)^{p'} \right\}^{1/p'}.$$

因之, 由(9.10.1),

$$\left\{ \sum \left(\frac{b_m}{m} + \frac{b_{m+1}}{m+1} + \cdots \right)^{p'} \right\}^{1/p'}$$

1) Copson[1]; 也参考 Hardy[6],

2) 参考 § 8.7,

$$< \frac{p}{p-1} (\sum b_n^{p'})^{1/p'} = p' (\sum b_n^{p'})^{1/p'}.$$

將 b_n 改作 ma_n , p' 改作 p , 我們即得定理 331.

至于常数 p^p 之为可能最好者这一点, 則可从 § 9.7(2) 之最后說明得出.

(2) 332. 若 $p > 1$, $a_n \geq 0$, $\lambda_n > 0$,

$$\Lambda_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n, \quad A_n = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n,$$

則

$$\sum \lambda_n \left(\frac{A_n}{\Lambda_n} \right)^p < \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum \lambda_n a_n^p,$$

除非 (a_n) 为 0.

这一定理与定理 326 之間的关系正如同定理 321 之于定理 315 一样, 它可以用許多方法来証明. 首先, 它可从定理 320 经过特別选取 K 而得出(如同在 § 9.9 中定理 327 之从定理 319 推出); 但等号何时出現的問題此时需要稍加留意. 最簡單的証明也許就是直接采用 § 9.8 中 Elliott 的方法. 若 $\alpha_n = A_n/\Lambda_n$, 我們可以看出

$$\lambda_n \alpha_n^p - \frac{p}{p-1} \lambda_n \alpha_n^{p-1} a_n \leq \frac{1}{p-1} (\Lambda_{n-1} \alpha_{n-1}^p - \Lambda_n \alpha_n^p);$$

所要的証明可仿照 § 9.8 来完成¹⁾.

这定理也可由定理 327 通过选取 f 为一适当的阶梯函数而得出(此即 § 9.4 中我們由定理 319 推出定理 320 所用的方法). 我們將不把它詳細写出²⁾; 但这点說明引起了一些問題, 这我們在下节中多少还要談到一些.

9.11. 从关于积分的定理推出关于級数的定理³⁾. 刚才所提到的而且在 § 9.4 中真正用过的推导方法是非常自然而且常常有效的. 但它却容易引出一些細節上的困难, 因而通常宁可采用直接的方法. 为要闡明这一方法, 我們現由定理 327 推出定理 326,

1) 关于詳細情形可参考 Copson[1].

2) 关于細節(这是相当麻煩的)可参考 Hardy[4].

3) 比較 §§ 6.4 和 9.4(1).

这順便还使我們給出了一个本身相当有意义的說明.

我們首先注意, 只須在 a_n 为一单降序列这一假設之下来証明定理 326 即可. 这可从一个定理得出, 这定理值得分开来叙述.

333. 若 a_n 除次序之外已經給定, 又設 $\phi(u)$ 是 u 的一个正的单增函数, 則

$$\sum \phi\left(\frac{A_n}{n}\right)$$

当 a_n 依降序排列时为最大.

欲証明定理 333, 我們只須注意, 若 $v > \mu$ 且 $a_v > a_\mu$, 則因交換 a_μ 与 a_v 所引起的結果, A_n 当 $n < \mu$ 或 $n \geq v$ 时不变, 而当 $\mu \leq n < v$ 时, A_n 則增大. 这定理是我在第十章中将要大为詳細討論的那一类型的定理中之一定理.

現設 a_n 为单降, 又設定理 327 已經証明. 我們定义 $f(x)$ 如

$$f(x) = a_n \quad (n-1 \leq x < n),$$

則

$$\sum a_n^p = \int_0^\infty f^p dx. \quad (9.11.1)$$

若 $n < x < n+1$, 則

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{x} &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + (x-n)a_{n+1}}{x} = \\ &= \frac{A_n - na_{n+1} + xa_{n+1}}{x}, \end{aligned}$$

且

$$A_n - na_{n+1} \geq 0,$$

因而当 x 从 n 增到 $n+1$ 时, F/x 从 A_n/n 下降到 $A_{n+1}/(n+1)$. 由是有

$$\frac{F}{x} \geq \frac{A_{n+1}}{n+1} \quad (n < x < n+1),$$

因而有

$$\int_0^\infty \left(\frac{F}{x}\right)^p dx \geq \sum_1^\infty \left(\frac{A_n}{n}\right)^p. \quad (9.11.2)$$

由(9.11.1), (9.11.2)和定理 333 即得定理 326.

假若讀者要想用同样方法从定理 328 推出定理 331, 他将会发现一些困难. 在从积分过渡到級数时, 将会带来一些損失, 而且也决不是經常(象这里的那样)可以不損伤最終的結果而能过渡到的.

9.12. Carleman 不等式. 若在定理 326 中我們写 a_n 代替 a_n^p , 則得

$$\sum \left(\frac{a_1^{1/p} + a_2^{1/p} + \cdots + a_n^{1/p}}{n} \right)^p < \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum a_n. \quad (9.12.1)$$

若令 $p \rightarrow \infty$, 并利用定理 3, 則得

$$\sum (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq e \sum a_n;$$

这結果提示了下面一个較为完善的定理.

$$334^1). \quad \sum (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} < e \sum a_n,$$

除非 (a_n) 为 0. 常数是可能最好者.

我們自然会想到利用定理 9 来証明这一完善的定理; 但将定理 9 直接用于 (9.12.1) 的左边是不够的²⁾. 要补救这一点, 我們將定理 9 不用于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 而用于 $c_1 a_1, c_2 a_2, \cdots, c_n a_n$. 选取諸 c , 使得当 $\sum a_n$ 接近于收斂的边界时, 这些数“大致相等”. 这就要求 c_n 大致是 n 的阶.

这种想法提示了下面的証明. 我們有

$$\begin{aligned} \sum (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} &= \sum \left(\frac{c_1 a_1 \cdot c_2 a_2 \cdots c_n a_n}{c_1 c_2 \cdots c_n} \right)^{1/n} \\ &\leq \sum_n (c_1 c_2 \cdots c_n)^{-1/n} \frac{1}{n} \sum_{m \leq n} c_m a_m \end{aligned}$$

1) Carleman[1]. 这里所作的証明属于 Pólya[2]. 一个欠精密的收斂定理(缺常数 e) 曾独立地由一些别的作者得出, 这定理还有若干个这种或那种形式的証明. 参考 Collingwood [見 Valiron, 1, 186, 那里有一个属于 Littlewood 的証明], Kaluza 与 Szegő[1], Knopp[1], Ostrowski [2, pp. 201—204].

2) $\sum_n (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq \sum_n \frac{1}{n} \sum_{m \leq n} a_m = \sum_m a_m \sum_{n \geq m} \frac{1}{n};$

但右边一般是发散的. 这証明失败了, 因为在 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 中的这些 a “太不相同了”, 因而以 $\mathfrak{U}(a)$ 代 $\mathfrak{O}(a)$ 时失效.

$$= \sum_m a_m c_m \sum_{n \geq m} \frac{1}{n} (c_1 c_2 \cdots c_n)^{-1/n}.$$

欲使内部的求和容易处理,我們选取

$$(c_1 c_2 \cdots c_n)^{1/n} = n + 1,$$

此时

$$c_m = \frac{(m+1)^m}{m^{m-1}},$$

$$\sum_{n \geq m} \frac{1}{n} (c_1 c_2 \cdots c_n)^{-1/n} = \sum_{n \geq m} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{m}.$$

于是,由定理 140,

$$\sum (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq \sum \frac{a_m c_m}{m} = \sum a_m \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < e \sum a_m,$$

除非 a_m 为 0.

我們可以依照 § 9.5 的方法証明此常数为可能最好者. 例如我們可取 a_n : 当 $n \leq \mu$ 时, $a_n = \frac{1}{n}$; 当 $n > \mu$ 时, $a_n = 0$, 然后令 μ 趋于无穷.

相应的积分定理是

335¹⁾. 若 f 是一非 0 函数, 則

$$\int_0^\infty \exp \left\{ \frac{1}{x} \int_0^x \log f(t) dt \right\} dx < e \int_0^\infty f(x) dx.$$

9.13. 当 $0 < p < 1$ 时的定理. 直到現在我們都是假定在定理中所涉及的参数 p 皆大于 1. 但其中有許多定理对于 p 小于 1 也有类似的結果, 我們在这一节中对它們作一次选择. 这两种情形之間特有的差別就在于(正如我們在經驗过 Hölder 和 Minkowski 不等式之后所預料到的)不等号反号.

(1) **336.** 若 $K(x, y)$ 为非負, 且为 -1 次齐次式, $0 < p < 1$, 又設

$$\int_0^\infty K(x, 1) x^{-1/p} dx = \int_0^\infty K(1, y) y^{-1/p'} dy = k < \infty,$$

1) Knopp[1].

則

$$(a) \int_0^\infty \int_0^\infty K(x, y) f(x) g(y) dx dy \geq k \left(\int_0^\infty f^p dx \right)^{1/p} \left(\int_0^\infty g^{p'} dy \right)^{1/p'},$$

$$(b) \int_0^\infty dy \left(\int_0^\infty K(x, y) f(x) dx \right)^p \geq k^p \int_0^\infty f^p(x) dx.$$

在这里，依照 § 5.1 和 § 6.5 的规定，(a) 表示“若该二重积分和右边之第二积分为有限，则右边之第一积分亦为有限，且…”；(b) 则表示“若左边之积分为有限，则右边之积分亦为有限，且…”。

若我们采用 § 9.3 中之方法，则 (a) 之证明与定理 319 中 (a) 之证明相同。因我们是就 $p < 1$ 运用 Hölder 不等式，故不等式反号。要从 (a) 导出 (b)，我们可求助于定理 234。我们让读者自己去拟出当 $p < 0$ 时的相应定理，并考虑等号何时出现的问题。

我们不能取 $K = 1/(x + y)$ ，因这样一来， $k = \infty$ 。因此就不存在与 Hilbert 定理完全类似的定理。

(2) 337. 若 $0 < p < 1$, $f(x) \geq 0$,

$$\int_0^\infty f^p dx < \infty,$$

又設

$$F(x) = \int_x^\infty f(t) dt,$$

則

$$\int_0^\infty \left(\frac{F}{x} \right)^p dx > \left(\frac{p}{1-p} \right)^p \int_0^\infty f^p dx,$$

除非 $f \equiv 0$ 。常数是可能最好者。

我們可以取

$$K(x, y) = 0 \ (x < y), \quad K(x, y) = \frac{1}{y} \ (x \geq y),$$

而从定理 336 以不完全的形式得出定理 337，此时

$$k = \int_1^\infty x^{-1/p} dx = \frac{p}{1-p}.$$

用这种方法去证明整个定理，须要牵涉到定理 336 中（因而定理

234 中) 不等式方向的討論。因此, 我們就采用一个类似于 § 9.8 中所用的直接方法。

我們可設

$$\int_0^{\infty} f(t) dt, \quad \int_0^{\infty} \left(\frac{F}{x}\right)^p dx$$

为有限, 盖若不然, 則定理无須証明。

我們有

$$\int_{\xi}^x \left(\frac{F}{t}\right)^p dt = \frac{1}{1-p} [x^{1-p} F^p(x)]_{\xi}^x + \frac{p}{1-p} \int_{\xi}^x \left(\frac{F}{t}\right)^{p-1} f dt, \quad (9.13.1)$$

因 F 随 x 之增大而下降, 故当 $x \rightarrow 0$ 和 $x \rightarrow \infty$ 时,

$$x^{1-p} F^p(x) = 2 \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p \frac{1}{2} x \leq 2 \int_{\frac{1}{2}x}^x \left(\frac{F}{t}\right)^p dt$$

皆趋于 0。于是, 由 (9.13.1) 取极限即得

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{F}{x}\right)^p dx = \frac{p}{p-1} \int_0^{\infty} \left(\frac{F}{x}\right)^{p-1} f dx.$$

我們让讀者自己去完成定理的証明。

关于与定理 330 相应的更为完善的結果, 可参考定理 347。

(3) 最后, 我們来証明一个定理, 它与定理 326 之間的关系大致与定理 337 之于定理 327 相似。这种对应不是十分确切的, 这一定理非常有益地闡明了在一个涉及到級数的定理中固有的一些連帶的小麻煩。

338¹⁾. 若 $0 < p < 1$, $\sum a_n^p < \infty$, 則

$$\sum \left(\frac{a_n + a_{n+1} + \cdots}{n} \right)^p > \left(\frac{p}{1-p} \right)^p \sum a_n^p,$$

除非 (a_n) 为 0。左边和号上的一撇表示 $n=1$ 的那一項要乘上

$$1 + \frac{1}{1-p}.$$

常数是可能最好者。

1) 这定理的要領是在 1927 年由 Elliott 告訴我們的。

在定理 337 中取

$$f(x) = 0 \quad (0 < x < 1), \quad f(x) = a_n \quad (0 < n \leq x < n+1).$$

于是, 若 $0 < n \leq x < n+1$, 则

$$\frac{F}{x} = \frac{(n+1-x)a_n + a_{n+1} + \cdots}{x} \leq \frac{a_n + a_{n+1} + \cdots}{n}.$$

因之, 有

$$\int_1^\infty \left(\frac{F}{x}\right)^p dx \leq \sum_1^\infty \left(\frac{a_n + a_{n+1} + \cdots}{n}\right)^p,$$

但

$$\int_0^1 \left(\frac{F}{x}\right)^p dx = (a_1 + a_2 + \cdots)^p \int_0^1 x^{-p} dx = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots)^p}{1-p};$$

由定理 337 即得我們所要的結果.

象定理的最后一段話所包含的那樣一类按語是必須的; 若將一撇省去, 結果就不一定成立¹⁾.

9.14. 具有两个参数 p 和 q 的一个定理. 我們現用一个定理来結束这一章, 这一定理虽然仍旧是 Hilbert 定理之一推广, 但却具有一些在本章前面的任何定理中所沒有出現过的特点. 它涉及到两个相互无关的指标 p 和 q 和一个未定的常数 $K(p, q)$.

339. 若

$$p > 1, \quad q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1,$$

因而

$$0 < \lambda = 2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} \leq 1,$$

則

$$\sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{a_m b_n}{(m+n)^\lambda} \leq K \left(\sum_1^\infty a_m^p \right)^{1/p} \left(\sum_1^\infty b_n^q \right)^{1/q},$$

其中 $K = K(p, q)$ 只与 p 和 q 有关.

1) 取 $a_1 = 1, a_2 = a_3 = \cdots = 0$, 則当 $p > \frac{1}{2}$ 时結果就不对. 关于这結果的另一形式, 可参考定理 345.

当 $q = p'$, $\lambda = 1$ 时, 这定理即化为定理 315: 在此种情形, 我們知道了 K 的可能最好值. 在一般情形, 最好的值还没有求出, 而如何决定它的问题看起来是一难题. 后面 (§ 10.17) 我們將証明一个較深的定理, 其中 $\lambda < 1$, $m + n$ 則代之以 $|m - n|$ (相等的值則从求和中弃掉).

我們只須証明, 若 $\sum a_m^p = A$, $\sum b_n^q = B$, 則

$$\sum_m a_m \sum_{n \leq m} \frac{b_n}{(m+n)^\lambda} \leq K A^{1/p} B^{1/q}, \quad (9.14.1)$$

要証明这一点, 由定理 13, 只須証明

$$\sum_m \beta_m^{p'} \leq K B^{p'/q}, \quad (9.14.2)$$

其中

$$\beta_m = \sum_{n \leq m} \frac{b_n}{(m+n)^\lambda}.$$

今

$$\beta_m \leq m^{-\lambda} \sum_{n \leq m} b_n = m^{-\lambda} B_m,$$

且 $p' \geq q$. 因之,

$$\sum \beta_m^{p'} \leq \sum m^{-p'\lambda} B_m^{p'} = \sum \left(\frac{B_m}{m} \right)^q B_m^{p'-q} m^{q-p'\lambda}.$$

但

$$B_m = \sum_1^m b_n \leq m^{1/q'} \left(\sum_1^m b_n^q \right)^{1/q} \leq B^{1/q} m^{1/q'},$$

且

$$\frac{p'-q}{q'} + q - p'\lambda = 0,$$

故由定理 326, 有

$$\sum \beta_m^{p'} \leq B^{(p'-q)/q} \sum \left(\frac{B_m}{m} \right)^q \leq \left(\frac{q}{q-1} \right)^q B^{(p'-q)/q+1} = K B^{p'/q}.$$

此即証明 (9.14.2).

同理可証

340. 在定理 339 的同样假定之下, 有

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{(x+y)^\lambda} dx dy \leq K \left(\int_0^\infty f^p dx \right)^{1/p} \left(\int_0^\infty g^q dy \right)^{1/q}.$$

各种定理和各种例

341. 若 (i) $a_m, b_n, f(x), g(y)$ 皆为非负; (ii) 求和是从 1 到 ∞ , 积分是从 0 到 ∞ ; (iii) $(\sum a_m^p)^{1/p} = A, (\sum b_n^{p'})^{1/p'} = B, \left(\int f^p dx\right)^{1/p} = F, \left(\int g^{p'} dy\right)^{1/p'} = G$; (iv) $p > 1$, 则

$$(1) \quad \sum \sum \frac{a_m b_n}{\max(m, n)} < pp' AB,$$

$$(2) \quad \iint \frac{f(x)g(y)}{\max(x, y)} dx dy < pp' FG,$$

除非 $(a_m), (b_n), f(x), g(y)$ 中有一为 0. 常数是可能最好者.

[这是定理 318 与 319, (a) 中的某些情形. 为了缩短下述定理的叙述, 我们规定: 条件 (i), (ii), (iii) 对于所有这些定理皆已预先假定; 又规定, 只要结论是用一个不等式

$$X < KY \quad (\text{或 } X > KY)$$

以一确定的常数 K 表出, 则 K 具有可能最好值 (除非已经明确表示出另外的情形), 而且等号是不成立的, 除非定理中所涉及的一个序列或函数为 0.

另一方面, 当结论是用

$$X \leq KY$$

以一个没有详细说明的常数 K 表出时, 则 K 是定理中诸参数之一函数.]

342. 若 $p > 1$, 则

$$(1) \quad \sum \sum \frac{\log(m/n)}{m-n} a_m b_n < \pi^2 \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{p} \cdot AB,$$

$$(2) \quad \iint \frac{\log(x/y)}{x-y} f(x)g(y) dx dy < \pi^2 \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{p} \cdot FG.$$

[这也是定理 318 和 319, (a) 的某种情形. 在这里,

$$k = \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x-1} x^{-1/p} dx = \pi^2 \operatorname{cosec} \frac{\pi}{p}.]$$

343. 若 $p > 1$, 則

$$\sum_2^{\infty} \sum_2^{\infty} \frac{a_m b_n}{mn \log mn} < \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \left(\sum_2^{\infty} \frac{a_m^p}{m} \right)^{1/p} \left(\sum_2^{\infty} \frac{b_n^{p'}}{n} \right)^{1/p'}.$$

[Mulholland[2], 因

$$\log \frac{m+1}{m} < \frac{1}{m},$$

故此結果比之在定理 321 中由取 $A_m = \log m$, $M_n = \log n$ 所得者要稍強一些.]

344. 若 $0 < p < 1$, 則

$$\sum (a_n + a_{n+1} + \cdots)^p > p^p \sum (na_n)^p.$$

[Copson[2], 这定理与定理 326, 331, 338 一起做成了一個有系統的定理組.]

345. 若 $0 < p < 1$, 則

$$\sum \left(\frac{a_n + a_{n+1} + \cdots}{n} \right)^p > p^p \sum a_n^p.$$

[这是定理 344 的系. 比較定理 338; 这里沒有按語, 但常数不够理想, 大概不是可能最好的.]

346. 若 (a) $c > 1$, $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 或 (b) $c < 1$, $s_n = a_n + a_{n+1} + \cdots$, 則

$$(\alpha) \quad \sum n^{-c} s_n^p \leq K \sum n^{-c} (na_n)^p \quad (p > 1),$$

$$(\beta) \quad \sum n^{-c} s_n^p \geq K \sum n^{-c} (na_n)^p \quad (0 < p < 1).$$

[在这四种情形中無論哪一種, $K = K(p, c)$, 有如在定理 341 的后面所規定者, 参考 Hardy 与 Littlewood[1].

我們現就 $c > 1$ 來証明 (α). 若

$$\phi_n = n^{-c} + (n+1)^{-c} + \cdots,$$

則 $\phi_n < Kn^{1-c}$. 于是, 若我們約定 $s_0 = 0$, 則有

$$\sum_1^m n^{-c} s_n^p = \sum_1^m (\phi_n - \phi_{n+1}) s_n^p \leq \sum_1^m \phi_n (s_n^p - s_{n-1}^p)$$

$$\leq K \sum_1^m n^{1-c} s_n^{p-1} a_n \leq K \left(\sum_1^m n^{-c} (n a_n)^p \right)^{1/p} \left(\sum_1^m n^{-c} s_n^p \right)^{1/p'};$$

由此即得 (α). Hardy 与 Littlewood^[2] 曾给出 (α) 和 (β) 在函数论方面的应用. 重要的是 $c = 2$ 的情形.]

347. 若 r 和 F 满足定理 330 的条件, 但 $0 < p < 1$, 则

$$\int x^{-r} F^p dx > \left(\frac{p}{|r-1|} \right)^p \int x^{-r} (xf)^p dx.$$

[Hardy[5].]

348. 若

$$\sigma(y) = \sum a_m e^{-m/y},$$

且 $p > 1$, 则

$$2^{-p} \sum \left\{ \frac{\sigma(n)}{n} \right\}^p < \int_0^\infty \left\{ \frac{\sigma(y)}{y} \right\}^p dy < \left\{ \Gamma \left(\frac{1}{p'} \right) \right\}^p A^p.$$

[取 $K(x, y) = y^{-1} e^{-x/y}$ 并运用定理 319, (b). Hardy 与 Littlewood^[1,2] 给出了一些较广泛但欠精密的结果, 他们还给出了一些在函数论方面的应用.]

349. 若 λ_n 和 A_n 满足定理 332 中的条件, 则

$$\sum \lambda_n (a_1^{\frac{1}{A_1}} a_2^{\frac{1}{A_2}} \cdots a_n^{\frac{1}{A_n}})^{1/A_n} < e \sum \lambda_n a_n.$$

[参考 Hardy[4].]

350. 若 $p > 1$, $K(x) > 0$, 且

$$\int K(x) x^{p-1} dx = \phi(s),$$

则

$$\iint K(xy) f(x) g(y) dx dy < \phi \left(\frac{1}{p} \right) \left(\int x^{p-2} f^p dx \right)^{1/p} \left(\int g^{p'} dy \right)^{1/p'},$$

$$\int dx \left(\int K(xy) f(y) dy \right)^p < \phi^p \left(\frac{1}{p} \right) \int x^{p-2} f^p dx,$$

$$\int x^{p-2} dx \left(\int K(xy) f(y) dy \right)^p < \phi^p \left(\frac{1}{p'} \right) \int f^p dx.$$

特别, 当 $K(x) = e^{-x}$, $F(x) = \int K(xy) f(y) dy$ 是 $f(x)$ 的 “Laplace

变换”时,

$$\int F^p dx < \Gamma^p \left(\frac{1}{p} \right) \int x^{p-2} f^p dx, \quad \int x^{p-2} F^p dx < \Gamma^p \left(\frac{1}{p'} \right) \int f^p dx.$$

351. 若 $K(x)$ 又是 x 的一单降函数, 且

$$A(x) = \sum a_n K(nx), \quad A_n = \int a(x) K(nx) dx,$$

则

$$\int A^p(x) dx < \phi^p \left(\frac{1}{p} \right) \sum n^{p-2} a_n^p,$$

$$\sum A_n^p < \phi^p \left(\frac{1}{p} \right) \int x^{p-2} a^p(x) dx,$$

$$\int x^{p-2} A^p(x) dx < \phi^p \left(\frac{1}{p'} \right) \sum a_n^p,$$

$$\sum n^{p-2} A_n^p < \phi^p \left(\frac{1}{p'} \right) \int a^p(x) dx.$$

352. 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的 Laplace 变换, 且 $1 < p \leq 2$, 则

$$\int F^{p'} dx \leq \frac{2\pi}{p'} \left(\int f^p dx \right)^{p'/p}.$$

[关于上之三定理, 可参考 Hardy[10]. 定理 350 可从定理 319 经变换而得出. 我们没有肯定认为定理 352 中的常数是可能最好者.]

353. 若

$$K_0(x) \geq 0,$$

$$K_1(x, y) = \int K_0(x, t) K_0(y, t) dt,$$

$$K_2(x, y) = \int K_1(x, t) K_1(y, t) dt,$$

$$\int \frac{K_1(x, 1)}{\sqrt{x}} dx = k,$$

则

$$\sum \sum K_2(m, n) a_m a_n \leq k \sum \sum K_1(m, n) a_m a_n.$$

[参考 Hardy[9]. 这定理是一个关于二次型而不是关于线性

型的定理.]

354.

$$\sum \sum \frac{\log(m/n)}{m-n} a_m a_n \leq \pi \sum \sum \frac{a_m a_n}{m+n}.$$

355.

$$\sum \sum \frac{|\log(m/n)|}{\max(m, n)} a_m a_n \leq 2 \sum \sum \frac{a_m a_n}{\max(m, n)}.$$

[这两个结果是定理 353 的系。試注意, 由定理 354, 当与定理 315 結合使用时, 即得

$$\sum \sum \frac{\log(m/n)}{m-n} a_m a_n \leq \pi \sum a_m^2.$$

这与定理 342 是一致的.]

356. 若

$$c(x) = \int_0^x a(t)b(x-t)dt,$$

$$A^p = \int x^{-1}(x^\alpha a(x))^p dx, \quad B^q = \int x^{-1}(x^\beta b(x))^q dx,$$

$$C^r = \int x^{-1}(x^\gamma c(x))^r dx,$$

$$p > 1, q > 1, \frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

$$\alpha < 1, \beta < 1, \gamma = \alpha + \beta - 1,$$

則

$$C < KAB,$$

其中

$$K = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\gamma)}.$$

357. 若

$$a_0 = b_0 = 0, c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0,$$

$$A^p = \sum n^{-1}(n^\alpha a_n)^p, \quad B^q = \sum n^{-1}(n^\beta b_n)^q, \quad C^r = \sum n^{-1}(n^\gamma c_n)^r,$$

p, q, r, γ 滿足定理 356 中之条件, 且 $0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < 1$, 則 $C < KAB$, 其中 K 与定理 356 之 K 同. 若 $\alpha < 0, \beta < 0$, 此不等

式对某些 K 成立.

358. 若

$$a_0 = b_0 = \cdots = c_0 = 0,$$

$$u_n = \sum a_{r_1} b_{r_2} \cdots c_{r_k} \quad (r_i \geq 0, \sum r_i = n),$$

則

$$\sum u_n^2 < \frac{1}{\pi} \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{2k}\right) \right\}^{2k} (\sum n^{2k-2} a_n^{2k})^{1/k} \cdots (\sum n^{2k-2} c_n^{2k})^{1/k}.$$

359. 若 $p > 1, l > 0, m > 0, c(x)$ 如定理 356 中所定义,

則

$$\int x^{(1-l-m)(p-1)} c^p(x) dx \leq K \int x^{(1-l)(p-1)} a^p(x) dx \int x^{(1-m)(p-1)} b^p(x) dx,$$

其中

$$K = \left\{ \frac{\Gamma(l)\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)} \right\}^{p-1}.$$

等号成立之充要条件是

$$a(x) \equiv Ax^{l-1}e^{-Cx}, \quad b(x) \equiv Bx^{m-1}e^{-Cx},$$

其中 A, B, C 是非負常数, C 为正.

[关于定理 356—359 可参考 Hardy 和 Littlewood[3, 5, 12].]

360. 若 $L(x)$ 是 $f(x)$ 的 Laplace 变换, $q \geq p > 1$, 則

$$\int x^{-(p+q-pq)/p} L^q(x) dx \leq KF^q.$$

361. 若 $p > 1, q > 1$,

$$\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0,$$

L, M 是 f, g 的 Laplace 变换, 則

$$\int x^{-\mu} LM dx \leq KFG.$$

362. 若 $p > 1, 0 \leq \mu < \frac{1}{p}$, 又

$$\alpha_n = \sum_m \frac{a_m}{(m+n)^{1-\mu}},$$

則

$$\sum \alpha_n^{p/(1-\mu p)} \leq KA^{p/(1-\mu p)}.$$

[这可从定理 339 利用 Hölder 不等式之逆而得出, Hardy 和 Littlewood^[1] 曾给出了許多另外的与定理 360—362 具有同样一般性质的定理.]

363. 若 λ_n 为正, 且

$$p > 1, A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \leq cn,$$

則

$$\sum \left(\frac{A_n}{n} \right)^p \lambda_n \leq K A^p.$$

364. 若 λ_n 为正, 且

$$p > 1, r > 1, \lambda_1^r + \lambda_2^r + \cdots + \lambda_n^r \leq cn,$$

則

$$\sum \sum \frac{a_m b_n}{m+n} \lambda_{m+n} \leq K A B.$$

当 $r = 1$ 时这結果不一定成立(但当 $\lambda_n = 1$ 时照旧).

[这两个定理是定理 326 和 315 的相应推广, 可参考 Hardy 和 Littlewood[11].]

365. 定理 326 和 334 中的不等式乃是

$$(i) \quad \sum \phi^{-1} \left(\frac{\phi(a_1) + \cdots + \phi(a_n)}{n} \right) < K(\phi) \sum a_n$$

当 $\phi = x^t (0 < t < 1)$ 和 $\phi = \log x$ 时的特殊情形.

[Knopp[2]. 这一注释曾使 Knopp 对使得 (i) 成立的 ϕ 的形式作系統的研究. 也参考 Mulholland[4].]

366. 設 ϕ 和 ϕ 当 $x > 0$ 时为連續且严格单增, 且当 $x \rightarrow 0$ 时具有极限 0 或 $-\infty$; 又設 ϕ 关于 ϕ 为凸的 (§ 3.9). 則 (i) 若对 ϕ 成立, 則对 ϕ 亦成立, 且有 $K(\phi) \leq K(\phi)$.

[Knopp[2].]

367.

$$\sum \left(\log \frac{e^{1/a_1} + e^{1/a_2} + \cdots + e^{1/a_n}}{n} \right)^{-1} < 2 \sum a_n.$$

[Knopp[2].]

第十章 重新排列

10.1. 有限变数組的重新排列. 下面我們要來討論由非負數組成的有限集, 例如

$$a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_j, \dots, b_n;$$

$$a_{-n}, \dots, a_0, \dots, a_j, \dots, a_n;$$

等, 我們把諸如此類的集記作 $(a), (b), \dots$.

我們現在取出 (例如說) 第一個集, 其中 j 取值 $1, 2, \dots, n$, 而來定義一個排列函數 $\phi(j)$, 這是如此的一個函數, 它當 j 跑過 $1, 2, \dots, n$ 時, 取 $1, 2, \dots, n$ 中的每一數恰好一次. 若

$$a_{\phi(j)} = a'_j \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

我們就說 (a') 是 (a) 的一個重新排列. 同樣的定義也適用於 j 之變程不同的其它情形.

集 (a) 的重新排列中有一些特殊的重新排列在這裡特別重要. 這些重新排列, 我們以

$$(\bar{a}), (a^+), ({}^+a), (a^*)$$

記之, 定義如下.

集 $(\bar{a})$ 乃是集 (a) 按升階重新排列所得之集, 因之, 當 j 之值為 $1, 2, \dots, n$ 時,

$$\bar{a}_1 \leq \bar{a}_2 \leq \dots \leq \bar{a}_n.$$

集 $(\bar{a})$ 是由集 (a) 明確地定義的, 雖然當諸 a 不是各各不同時, 在我們用來從 (a) 過渡到 $(\bar{a})$ 的排列函數的定義中存在着含糊不清之處.

在定義集 $(a^+), ({}^+a), (a^*)$ 時, 我們假定 j 從 $-n$ 變到 n . 集 (a^+) 定義作

$$a_0^+ \geq a_1^+ \geq a_{-1}^+ \geq a_2^+ \geq a_{-2}^+ \geq \dots,$$

集 $({}^+a)$ 則是

$$+a_0 \geq +a_{-1} \geq +a_1 \geq +a_{-2} \geq +a_2 \geq \dots,$$

有一个特别重要的情形,其中每一 a 的值,除最大者之外,皆出现偶数次,而最大的值则出现奇数次.在此种情形,我们就说集 (a) 是对称的.此时集 (a^+) 和 $(+a)$ 完全相同,于是我们就写

$$a^+ = +a = a^*,$$

因而 a^* 定义作

$$a_0^* \geq a_1^* = a_{-1}^* \geq a_2^* = a_{-2}^* \geq \dots.$$

集 (a^*) 可以说成是对称下降. 集 (a^+) 和 $(+a)$ 则是安排得尽可能接近于对称下降的集,但有一边却不可避免的要占优势,而我们则是有系统的安排得分别有利于右边或左边.所有这些集都是由 (a) 明确地定义的,虽然在相应的排列函数的定义之中可能会有含糊不清之处.

我們要注意

$$a_j^+ = +a_{-j}. \quad (10.1.1)$$

10.2. 有关两个集的重新排列的一个定理. 我們先来证明一个有关集 $(\bar{a})$ 的非常简单但却很重要的定理.

368¹⁾. 若 (a) 与 (b) 除排列之外皆已给定,则

$$\sum ab$$

当 (a) 和 (b) 依同一方向为单调时(即同为单增或同为单减时)为最大,依相反方向为单调时为最小;就是说,我們有

$$\sum_{j=1}^n \bar{a}_j \bar{b}_{n+1-j} \leq \sum_{j=1}^n a_j b_j \leq \sum_{j=1}^n \bar{a}_j \bar{b}_j. \quad (10.2.1)$$

我們可注意,因和数 $\sum ab$ 可按任意次序相加,故可假定有一个集,例如 (a) ,从开始就按照我們所意愿的任何次序(特别是按照上升次序)排列.

我們也可以把这定理同样完善的表示成为:极大值对应于就 § 2.17 中的意义而言的 (a) 和 (b) 的“排法相似”,极小值则对应

1) 这定理以及定理 369 对于所有实的但不一定是正的 a 和 b 皆成立.

于“排法相反”¹⁾。若我們將 a 解釋為從一條棍的一端到它上面安有掛鈎之點的距離，把 b 解釋成懸在掛鈎上的重量，則此定理即變為“直觀可見”的了。要想獲致關於棍的一端的最大靜力矩，我們就把最重的物體掛在離該端點最遠的掛鈎上。

要證明這定理，我們假定 (a) 是按升階排列，但 (b) 則不然。於是，存在一 j 和一 k ，使得 $a_j \leq a_k, b_j > b_k$ 。因

$$a_j b_k + a_k b_j - (a_j b_j + a_k b_k) = (a_k - a_j)(b_j - b_k) \geq 0,$$

故將 b_j 與 b_k 相交換時，不會使 $\sum ab$ 減少。通過有限次這種交換，即可把諸 b 按上升的次序排列，故

$$\sum ab \leq \sum \bar{a} \bar{b}.$$

定理的另一半可用同法證明。

由這一証法順便還可得出定理 368 的一個變形，它有時頗為有用。

369. 若對於 (b) 的任何重新排列 (b') 皆有

$$\sum ab' \leq \sum ab, \quad (10.2.2)$$

則 (a) 與 (b) 排法相同。

蓋若對某一對 j, k ，有 $(a_j - a_k)(b_j - b_k) < 0$ ，則將 b_j 與 b_k 交換，我們即可使 (10.2.2) 不成立。

10.3. 定理 368 的第二個證明。 我們要來考慮定理 368 關於兩個以上的變數組的類似情形。這些情形要深奧得多，不可能用這種簡單方法來證明。因此，我們就給出定理 368 的第二個證明，這證明雖然對於它的直接目的來講存在毫無必要的麻煩，但卻適宜於用來介紹我們後面所要用到的方法。我們只限於 (10.2.1) 中之第二不等式，并把證明分做三步。

(1) 先設我們所考慮的集全由 0 和 1 做成；我們用德文字母 $a, b, \dots$ 表示這種特殊的集(的元素)。於是，對於所有的 j ，

$$a^2 = a, \quad b^2 = b. \quad (10.3.1)$$

在此種情形，

1) 就現在的記號，定理 43 (其中 $r = 1, p = 1$) 可以表示成

$$n \sum \bar{a}_i \bar{b}_{n+1-i} \leq \sum a_i \sum b_i \leq n \sum \bar{a}_i \bar{b}_i.$$

$$\sum ab \leq \sum a, \quad \sum ab \leq \sum b,$$

因而有

$$\sum ab \leq \min(\sum a, \sum b) = \sum \bar{a}\bar{b}.$$

(2) 任何集 (a) 皆可分解成 (1) 中所討論的那種特殊類型的集

$$(\alpha^1), (\alpha^2), \dots, (\alpha^l)^{1)}$$

的綫性組合, 使得

$$a_j = \alpha^1 \bar{a}_j^1 + \alpha^2 \bar{a}_j^2 + \dots + \alpha^l \bar{a}_j^l (j = 1, 2, \dots, n), \quad (10.3.2)$$

和

$$\bar{a}_j = \alpha^1 \bar{a}_j^1 + \alpha^2 \bar{a}_j^2 + \dots + \alpha^l \bar{a}_j^l (j = 1, 2, \dots, n), \quad (10.3.3)$$

其中係數 α 為非負。

分解的方法可就一個特殊情形來加以討論就可看得很清楚。設 (a) (依某種次序) 一共包含三個數 A, B, C , 其中 $0 \leq A \leq B \leq C$, 因而

$$\bar{a}_1 = A, \bar{a}_2 = B, \bar{a}_3 = C.$$

於是

$$\bar{a}_1 = A \cdot 1 + (B - A)0 + (C - B)0,$$

$$\bar{a}_2 = A \cdot 1 + (B - A)1 + (C - B)0,$$

$$\bar{a}_3 = A \cdot 1 + (B - A)1 + (C - B)1;$$

從而我們可寫

$$\bar{a}_j = \alpha^1 \bar{a}_j^1 + \alpha^2 \bar{a}_j^2 + \alpha^3 \bar{a}_j^3,$$

其中

$$\alpha^1 = A, \alpha^2 = B - A, \alpha^3 = C - B,$$

$(\bar{a}^1), (\bar{a}^2), (\bar{a}^3)$ 則是三個集:

$$(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1).$$

若此時我們施行將 $(\bar{a})$ 變為 (a) 且同時將 $(\bar{a}^1), \dots$ 變為 $(\alpha^1), \dots$ 之排列²⁾, 則得

$$a_j = \alpha^1 \bar{a}_j^1 + \alpha^2 \bar{a}_j^2 + \alpha^3 \bar{a}_j^3.$$

1) α^i 即是 $\alpha^{(i)}$, α^i 即是 $\alpha^{(i)}$; 在 (10.3.1) 中, α^2 表一乘幂, 但這一用法不再出現。

2) α^1 即由此排列定義。

在一般情形,我們也依样进行,即写

$$\begin{aligned}\bar{a}_1 &= \bar{a}_1 \cdot 1 + (\bar{a}_2 - \bar{a}_1) \cdot 0 + (\bar{a}_3 - \bar{a}_2) \cdot 0 + \cdots, \\ \bar{a}_2 &= \bar{a}_1 \cdot 1 + (\bar{a}_2 - \bar{a}_1) \cdot 1 + (\bar{a}_3 - \bar{a}_2) \cdot 0 + \cdots, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

这保证了(10.3.3),而(10.3.2)則如同在上之特殊情形中一样經重新排列后即可得出.

(3) 由(1)及(2)我們可推出一般性定理. 盖將(b)依(2)中方法分解,則得

$$\begin{aligned}a_i &= \sum_{\rho} \alpha^{\rho} a_i^{\rho}, \quad \bar{a}_i = \sum_{\rho} \alpha^{\rho} \bar{a}_i^{\rho}, \quad b_i = \sum_{\sigma} \beta^{\sigma} b_i^{\sigma}, \quad \bar{b}_i = \sum_{\sigma} \beta^{\sigma} \bar{b}_i^{\sigma}, \\ \sum_i a_i b_i &= \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \alpha^{\rho} \beta^{\sigma} \sum_i a_i^{\rho} b_i^{\sigma} \\ &\leq \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \alpha^{\rho} \beta^{\sigma} \sum_i \bar{a}_i^{\rho} \bar{b}_i^{\sigma} = \sum_i \bar{a}_i \bar{b}_i.\end{aligned}$$

10.4. 定理 368 的改写. 將定理 368 以另外的語言重新表达出来,对以后頗为有用. 我們現假定,在集(a),(b)中, j 是从 $-n$ 跑到 n . 令

$$f(x) = \sum a_j x^j, \quad g(x) = \sum b_j x^j,$$

并称

$$a_0 = \mathfrak{E}(f(x))$$

为 f 的中心系数. 显而易見,

$$\mathfrak{E}(f(x^{-1})) = \mathfrak{E}(f(x)).$$

又

$$\sum_{r+s=0} a_r b_s = \sum a_j b_{-j} = \mathfrak{E}(fg).$$

集 (a_j^+) 和 $(+b_{-j})$ 的排法相同,且若令

$$f^+(x) = \sum a_j^+ x^j, \quad {}^+f(x) = \sum {}^+a_j x^j,$$

因而由(10.1.1),有

$$f^+(x^{-1}) = {}^+f(x),$$

則由定理 368 即得

$$\mathfrak{E}(fg) = \sum_{r+s=0} a_r b_s = \sum a_j b_{-j} \leq \sum a_j^+ {}^+b_{-j}$$

$$= \sum_{r+s=0} a_r^{++} b_s = \mathfrak{G}(f^{++}g).$$

由此即得

370.

$$\sum_{-n}^n a_i x^i \sum_{-n}^n b_i x^i$$

之中心系数当 (a_i) 和 (b_{-i}) 排法相同时为最大, 特别是当 (a) 即 (a^+) 和 (b) 即 (^+b) 时, 或当 (a) 即 (^+a) 和 (b) 即 (b^+) 时为最大.

10.5. 有关三个集的重新排列定理. 我們現來討論涉及三組變數的定理.

371¹⁾. 設諸 c, x, y 皆為非負, 且諸 c 為對稱單降, 因而

$$c_0 \geq c_1 = c_{-1} \geq c_2 = c_{-2} \geq \cdots \geq c_{2k} = c_{-2k},$$

而諸 x 與 y 除排法之外已經給定. 則雙綫性形式

$$S = \sum_{r=-k}^k \sum_{s=-k}^k c_{r-s} x_r y_s$$

當 (x) 為 (x^+) 和 (y) 為 (y^+) 時取其极大值.

顯而易見, 若此結果成立, 則此极大值也必然在 (x) 為 (^+x) 和 (y) 為 (^+y) 時取到.

372²⁾. 設 $(a), (b), (c)$ 是滿足關係

$$a_0 \geq a_r = a_{-r}, \quad b_0 \geq b_s = b_{-s}, \quad c_0 \geq c_t = c_{-t} \quad (10.5.1)$$

的三個集, 則對於使得 a_0, b_0, c_0 不動之重新排列,

$$\sum_{r+s+t=0} a_r b_s c_t = \mathfrak{G}(\sum a_r x^r \sum b_s x^s \sum c_t x^t)$$

當 $(a), (b), (c)$ 為 $(a^*), (b^*), (c^*)$ 時取其极大值.

373³⁾. 若 $(a), (b), (c)$ 是三個集, 其中 (c) 依 § 10.1 的意義為對稱, 則

$$\sum_{r+s+t=0} a_r b_s c_t \leq \sum_{r+s+t=0} a_r^{++} b_s c_t^* = \sum_{r+s+t=0} {}^+a_r b_s^+ c_t^*.$$

1) Hardy, Littlewood 和 Pólya[1];

2) Hardy 與 Littlewood [4], Gabriel[1].

3) Gabriel[3].

我們只須証明定理 373 即可，因为它包含了其它两个定理。首先，定理 373 乃是免除了限制 (10.5.1) 的定理 372，对于 (a) 和 (b) 来說是完全免除了，对于 (c) 則是部分免除了。要从定理 373 导出定理 371，我們令 $2k = n$ ， $x_r = a_{-r}$ ， $y_r = b_r$ ，并假定在变程 $(-k, k)$ 之外的 a 和 b 皆为 0。最后，我們可以看出，定理 370 乃是在定理 373 中取 $c_0 = 1$ ，取其余之 c 为 0 这一簡單情形。

10.6. 将定理 373 化为一特殊情形。 正象 § 10.3 中那样，我們把定理 373 的証明分为三步。証明全部困难是在 (1) 这一步，此时 (a), (b), (c) 乃是 (a), (b), (c) 型之集。于是我們暂时先把这一步視為当然成立，而来处理較容易的 (2) 和 (3) 这两步。

首先，我們可以将 (a), (b), (c) 分解成集 (a^p) , (b^s) , (c^r) 之和，使得

$$a_i = \sum_p \alpha^p a_i^p, b_i = \sum_s \beta^s b_i^s, c_i = \sum_r \gamma^r c_i^r,$$

及

$$a_i^+ = \sum_p \alpha^p a_i^p, {}^+b_i = \sum_s \beta^s b_i^s, c_i^* = \sum_r \gamma^r c_i^r,$$

这里的 a, b, c 全都是 0 或 1，諸 α, β, γ 皆为非負，而且 (这是 § 10.3 沒有发生的一点) 集 (c^r) 是对称的。所有这些皆可用 § 10.3 (2) 中之方法来証明¹⁾。当我們把这些都完成了，并且已經对 (a), (b), (c) 型的集証明了定理，我們就有

$$\begin{aligned} \sum_{r+s+t=0} a_r b_s c_t &= \sum_{p,s,r} \alpha^p \beta^s \gamma^r \sum_{r+s+t=0} a_r^p b_s^s c_t^r \\ &\leq \sum_{p,s,r} \alpha^p \beta^s \gamma^r \sum_{r+s+t=0} a_r^{p+} b_s^s c_t^{r*} = \sum_{r+s+t=0} a_r^{++} b_s c_t^*. \end{aligned}$$

于是証明即告完成。

留下来的就是要对所有的 a, b, c 皆为 0 或 1 这一特殊情形来証明定理²⁾。集 c 既为对称，就包含偶数个 0 和奇数个 1。我們

1) 欲使利用 § 10.3(2) 中的方法所得到的集 (c^r) 依 § 10.1 之意义为对称，我們可将与等于 0 的 γ^r 相对应的那种 c^r 略去。

2) 因此，严格說来，我們应当将 a, b, c 写作 a, b, c 。但已无此需要。

令

$$f(x) = \sum a_r x^r, g(x) = \sum b_s x^s, h(x) = \sum c_t x^t.$$

因我們可以把任意多个 0 加到这些集中去, 故可假定所有之求和皆是从 $-n$ 到 n .

又, 我們有

$$f^+(x) = \sum a_r^+ x^r = x^{-R} + \cdots + 1 + \cdots + x^{R'},$$

$${}^+g(x) = \sum {}^+b_s x^s = x^{-S'} + \cdots + 1 + \cdots + x^S,$$

$$h^*(x) = \sum c_t^* x^t = x^{-T} + \cdots + 1 + \cdots + x^T,$$

其中 R, R', S, S', T 皆是非負整数, 而且

$$R \leq R' \leq R + 1, \quad S \leq S' \leq S + 1. \quad (10.6.1)$$

我們要求証明

$$\mathfrak{C}(fgh) \leq \mathfrak{C}(f^+ {}^+g h^*). \quad (10.6.2)$$

不等式(10.6.2)可以借助一个几何表示变得很“直观”. 設 x, y 是平面上的直角坐标, 并将 f, g, h 的各个非零系数用一直綫表出, 对于 $a_r = 1$ 用 $x = r$, 对于 $b_s = 1$ 用 $y = s$, 对于 $c_t = 1$ 用 $x + y = -t$. 若 a, b, c 对 $\mathfrak{C}(fgh)$ 提供一个单位, 則此三条直綫相交. 函数 f, g, h 中的每一个皆是用一族平行綫表出, 而 $\mathfrak{C}(fgh)$ 則是这些直綫三綫共点的交点的总数. 我們將 $f^+, {}^+g, h^*$ 也用同法表出;

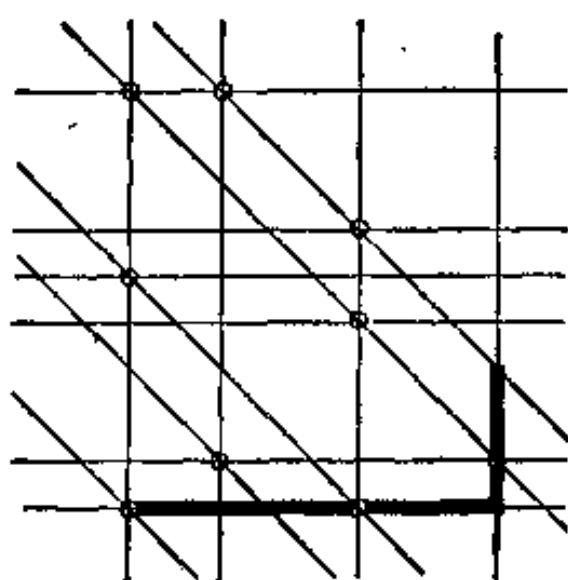


图 1. f, g, h 的图象

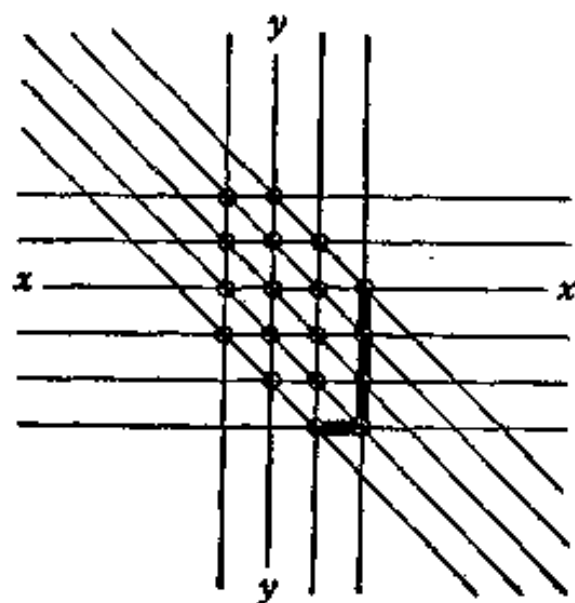


图 2. $f^+, {}^+g, h^*$ 的图象

f^+ 也是由 $R + 1 + R'$ 条直綫表出, 然而現在移动这些直綫使其

尽可能靠近在一起。图 1 和图 2 中所示就是典型的图形：这里的 (a), (b), (c) 分别是集

$$\begin{aligned} &1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1; \\ &1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1; \\ &1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0; \end{aligned}$$

而

$$R = 1, R' = 2, S = 2, S' = 3, T = 2.$$

从直观上可以看到，交点的数目，有如图 2 中所示，当图象是尽可能聚集时为最大。

(10.6.2) 的证明可以用几何形式表出¹⁾，并依据图形来做。我们可以从各个图形中取去一条横线和一条直线，如象在图中用粗线所示的那样，而把现在所考虑的情形化为一个较为简单的情形。但我们宁可把这证明用纯分析的形式表出。

10.7. 证明的完成。 有三种附属的情形，其证明是较为容易的。

(1) 若 $R' = 0$ ，则 f^+ 化为 1，所要的结果已包含在定理 370 之中；

(2) 若 $S' = 0$ ，则 ${}^+g$ 化为 1，所要的结果仍包含在定理 370 之中；

(3) 设

$$R + S' \leq T, \quad R' + S \leq T. \quad (10.7.1)$$

不管在那种情形，我们皆有

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(fgh) &= \sum_{r+s+t=0} a_r b_s c_t \leq \sum a_r \sum b_s \\ &= (R + 1 + R')(S + 1 + S'), \end{aligned} \quad (10.7.2)$$

但当不等式(10.7.1)成立时，

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(f^{++}gh^*) &= \mathfrak{E}\{(x^{-(R+S')} + \dots + x^{R'+S}) \\ &\quad \times (x^{-T} + \dots + 1 + \dots + x^T)\} \end{aligned}$$

乃是 $f^{++}g$ 的所有系数之和，因而有

1) 参考 Gabriel[3].

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}(f^{++}gh^*) &= \sum_{r,s} a_r b_s = \sum_r a_r \sum_s b_s \\ &= (R+1+R')(S+1+S'),\end{aligned}\quad (10.7.3)$$

所要的結果从(10.7.2)和(10.7.3)即可得出。

我們現來考慮一般情形,其中

$$R' > 0, S' > 0, \max(R+S', R'+S) = n > T.$$

我們假定所要的結果已对

$$\max(R+S', R'+S) < n$$

証明, 而运用歸納法。

設 x^p 是 f 的最高方次, x^q 是 g 的最低方次, 并令

$$f - x^p = \phi, g - x^q = \psi, f^+ - x^{R'} = \bar{\phi}, {}^+g - x^{-S'} = \bar{\psi}.$$

因 $R' > 0, S' > 0$, 故这些函数中沒有一个恆为 0. 于是

$$fgh = (\phi + x^p)(x^q + \psi)h = \phi\psi h + \chi h,$$

其中

$$\chi = x^q\phi + x^{p+q} + x^p\psi.$$

因 $x^q\phi$ 中之最高方次低于 x^{p+q} , $x^p\psi$ 中之最低方次高于 x^{p+q} , 故无互相遮盖的情形发生, 因而 χ 中所有之系数皆为 0 或 1. 因 h 的系数之和为 $2T+1$, 故得

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}(\chi h) &\leq 2T+1, \\ \mathfrak{E}(fgh) &\leq \mathfrak{E}(\phi\psi h) + 2T+1.\end{aligned}\quad (10.7.4)$$

另一方面, 我們有

$$f^{++}gh^* = (\bar{\phi} + x^{R'})(x^{-S'} + \bar{\psi})h^* = \bar{\phi}\bar{\psi}h^* + \bar{\chi}h^*, \quad (10.7.5)$$

其中

$$\begin{aligned}\bar{\chi} &= x^{-S'}\bar{\phi} + x^{R'-S'} + x^{R'}\bar{\psi} = x^{-R-S'} + \dots + x^{R'-S'-1} \\ &\quad + x^{R'-S'} + x^{R'-S'+1} + \dots + x^{R'+S}.\end{aligned}$$

$\bar{\chi}$ 中的指数所成的序列是一个从 $-R-S'$ 延伸到 $R'+S$ 的連續不断的序列. 我們知道, $R+S'$ 与 $R'+S$ 中总有一个大于 T . 若 $R+S' > T$, 則由(10.6.1), 有

$$R'+S \geq R+S'-1 \geq T,$$

因而从 $-T$ 到 T 的长为 $2T+1$ 的連續不断的序列是 $\bar{\chi}$ 的指数序

列的一部分。当 $R' + S > T$ 时同样的結論也成立。因 h^* 包含所有从 $-T$ 到 T 的方次, 故得

$$\mathfrak{E}(\bar{\chi}h^*) = 2T + 1,$$

于是, 由(10.7.5), 有

$$\mathfrak{E}(f^{++}gh^*) = \mathfrak{E}(\bar{\phi}\bar{\psi}h^*) + 2T + 1. \quad (10.7.6)$$

但

$$\phi^+(x) = x^{-(R'-1)} + \dots + x^R = \bar{\phi}(x^{-1})^1),$$

$${}^+\psi(x) = x^{-S} + \dots + x^{S'-1} = \bar{\psi}(x^{-1}).$$

又

$$\begin{aligned} & \max(R' - 1 + S, R + S' - 1) \\ &= \max(R' + S, R + S') - 1 = n - 1, \end{aligned}$$

于是, 根据我們的假設,

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(\phi\psi h) &\leq \mathfrak{E}(\phi^{++}\phi h^*) = \mathfrak{E}\{\bar{\phi}(x^{-1})\bar{\psi}(x^{-1})h^*(x)\} \\ &= \mathfrak{E}\{\bar{\psi}(x)\bar{\phi}(x)h^*(x^{-1})\} = \mathfrak{E}(\bar{\phi}\bar{\psi}h^*). \end{aligned} \quad (10.7.7)$$

最后, 比較(10.7.4), (10.7.6), (10.7.7), 則可看出

$$\mathfrak{E}(fgh) \leq \mathfrak{E}(f^{++}gh^*),$$

于是我們的証明即告完成。

10.8. 定理 371 的另一証明. 定理 371 还有另外一个証明。这証明虽然不可能推广用来証明更为普遍的定理 373, 但它本身却是值得注意的。

我們要来証明, 在使 S 取极大值的諸 x 与 y 的重新排列中, 存在一个重新排列, 使得当

$$|r'| > |r|, \quad |s'| > |s|$$

或当

$$r' = -r < 0, \quad s' = -s < 0$$

时, 有

$$x_r - x_{r'} \geq 0, \quad y_s - y_{s'} \geq 0. \quad (10.8.1)$$

1) 不一定常有

$$\phi^+(x) = \bar{\phi}(x) = x^{-R} + \dots + x^{R'-1},$$

盖若 $R' = R$, 則此多項式就属偏錯。当 $R' = R + 1$, 无論哪个公式皆成立。

根据連續性，我們可假定：諸 x, y, c 全为正，諸 x 与諸 y 全不相同，諸 c 除非是在对称条件，即 $c_{-n} = c_n$ 所限制的范围之内，亦假定互不相同。

諸 x 与 y 的一个排列我們通用 A 来表示，若 A 滿足(10.8.1)，我們就說它是“正确的”；恰有一个正确的排列 C 。若 A 除了当 $r' = -r$ 或 $s' = -s$ 时可能有問題之外，滿足(10.8.1)，則称 A 为“殆正确的”；連 C 在內一共有 2^k 个殆正确的排列，我們把此种排列所成之类記作 C' 。最后，我們用 K 表示使得 S 取极大值的那种 A 所成之类。我們来証明 C 属于 K 。

給定 p ，我們就可把諸 x 和 y 配成对

$$(x_{p-i}, x_{p+i}), (y_{p-i}, y_{p+i}) \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots), \quad (10.8.2)$$

或配成对

$$(x_{p-i}, x_{p+i+1}), (y_{p-i}, y_{p+i+1}) \quad (i, j = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (10.8.3)$$

若有一附标处于区間 $(-k, k)$ 之外，則相应的 x 或 y 就用 0 来代替。在前一种情形，元素 x_p 和 y_p 留下来沒有配对，同时，通过适当的选取 p, i, j ，可以使得任何两个其附标之差为偶正数之元素皆被配成了对。在第二种情形，留下来沒有配对的元素是沒有的，而且我們可以使得任何两个其附标之差为奇数的元素皆被配成了对。两种配对方法我們都采用，不管采用的是哪一个，我們的論証基本上差不多。

現来考虑(比如說)(10.8.2)的配对，为了确定我們的想法，我們假定 $p \geq 0$ ，因而有

$$|p-i| \leq |p+i|, \quad |p-i| \leq |p+j|.$$

我們用 I, J 来記使得

$$x_{p-I} < x_{p+I}, \quad y_{p-J} < y_{p+J}$$

的 i 和 j ，因而与 I 和 J 相对应的对不滿足(10.8.1)。这种对称为“錯誤的”的，其余为“不錯的”对。若 $p+i$ 在 $(-k, k)$ 之外，而 $p-i$ 在 $(-k, k)$ 之内，則將 x_{p+i} 代之以 0，于是相应的对必为不錯的对。因之，除了当 $p = 0$ 时也許有問題之外，必存在不是 I 的 i 和不是 J 的 j 。

假若对于一給定的 p 和一給定的配对方法¹⁾, 不存在錯誤的对, 我們就說 A “关于 p 是不錯的”, 否則即称之为 “关于 p 是錯誤的”. 显而易見, C 关于任何 p 都是不錯的, 而且任一 C' , 除了对 $p = 0$ 或許有問題之外, 对于所有之 p 和配对方法(10.8.2)皆是不錯的. 此外, 任一异于 C 之 A 必关于某一 p 的配对方法是錯誤的, 任一不属于 C' 的 A 或关于一异于 0 之 p , 或关于 $p = 0$ 和配对方法(10.8.3)是錯誤的.

我們現来(仍旧考察第一个配对方法, 并假定 $p \geq 0$) 討論置換

$$Q_p(x_{p-I}, x_{p+I}; y_{p-J}, y_{p+J})$$

在 S 上的影响, 这置換将每一对 x_{p-I}, x_{p+I} 和每一对 y_{p-J}, y_{p+J} 各自互相交換.

我們將 S 分成如下定义的九个部分和:

$$S_1: r = p; s = p;$$

$$S_2: r = p; s = p - j, p + j (j \neq J);$$

$$S_3: r = p - i, p + i (i \neq I); s = p;$$

$$S_4: r = p; s = p - J, p + J;$$

$$S_5: r = p - I, p + I; s = p;$$

$$S_6: r = p - i, p + i (i \neq I); s = p - j, p + j (j \neq J);$$

$$S_7: r = p - i, p + i (i \neq I); s = p - J, p + J;$$

$$S_8: r = p - I, p + I; s = p - j, p + j (j \neq J);$$

$$S_9: r = p - I, p + I; s = p - J, p + J.$$

首先, 我們显然可以看出, S_1, S_2, S_3, S_6 不因 Q_p 而受影响. 其次, 因 $c_{-J} = c_J$, 故

$$S_4 = x_p \sum_J (c_{JY_{p-J}} + c_{-JY_{p+J}})$$

不受影响. 同理, S_5 和

$$S_9 = \sum_{I, J} (c_{-I+Jx_{p-I}y_{p-J}} + c_{-I-Jx_{p-I}y_{p+J}} \\ + c_{I+Jx_{p+I}y_{p-J}} + c_{I-Jx_{p+I}y_{p+J}})$$

1) 指(10.8.2)或(10.8.3). 下面所說的“关于 p 是不錯的(或錯誤的)”总是指“关于 p 和討論中的配对方法是不錯的(或錯誤的)”.

也不受影响。只留待考虑 S_7 和 S_8 。

数对 x_{p-i} 和 x_{p+i} 对 S_7 所作的贡献是

$$x_{p-i} \sum_j (c_{-i+j} y_{p-j} + c_{-i-j} y_{p+j}) \\ + x_{p+i} \sum_j (c_{i+j} y_{p-j} + c_{i-j} y_{p+j}),$$

經 Ω_p 而产生的增量是

$$-(x_{p-i} - x_{p+i}) \sum_j (c_{i-j} - c_{i+j})(y_{p-j} - y_{p+j}).$$

S_7 中总的改变是这种增量就 $i \neq I$ 所取之和，若存在 J 和 $i \neq I$ 时，它即为正，因我們所写下的三个差数分别为正、正、負，因之，若存在 J 和 $i \neq I$ 时， S_7 即增大；同理，若存在 I 和 $j \neq J$ 时， S_8 即增大。最后，若这些条件中有一个成立，則 S 即增大。

若 $p \neq 0$ ，則存在 $i \neq I$ 和 $j \neq J$ ；于是，除非 A 关于 p 是不錯的， S 总是增大。無論在何种情形，不管什么样的 p ， S 总不減少。

今設 A 不属于 C' ，則 A 或关于某一 $p \neq 0$ 或关于 $p = 0$ 和配对方法(10.8.3)是錯誤的。于是，由上述的論証，或基于配对方法(10.8.3)而作出的类似的論証可知， S 經 Ω_p (或基于另一配对方法而作的相应置換)而增大，而且 A 不属于 K 。因之， K 包含在 C' 之中。但若有一 C' 不是 C ，則置換 Ω_0 即将它变为 C 而不縮小 S ；因之， C 属于 $K^{(1)}$ 。

10.9. 任意多个集的新排列。 对于三个以上的集 $(a), \dots$ ，定理 373 有一个类似的定理，它可从定理 373 本身推出。

374²⁾ 若 $(a), (b), (c), (d), \dots$ 是由非負数做成的有限集，則

$$\sum_{r+s+t+u+\dots=0} a_r b_s c_t d_u \dots \leq \sum_{r+s+t+u+\dots=0} a_r^{++} b_s^* c_t^* d_u^* \dots, \quad (10.9.1)$$

1) 这一証法原則上与 Hardy, Littlewood 和 Pólya^[1] 所用的相同，曾由 Hardy 和 Littlewood^[4] 基本上重新給出过。但我們曾把它作了相当大的推广，R. Rado 曾向我們指出，这一証明的原有形式并不是无可爭論的。这証明的另一形式将在本章之末定理 389 中提到。

2) Gabriel^[3]。这定理当其中所有的集皆为对称时的情形是由 Hardy 和 Littlewood^[4] 証明的。

我們假定這定理當所涉及的共有 $k-1$ 個對稱集 $(c), (d), \dots$ 時已成立, 而來證明當有 k 個時也成立. 我們將利用下面的定理, 它本身也是多少值得注意的.

375. 若 $(c^*), (d^*), \dots$ 皆是对称单降集, 則由

$$Q_n = \sum_{i+j+\dots=n} c_i^* d_j^* \dots \quad (10.9.2)$$

所定义之集 (Q) 也是对称单降的.

我們只須就兩個集 $(c^*), (d^*)$ 來證明此定理即可. 因這樣一來, 就可反復運用此項論證推知它一般也成立. 我們現約定, 若無相反的申明, 涉及到多個附標的和數皆是就相加起來等於 0 的那種附標之值來取的.

顯然有 $Q_{-n} = Q_n$. 此外, 對任一集 (x) , 由定理 373, 我們有

$$\sum_m x_m Q_m = \sum x_m Q_n = \sum x_m c_i^* d_j^* \leq \sum x_m^+ c_i^* d_j^* = \sum_m x_m^+ Q_m.$$

由定理 369 可知, Q_m 與 x_m^+ 的排法相同. 由是, 因 Q_m 是 m 的一偶函數, 可知此集為對稱單降.

這是極好的證明, 但有一個較為簡單一些, 它不依賴於定理 373.

為方便起見, 我們把星號去掉, 並假定 $n \geq 0$. 於是, 有

$$Q_n = \sum c_{n+r} d_{-r} + \sum c_{n+1-r} d_{r-1},$$

求和是就 $r \geq 1$ 而起者. 同理, 有

$$Q_{n+1} = \sum c_{n+r} d_{1-r} + \sum c_{n+1-r} d_r.$$

相減, 並利用等式 $d_{-r} = d_r, d_{1-r} = d_{r-1}$, 則得

$$\begin{aligned} Q_n - Q_{n+1} &= \sum \{c_{n+r}(d_{-r} - d_{1-r}) + c_{n+1-r}(d_{r-1} - d_r)\} \\ &= \sum (c_{n+1-r} - c_{n+r})(d_{r-1} - d_r). \end{aligned}$$

因當 $n \geq 0, r \geq 1$ 時, $|n+1-r| < n+r$, 故這裡的各項皆為非負.

回到定理 374 的證明, 我們現定義 Q_n 如 (10.9.2), 定義 P_m 如

$$P_m = \sum_{r+s=m} a_r b_s.$$

則由定理的 $k-1$ 的情形, 有

$$\sum a_r b_s c_t d_u \cdots = \sum P_m c_t d_u \cdots \leq \sum P_m^+ c_t^* d_u^* \cdots^{1)}.$$

換言之,我們有

$$\sum a_r b_s c_t d_u \cdots \leq \sum_m P_m^+ Q_m = \sum_m P_m Q_{\phi(m)},$$

其中 $\phi(m)$ 是使得 $P_m = P_{\phi(m)}^+$ 的一排列函数;就是說,我們有

$$\begin{aligned} \sum a_r b_s c_t d_u e_v \cdots &\leq \sum a_r b_s Q_{\phi(m)} \leq \sum a_r^{++} b_s Q_m^* \\ &= \sum a_r^{++} b_s Q_m = \sum a_r^{++} b_s c_t^* d_u^* e_v^* \cdots, \end{aligned}$$

此即(10.9.1).

由定理 374, 我們可以推出²⁾

376. 任給有限多个集 $(a), (b), \cdots$, 我們有

$$\begin{aligned} \sum a_{r_1} a_{-r_2} b_{s_1} b_{-s_2} c_{t_1} c_{-t_2} \cdots &\leq \sum a_{r_1}^{++} a_{-r_2}^{++} b_{s_1}^{++} b_{-s_2}^{++} c_{t_1}^{++} c_{-t_2}^{++} \cdots \\ &= \sum a_{r_1}^+ a_{-r_2}^+ b_{s_1}^+ b_{-s_2}^+ c_{t_1}^+ c_{-t_2}^+ \cdots. \end{aligned}$$

10.10. 关于任意多个集的重新排列的另一定理. 在定理 373 和 374 中有两个集, 即 (a) 和 (b) , 是随意的, 而其余的集則服从“对称”这一条件. 这一限制是不可缺少的;若 $(a), (b), (c)$ 皆不受限制, 則一般說来, 不可能借助符号 $a^+, {}^+a, \cdots$ 来刻划出最大的重新排列³⁾.

但存在一个不够精密的定理, 它在应用时常常同样有效.

377. 对于任意的 k 个集 $(a), (b), (c), \cdots$, 有

$$\sum_{r+s+t+\cdots=0} a_r b_s c_t \cdots \leq K(k) \sum_{r+s+t+\cdots=0} a_r^+ b_s^+ c_t^+ \cdots,$$

其中 $K = K(k)$ 是一个只与 k 有关的数.

我們假定 $k = 3$; 在一般情形, 証法基本相同.

我們定义集 $(\beta^*), (\gamma^*)$ 如

$$\beta_m^* = b_m^+, \quad \gamma_m^* = c_m^+ (m \geq 0), \quad (10.10.1)$$

$$\beta_{-m}^* = \beta_m^*, \quad \gamma_{-m}^* = \gamma_m^* (m \geq 0); \quad (10.10.2)$$

而 (β) 和 (γ) 則定义作利用将 (b^+) 和 (c^+) 分別变为 (b) 和 (c) 之置换从 (β^*) 和 (γ^*) 变换而得之集. 于是, (β) 和 (γ) 是对称

1) 以 $P, c, d, \cdots$ 代 $a, b, c, \cdots$; 因 (c) 为对称, 故 ${}^+c_t = c_t^*$.

2) Gabriel[3].

3) 参考本章末了的定理 388.

集. 此外, 因当 $m \geq 0$ 时, $b_m^+ \leq b_m^+$, $c_m^+ \leq c_m^+$, 对于所有之 n , 我們有

$$b_n^+ \leq \beta_n^*, \quad c_n^+ \leq \gamma_n^*,$$

因而对于所有之 n , 有

$$b_n \leq \beta_n, \quad c_n \leq \gamma_n. \quad (10.10.3)$$

我們还需要一个当 $m < 0$ 时关于 β_m^* 和 γ_m^* 的不等式. 当 $n \geq 1$ 时, 我們有 $b_n^+ \leq b_{n+1}^+$ 和 $c_n^+ \leq c_{n+1}^+$, 故由 (10.10.1) 和 (10.10.2), 有

$$\beta_m^* \leq b_{m+1}^+, \quad \gamma_m^* \leq c_{m+1}^+ (m < 0). \quad (10.10.4)$$

利用 (10.10.3) 和 (β) 与 (γ) 的对称性, 由定理 373 可得

$$S = \sum_{r+s+t=0} a_r b_s c_t \leq \sum_{r+s+t=0} a_r \beta_s \gamma_t \leq \sum_{r+s+t=0} a_r^+ \beta_s^* \gamma_t^*.$$

最后一个和数是

$$\left(\sum_{r \geq 0, t \geq 0} + \sum_{s < 0, r \geq 0} + \sum_{s \geq 0, t < 0} + \sum_{s < 0, t < 0} \right) a_r^+ \beta_s^* \gamma_t^*;$$

于是, 由 (10.10.1) 和 (10.10.4), 有

$$\begin{aligned} S \leq & \sum_{r \geq 0, t \geq 0} a_r^+ b_s^+ c_t^+ + \sum_{s < 0, r \geq 0} a_r^+ b_{s+1}^+ c_t^+ + \sum_{s \geq 0, t < 0} a_r^+ b_s^+ c_{t+1}^+ \\ & + \sum_{s < 0, t < 0} a_r^+ b_{s+1}^+ c_{t+1}^+ = S_1 + S_2 + S_3 + S_4. \end{aligned} \quad (10.10.5)$$

在 S_2 中, $s < 0$, $r + s + t = 0$, 故或 $r > 0$, 或 $t > 0$. 在前一种情形, $a_r^+ \leq a_{r-1}^+$, 在后一种情形, $c_t^+ \leq c_{t-1}^+$. 因之, 無論在哪一种情形, 在 S_2 中总有

$$a_r^+ b_{s+1}^+ c_t^+ \leq a_{r-1}^+ b_{s+1}^+ c_t^+ + a_r^+ b_{s+1}^+ c_{t-1}^+. \quad (10.10.6)$$

同理, 在 S_3 中有

$$a_r^+ b_s^+ c_{t+1}^+ \leq a_{r-1}^+ b_s^+ c_{t+1}^+ + a_r^+ b_{s-1}^+ c_{t+1}^+. \quad (10.10.7)$$

最后, 在 S_4 中, $s < 0$, $t < 0$ 且 $r + s + t = 0$, 故 $r \geq 2$, $a_r^+ \leq a_{r-2}^+$, 且有

$$a_r^+ b_{s+1}^+ c_{t+1}^+ \leq a_{r-2}^+ b_{s+1}^+ c_{t+1}^+. \quad (10.10.8)$$

假若現在我們將 (10.10.6), (10.10.7), (10.10.8) 中所給出的各典型項的上界代入 (10.10.5) 中, 并注意在这些上界中附标之和常为 0,

則得

$$S \leq (1 + 2 + 2 + 1) \sum_{r+s+t=0} a_r^+ b_s^+ c_t^+ = 6 \sum_{r+s+t=0} a_r^+ b_s^+ c_t^+;$$

此即証明定理。

10.11. 应用. 这些定理在 Fourier 級数論中有着重要的应用。由定理 376 容易推知¹⁾, 若

$$f(\theta) = \sum_{-R}^R a_r e^{r\theta i}, \quad f^+(\theta) = \sum_{-R}^R \alpha_r e^{r\theta i},$$

其中 $\alpha_r = |a_r|^+$, 又若 k 为一正整数, 則

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^{2k} d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f^+(\theta)|^{2k} d\theta;$$

而且三角多項式之間的这一不等式可以推广到由一般 Fourier 級数所表示的函数上去。形如

$$\sum \alpha_r e^{r\theta i}$$

的級数具有特別简单的性質。这些級数除了在原点和迭合点之外为一致收斂, 而在这些点, 它們所表示的函数一般具有一无限頂峯 (peak); 而且比值

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^+(\theta)|^{2k} d\theta : \sum (|r| + 1)^{2k-2} \alpha_r^{2k}$$

位于两个只与 k 有关的正界之間。由是, 比如說, 我們有

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^{2k} d\theta \leq K(k) \sum (|r| + 1)^{2k-2} \alpha_r^{2k}.$$

关于更詳尽的討論, 可参考 Hardy 和 Littlewood[9], Paley[3].

10.12. 一函数的重新排列. §§ 10.1—10.10 中之諸定理对于单連續变数之函数具有相类似的情形。

設 $\phi(x)$ 在 $(0, 1)$ 中为非負且可积, 因而它为可測且几乎处处有限。若 $M(y)$ 是使得 $\phi(x) \geq y$ 之集之測度, 則 $M(y)$ 是 y 之一单降函数。 M 之逆 $\bar{\phi}$ 定义如

$$\bar{\phi}\{M(y)\} = y;$$

而 $\bar{\phi}(x)$ 在 $(0, 1)$ 中至多除可数个 x 之值 (例如与 $M(y)$ 之不变

1) 参考 Gabriel[3], Hardy 和 Littlewood^[9] 曾給出一个不太精密的不等式。

區間相對應的 x 值)外, 唯一定義, 且為 x 之一單降函數. 我們可以通過規定(比如說): 在一不連續點, 令

$$\bar{\phi}(x) = \frac{1}{2} \{ \bar{\phi}(x-0) + \bar{\phi}(x+0) \},$$

這樣就可把 $\bar{\phi}(x)$ 完全定義¹⁾.

我們稱 $\bar{\phi}(x)$ 為 $\phi(x)$ 依降序的重新排列. 它是 x 之一單降函數, 一般說來, 它在原點有一無限頂峯.

使得 $\bar{\phi}(x) \geq y$ 的集的測度為 $M(y)$ ²⁾. 由是可知, 下面兩個由

$$y_1 \leq \phi(x) < y_2, \quad y_1 \leq \bar{\phi}(x) < y_2$$

所定義的(一般說來很不相同)集具有同樣的測度, 而且對於由

$$\phi(x) > y, \quad \bar{\phi}(x) > y$$

所定義之集, 同樣也有相同的測度. 我們可以說, 函數 $\phi(x)$ 和 $\bar{\phi}(x)$ 是“等同可測的”; 它們在 $(0, 1)$ 上具有相同的積分, 而且

$$\int_0^1 F(\bar{\phi}) dx = \int_0^1 F(\phi) dx$$

對於任何使得上之積分存在之可測函數 F 成立.

同理我們可以對於在 x 之任何區間上定義之函數定義 $\bar{\phi}(x)$, 只須假定, 若該區間為無限, 則 $M(y)$ 對於每一正的 y 皆為有限.

若 $\phi_1(x) \leq \phi(x)$, 則顯然有 $\bar{\phi}_1(x) \leq \bar{\phi}(x)$. 特別, 設 $\phi_1(x)$ 在 E 中等於 $\phi(x)$, 在 CE 中為 0, 則

$$\int_E \phi(x) dx = \int \phi_1(x) dx = \int_0^{mE} \bar{\phi}_1(x) dx \leq \int_0^{mE} \bar{\phi}(x) dx. \quad (10.12.1)$$

在 § 10.19 中我們將要用到這不等式. 特別, 若 $\phi(x)$ 在 $(0, a)$ 中定義, $0 \leq x \leq a$, 則

1) 比較 § 6.15.

2) 通過作圖這就可看得很清楚. 必須記住 $\bar{\phi}(x)$ 可能具有不動區間, 它與 $M(y)$ 的不連續點相對應. 但容易證明, 對於所有之 y , $M(y-0) = M(y)$, 因而即使對於這些除外的 y , 正文中的論斷也成立. 事實上, 我們有

$$M\left(y - \frac{1}{n}\right) - M(y) = mS_n,$$

其中 S_n 是使得 $y - n^{-1} \leq \phi < y$ 成立的集, 而且 mS_n 之極限為 0.

$$\int_0^x \phi(t) dt \leq \int_0^x \bar{\phi}(t) dt. \quad (10.12.2)$$

有另外一种类型的一函数的重新排列对于下面的讨论甚为重要。例如假定 $\phi(x)$ 对于所有的实 x , 或对于几乎所有的实 x 皆有定义, 又设 $M(y)$ 对于所有之正 y 皆为有限。我們可以用规定

$$\phi^*\left\{\frac{1}{2}M(y)\right\} = y$$

和 $\phi^*(-x) = \phi^*(x)$ 来定义一个偶函数 $\phi^*(x)$; 或者, 也是一样, 我們规定 $\phi^*(x)$ 是一偶函数, 而且对于所有正的 x , 有

$$\phi^*(x) = \bar{\phi}(2x).$$

于是 $\phi^*(x)$ 在原点的每一边皆为对称下降, 而在原点它一般有一个尖的无限顶峰。我們称 $\phi^*(x)$ 为 $\phi(x)$ 依对称降序的重新排列。

10.13. 关于二函数的重新排列。 我們先来证明一个与定理 368 相对应的积分不等式。

378. 无论 a 为有限或无限, 皆有

$$\int_0^a \phi\psi dx \leq \int_0^a \bar{\phi}\bar{\psi} dx.$$

我們用一个与 § 10.3 中之方法相类似的方法来证明这定理。首先, 这定理对于只取 0 或 1 这两个值的函数成立。盖设 E 和 F 分别表示使得 $\phi = 1$ 和 $\psi = 1$ 成立的集, $\bar{E}$ 和 $\bar{F}$ 是相应于 $\bar{\phi}$, $\bar{\psi}$ 的类似的集。则前一积分为 $m(EF)$, 即集 E 和 F 之积 EF 的测度, 而且

$$m(EF) \leq \min(mE, mF) = \min(m\bar{E}, m\bar{F}) = m(\bar{E}\bar{F}).$$

其次, 这定理对于只取有限多个非负值的函数也成立。事实上, 依据 § 10.3 的途径, 我們可以把这种函数 ϕ 表示成

$$\phi = \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 + \cdots + \alpha_n\phi_n,$$

其中諸 α 为非负, 諸 ϕ 总为 0 或 1, 同时有

$$\bar{\phi} = \alpha_1\bar{\phi}_1 + \alpha_2\bar{\phi}_2 + \cdots + \alpha_n\bar{\phi}_n.$$

于是, 所要之不等式可从已经证明了的不等式的线性组合得出。

最后, 我們用刚才讨论过的那种类型的函数逼近 ϕ 和 ψ 来证

明一般情形的定理。我們不給出上述兩段的詳細證明，因為這些論證在更為困難的定理 379 的證明中將再度出現。

10.14. 關於三個函數的重新排列。 我們現來討論這一節的主要課題，即與定理 372 和 373 相應的積分定理。

379¹⁾. 若 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 為非負， $f^*(x)$, $g^*(x)$, $h^*(x)$ 為等同可測的對稱單降函數，則

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)h(-x-y)dx dy \\ \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g^*(y)h^*(-x-y)dx dy = I^*. \quad (10.14.1)$$

我們顯然可以假設 f, g, h 中無為一 0。我們也可將 $-x-y$ 代之以 $\pm x \pm y$ 而不改變此不等式之意義。

我們現分三步來證明此不等式：(1)對於總為 0 或 1 的函數；(2)對於只取有限多個值的函數；(3)對於一般的函數。正如對於定理 373 一樣，整個困難在 (1) 這一步。我們暫時把這一步認為當然成立，一開始就來證明，若此定理對於這一特別情形成立，則它一般也成立。

一個只取有限多個非負值 $0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 的函數可以表成下之形式：

$$f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x),$$

其中諸 a 為正，諸 f_i 只取值 0 和 1，而且

$$f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_n.$$

這是因為我們可以假定 $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ ，於是取

$$a_1 = a_1, a_2 = a_2 - a_1, \dots, a_n = a_n - a_{n-1},$$

$$f_1 = 1(f \geq a_1), \quad = 0(f < a_1),$$

$$f_2 = 1(f \geq a_2), \quad = 0(f < a_2),$$

.....

通過簡單的考慮可知，這樣一來我們也有

$$f^*(x) = a_1 f_1^*(x) + a_2 f_2^*(x) + \dots + a_n f_n^*(x).$$

1) F. Riesz[8].

若我們假定 f, g, h 各只取有限多个值, 并把它們按此方法分解, 則从牽涉三元組 f_i, g_i, h_k 的相似的不等式的組合即得(10.14.1)¹⁾.

欲从这一情形过渡到一般情形, 我們可用只取有限多个值的函数去逼近 f, g, h . 例如我們可用如下定义的函数 f_n :

$$f_n = \frac{k}{n} \quad \left(\frac{k}{n} \leq f < \frac{k+1}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, n^2 - 1 \right),$$

$$f_n = n \quad (f \geq n)$$

去逼近 f ; 对 g, h 亦同法处理. 于是, $f_n \leq f, f_n^* \leq f^*$, 对于 g 和 h 亦然. 因之(假设定理对于此特殊类型之函数业已証明), 我們有

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) g_n(y) h_n(-x-y) dx dy \leq I_n^* \leq I^*,$$

因而 $I = \lim I_n \leq I^*$.

留下来的就是要对 f, g, h 只取值 0 或 1 这种特殊情形証明定理. 我們最好先把这問題作更进一步的簡化.

首先, 我們可以假定使得 f, g, h 取值 1 之集 F, G, H 皆为有限. 若其中有两个为无限, 則 f^*, g^*, h^* 中有两个对于所有之 x 皆为 1, 在此种情形, $I^* = \infty$ ²⁾, 因而没有什么需要証明. 于是我們就假定其中恰有一个集, 設为 F , 为无限. 設 F_N 是 F 在 $(-N, N)$ 中的部分, 又設 N 为使得 $mF_N \geq 2n$ 的最小数, 并定义 f_n 为: 在 F_N 中为 f , 在 F_N 之外为 0. 則(假定当这些集为有限时定理已經証明)

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n g h dx dy \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n^* g^* h^* dx dy \\ &= \int_{-n}^n \int_{-\infty}^{\infty} f^* g^* h^* dx dy \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^* g^* h^* dx dy = I^*, \end{aligned}$$

因而有

$$I = \lim I_n \leq I^*.$$

于是, 我們就假定 $f(x)$ 在一个具有有限測度之集 E 上取值 1.

1) 比較 § 10.6 中类似的論証.

2) 除非第三个函数为 0.

我們可以将 E 表示成 $\mathcal{E} + e - e'$ 之形式, 其中 $\mathcal{E}$ 乃是由有限多个互不遮盖之区間做成之区間組, e 和 e' 則是測度任意小之集¹⁾; g 和 h 于其中取值 1 之集亦可同法表出. 又显然可以看出, 因 f, g, h 不超过 1, 小的集 $e, \dots$ 等在积分 I 和 I^* 中只造成微小的差异. 因之, 我們可以假定, 使得 $f = 1, g = 1, h = 1$ 成立之集皆是由有限多个区間做成之有限組; 若定理对于此种情形已經証明, 則其对于更一般的情形可通过逼近而得出.

其次, 基于同样的理由, 我們可以假定所有这些区間的端点皆为有理数; 然后, 通过变数变换, 可以假定它們都是整数. 于是, 这定理化为依赖于这样的情形: 在此种情形中, 使得 $f = 1, g = 1, h = 1$ 成立的集皆是由有限多个区間 $(m, m+1)$ 所組成, 其中 m 为一整数.

最后, 若有必要, 我們可以假定在任何一个或所有的这些集中, 区間之数是偶数, 这是因为我們可以将各区間一分为二, 然后再作一次变数变换.

10.15. 定理 379 的証明的完成. 我們最好将 $f(x)$ 代之以 $f(-x)$, 而这样做显然并不影响我們的結果. 假若我們已經这样做了, 并将 x, y 代之以 s, t , 然后再作变换 $s = x - t$, 則得

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(t)h(-x)dx dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(-x)\chi(x)dx, \end{aligned} \quad (10.15.1)$$

$$\begin{aligned} I^* &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t-x)g^*(x)h^*(-x)dx dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h^*(-x)^*\chi(x)dx, \end{aligned} \quad (10.15.2)$$

其中

$$\chi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(t)dt, \quad (10.15.3)$$

$$^*\chi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t-x)g^*(t)dt^2.$$

1) 參看(例如) de La Vallée Poussin [2, pp. 20—23].

2) $^*\chi(x)$ 自然不会与 $\chi^*(x)$ 相混.

我們暫時只假定 f, g, h 皆是集的特征函数(只取 0 和 1 这两个值的函数), 而不需用到在 § 10.14 末已經証明是可容許的更进一步的簡化手續. 我們用 $F, \dots, F^*, \dots$ 表示 $f, \dots, f^*, \dots$ 在其中取值 1 的集; 各函数在其相应的集之外皆为 0, $F^*, \dots$ 乃是关于原点为对称的区間. 我們假定

$$mF = mF^* = 2R, mG = mG^* = 2S, mH = mH^* = 2T.$$

依据这些記号¹⁾, 我們有

$$\begin{aligned} I &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(t)dx dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-s)ds \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = 4RS, \end{aligned} \quad (10.15.4)$$

$$I^* = \int_{-T}^T {}^*\chi(x)dx. \quad (10.15.5)$$

若 x 固定, 而 $t-x$ 跑过集 F , 則 t 跑过一集 F_x , 此乃将 F 移动一个距离 x 而得者. 若我們用同样方法定义 $F_x^* = (F^*)_x$, 則 (10.15.3) 中之諸函数可以写成

$$\chi(x) = m(F_x G), \quad {}^*\chi(x) = m(F_x^* G^*). \quad (10.15.6)$$

由这公式我們即可計算 ${}^*\chi(x)$. 我們現假定(这样做显然是可以的)

$$R \leq S, \quad (10.15.7)$$

則 ${}^*\chi(x)$ 为連續,

$$\begin{aligned} {}^*\chi(x) &= 0 \quad (|x| \geq R+S), \\ {}^*\chi(x) &= 2R \quad (|x| \leq S-R), \end{aligned} \quad (10.15.8)$$

而且 ${}^*\chi(x)$ 在区間 $(-R-S, -S+R)$ 和 $(S-R, R+S)$ 中为綫性的. ${}^*\chi(x)$ 的图象如图 3 所示.

今設

$$R+S \leq T. \quad (10.15.9)$$

則从 (10.15.8) 即得

$$I^* = \int_{-T}^T {}^*\chi(x)dx = \int_{-R-S}^{R+S} {}^*\chi(x)dx = 4RS.$$

1) 选取这些記号, 用以強調我們的論証与 §§ 10.6—7 中所說者的平行关系.

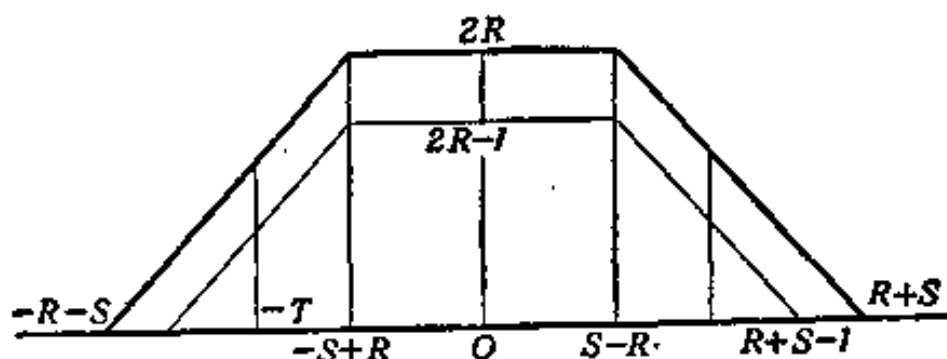


图3 $*\chi$ 和 $*\chi_1$ 的图象

由(10.15.4)即得定理所要的结果,于是,我们已经在限制(10.15.9)之下证明了定理. 若 $R = 0$ 或 $S = 0$ (此时 F 或 G 为 0), 它显然也成立.

直到现在, F, G, H 皆是任意的有限测度之集. 我们现在把问题进一步特殊化, 如 § 10.14 末所说的那样, 即假定 F, G, H 是由形如 $(m, m+1)$ 的区间所成之集, 区间之数分别为 $2R, 2S, 2T$. 假若愿意, 我们可以假定这些数皆为偶数, 但我们将采用归纳法来论证, 因而最好是采用一个稍微更广泛一些的假设, 即只假定 $2R + 2S + 2T$ 为偶数. 在这种情形, R, S, T 不必为整数, 但 $2R, 2S, 2T$ 和

$$\mu = R + S - T = R + S + T - 2T \quad (10.15.10)$$

皆是整数. 我们已证明, 若 $\mu \leq 0$ 则定理成立, 而且若 $R = 0, S = 0$, 定理也成立. 因此只须在它当 $\mu = n - 1$ 成立这一假设之下证明它当

$$\mu = n > 0, \quad R > 0, \quad S > 0 \quad (10.15.11)$$

时也成立即可.

我们用 F_1 表示从 F 去掉它最右边的一个区间之后所得之集; 同理, G_1 是 G 去掉它的最右边的一个区间之后所得之集. 一般言之, 附标为 1 之集、函数或数皆是从 F_1 和 G_1 导出, 犹之乎与之相应的无附标的集、函数或数之从 F 和 G 导出一样; 例如 f_1^* 是 f_1 (即 F_1 的特征函数) 的重新排列, $*\chi_1(x)$ 是 f_1^* 和 g_1^* 的卷积, F_1^* 乃是区间

$$\left(-R + \frac{1}{2}, R - \frac{1}{2}\right).$$

一般言之, 当我们从 F, G 过渡到 F_1, G_1 时, R 和 S 即代之以 $R - \frac{1}{2}$ 和 $S - \frac{1}{2}$. 由归纳法假设, 有

$$I_1 \leq I_1^*. \quad (10.15.12)$$

函数 $\chi_1^*(x)$ 当 $|x| \geq R - S - 1$ 时为 0, 当 $|x| \leq S - R$ 时等于 $2R - 1$, 在余留下来的区间中为线性的; 且由 (10.15.10) 及 (10.15.11), $T \leq R - S - 1$. 因之, 对于 $-T \leq x \leq T$, 有¹⁾

$$*\chi(x) - *\chi_1(x) = 1,$$

由 (10.15.5), 有

$$I^* - I_1^* = \int_{-T}^T \{*\chi(t) - *\chi_1(t)\} dt = 2T. \quad (10.15.13)$$

我们现在来考虑

$$I - I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} h(-x) \{\chi(x) - \chi_1(x)\} dx. \quad (10.15.14)$$

在这里, 依据 (10.15.6), 有

$$\chi(x) - \chi_1(x) = m(F_x G) - m(F_{1x} G_1). \quad (10.15.15)$$

这函数显然在任何区间 $(m, m+1)$ 中皆是线性的, 因此它对于整数值的 x 取其极值. 于是我们就假设 x 为整数. 在这种情形, 集 $F_x G$ 是由整值区间 $(m, m+1)$ 所组成, 而且当我们把 F_x 中和 G 中的最右端的区间除去时, 则 $F_x G$ 中或失去一个区间, 或一个也不失去, 若其中一个集的极端区间与另一个集的一个区间重合, 则损失一个, 若无此种重合, 则一个也不损失²⁾. 因之, 对于整的 x , $\chi(x) - \chi_1(x)$ 为 1 或 0, 因而对于所有之 x , 有

$$0 \leq \chi(x) - \chi_1(x) \leq 1. \quad (10.15.16)$$

由 (10.15.14) 及 (10.15.16), 有

1) 参看图 3.

2) 我们不可能损失两个区间, 因为从 F_x 和 G 中除去的区间乃是它们各自的集中之最右者. 这是本证明的要点.

$$0 \leq I - I_1 = \int_H \{X(-x) - X_1(-x)\} dx \leq \int_H dx = 2T, \quad (10.15.17)$$

由(10.15.13)及(10.15.18),有

$$I - I_1 \leq I^* - I_1^*. \quad (10.15.18)$$

最后,由(10.15.12)及(10.15.17),有 $I \leq I^*$; 此即証明定理¹⁾.

10.16. 一个另外的証明. Riesz 所給的定理 379 的証明也是非常有趣的. 如同 § 10.14 中那样,我們可把定理化为其中 f, g, h 各在一有限的区間集中为 1, 此外則为 0 这一特別情形,而把証明簡化. 我們將变数 x, y, z 表示在一等边三角形的边上, 这时我們把各边的中点取作原点, 并且循环地取定各边的正向. 于是, $x + y + z = 0$ 即是边上之点 x, y, z 是平面上一点的三个垂直射影所需滿足的条件²⁾.

函数 $f(x), g(y), h(z)$ 是三个集 E_1, E_2, E_3 的特征函数, 这些集各由有限多个不相遮盖的区間所組成, $f^*(x), y^*(y), h^*(z)$ 則是各关于三个原点对称分布的三个各长为 E_1, E_2, E_3 ³⁾ 的区間 E_1^*, E_2^*, E_3^* 的特征函数. 若 E_{123} 表示平面上那种点所成之集, 其三个射影属于 E_1, E_2, E_3 ; 同法定义 E_{123}^* , 則⁴⁾

- 1) 这一証明是依据 Zygmund^[1] 所指出的綫索. 但它比 Zygmund 原来的长得多, 而且必然要如此, 因为 Zygmund 的証明本身并不是无可爭辯的.

我們証明, 当从 F 和 G 所除去的区間是最右边的区間时 (10.15.16) 成立. 若我們除去了两个任意的区間, 則它不一定成立. 例如, 設 F 与 G 各是区間 $(-4, 4)$, F_4 由区間 $(-4, -2)$ 和 $(2, 4)$ 所組成, G_4 由区間 $(-2, 2)$ 所組成. 我們可以分四步从 F, G 过渡到 F_4, G_4 . 在每一步中从各个集取去一个单位区間; 但

$$X(0) - X_4(0) = 8,$$

而不是小于或等于 4. 这例子說明, Zygmund 的論断^[1, p. 176] “ $\phi(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 中的值至多增加 2”是不对的, 除非他的构造是用一种他未曾明白說出的方法来进行的. 把这一点加以詳細的討論是很重要的, 因为它是这一証明的核心.

- 2) 若 P 是所說之点, G 是三角形的中心, 則

$$x + y + z = PG \left\{ \cos \alpha + \cos \left(\alpha + \frac{2}{3} \pi \right) + \cos \left(\alpha + \frac{4}{3} \pi \right) \right\} = 0.$$

- 3) 我們用 E_1 既表示集 E_1 , 又表示它的測度.

- 4) E_{123} 当用作測度时, 自然是一平面測度.

$$I = \sin \frac{1}{3} \pi E_{123}, \quad I^* = \sin \frac{1}{3} \pi E_{123}^*,$$

而我們所証明的則是

$$E_{123} \leq E_{123}^*. \quad (10.16.1)$$

图形 E_{123}^* 是用六条垂直于边的直綫来定义, 它是一六边形, 除非 E_1, E_2, E_3 中有一个大于其它两者之和. 在此种情形, 它則化为一平行四边形. 我們先就后一种情形来証明(10.16.1). 我們假定(比如說) $E_3 \geq E_1 + E_2$, 于是 E_{123}^* 即化为 E_{12}^* , 即平面上之点中, 在两条边上分別投影到 E_1^* 和 E_2^* 的那种点所成之集; 而 E_{123} 則包含在用同样方法所定义的集 E_{12} 中. 因之

$$E_{123} \leq E_{12} = \operatorname{cosec} \frac{1}{3} \pi \cdot E_1 E_2 = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{3} \cdot E_1^* E_2^* = E_{12}^* = E_{123}^*.$$

当 E_{123}^* 是一平行四边形时, 此即証明定理.

轉到六边形的情形, 我們可假定(比如說)

$$E_3 > E_1 \geq E_2, \quad E_3 < E_1 + E_2.$$

我們將每一 E_i 的各端減去一測度为 t 的集¹⁾, 如是所得之集定义作

$$E_1(t), E_2(t), E_3(t),$$

并同法定义相应之区間 $E_1^*(t), E_2^*(t), E_3^*(t)$. 若 t 从 0 增到

$$t_0 = \frac{1}{2} (E_1 + E_2 - E_3),$$

則 $E_1(t), E_2(t), E_3(t)$ 从 E_1, E_2, E_3 降到 $E_1(t_0), E_2(t_0), E_3(t_0)$, 它們的測度滿足关系

$$E_1(t_0) + E_2(t_0) = E_3(t_0).$$

此六角形于是即化为一平行四边形, 因而

$$E_{123}(t_0) \leq E_{123}^*(t_0). \quad (10.16.2)$$

若我們又能証明

1) 就是說,

$$E_1 = E_1'(t) + E_1(t) + E_1''(t),$$

其中 $E_1'(t)$ 在 $E_1(t)$ 之左, $E_1''(t)$ 在 $E_1(t)$ 之右, 而且

$$mE_1'(t) = mE_1''(t) = t,$$

$$E_{123} - E_{123}(t_0) \leq E_{123}^* - E_{123}^*(t_0), \quad (10.16.3)$$

則通过相加即可得出我們的結論。

我們現通过比較

$$\phi(t) = -E_{123}(t), \quad \phi^*(t) = -E_{123}^*(t)$$

的导数来証明(10.16.3)。首先, $E_{123}^*(t)$ 与 $E_{123}^*(t+h)$ 的差乃是一六角形的环, 其面积为 $hP(t) + O(h^2)$, 其中 $P(t)$ 是相应于值 t 的六角形的周长, 因而

$$\frac{d\phi^*}{dt} = P(t) = \operatorname{cosec} \frac{1}{3} \pi \{E_1(t) + E_2(t) + E_3(t)\}.$$

另一方面, 三个集

$$E_1(t) - E_1(t+h), E_2(t) - E_2(t+h), E_3(t) - E_3(t+h)$$

当 h 甚小时, 总共由六个各长为 h 的区間所組成, 过此六个区間的端点所画的垂直于三角形之边的垂綫定义一个六角形环¹⁾, 它包含了整个的 $E_{123}(t) - E_{123}(t+h)$, 导数 $\phi'(t)$ 則是这环的外部边界中属于 $E_{123}(t)$ 的部分的总长。如图所示, 将此边界的这些部分射影到三角形的边上, 則可看出

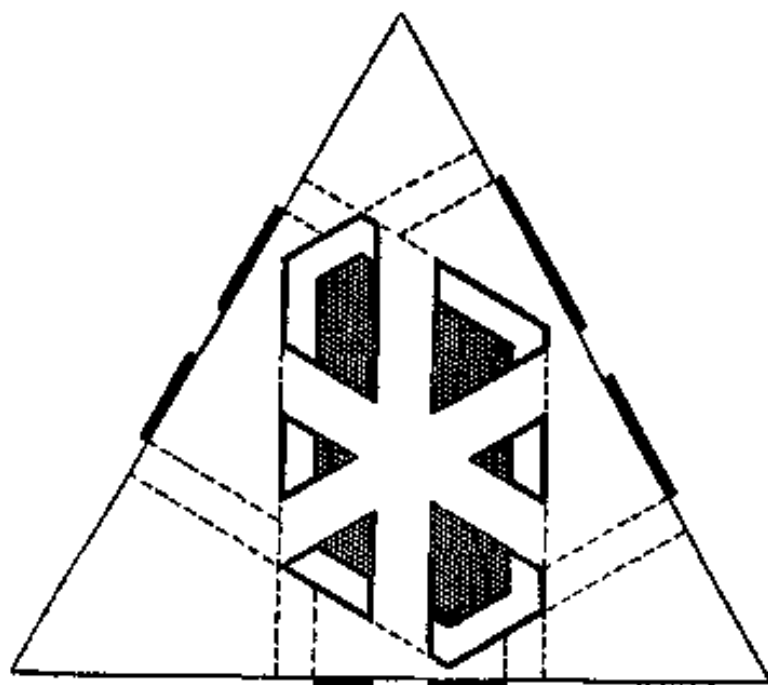


图 4 $E_{123}(t)$ 的減縮量

1) 参考图 4. 在图中, 集 $E_1(t+h), \dots$ 是用粗黑綫画在三角形的边上, 集 $E_{123}(t+h)$ 是用阴影表出, 十二条垂綫是用虛綫表出, $E_{123}(t) - E_{123}(t+h)$ 的边界則是用粗綫表示。

$$\frac{d\phi}{dt} \leq \operatorname{cosec} \frac{1}{3} \pi \{E_1(t) + E_2(t) + E_3(t)\} = \frac{d\phi^*}{dt}.$$

由此通过积分即得(10.16.3), 定理的证明即告完成.

10.17. 应用. 定理 379 中与定理 371 相应的特殊情形是

380. 若 $h(x)$ 对称单降, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)h(x-y)dx dy \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g^*(y)h(x-y)dx dy = I^*. \end{aligned}$$

我們現在将要运用定理 371 和 380 到特殊情形

$$c_{r-s} = |r-s|^{-\lambda}$$

和

$$h(x-y) = |x-y|^{-\lambda}.$$

381. 若

$$a_r \geq 0, \quad b_s \geq 0,$$

$$p > 1, \quad q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1, \quad \lambda = 2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \quad (10.17.1)$$

(因而 $0 < \lambda < 1$), 又若

$$\sum a_r^p = A, \quad \sum b_s^q = B,$$

則

$$T = \sum \sum' \frac{a_r b_s}{|r-s|^\lambda} \leq K A^{1/p} B^{1/q},$$

其中一撇表示 $r \neq s$, $K = K(p, q)$ 只与 p 和 q 有关.

382. 若 $f(x) \geq 0, g(y) \geq 0$, p 和 q 满足(10.17.1), 又若

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^p(x)dx = F, \quad \int_{-\infty}^{\infty} g^q(y)dy = G,$$

則

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^\lambda} dx dy \leq K F^{1/p} G^{1/q}.$$

这两个定理的证明实际上是一样的. 我們来证明定理 382¹⁾.

根据定理 380, 我們显然可以将 f, g 代之以 f^*, g^* . 于是我

1) 关于定理 381 的证明, 可参考 Hardy, Littlewood, 和 Pólya[1]; 关于从定理 381 推出定理 382, 可参考 Hardy 和 Littlewood[6].

們相应于积分的四个象限把 I 分成四个部分，右上部分和左下部分是相等的，左上部分和右下部分亦然，而且后两者不超过前两者¹⁾。因此我們只須考虑右上部分，于是，再把我們的記号加以改变，我們只須証明

$$J = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^\lambda} dx dy \leqslant K F^{1/p} G^{1/q}$$

即可，現在这里的 f 和 g 皆为正且单降，而 F 与 G 則由在 $(0, \infty)$ 上所取之积分来定义。令

$$J = J_1 + J_2,$$

其中 J_1 和 J_2 分別是在八分域 $y \leqslant x$ 和 $x \leqslant y$ 上所取之积分。

我們有

$$J_1 = \int_0^\infty f(x) dx \int_0^x \frac{g(y)}{|x-y|^\lambda} dy.$$

因在 $(0, x)$ 中， $g(y)$ 为单降， $(x-y)^{-\lambda}$ 为单增，故由定理 236，有

$$x \int_0^x \frac{g(y)}{(x-y)^\lambda} dy \leqslant \int_0^x g(y) dy \int_0^x \frac{dy}{(x-y)^\lambda} = \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} g_1(x) \text{ (設).}$$

由是有

$$J_1 \leqslant \frac{1}{1-\lambda} \int_0^\infty f(x) g_1(x) x^{-\lambda} dx.$$

由定理 189，有

$$J_1 \leqslant \frac{1}{1-\lambda} F^{1/p} \left(\int_0^\infty g_1^{p'}(x) x^{-p'\lambda} dx \right)^{1/p'}. \quad (10.17.2)$$

但由(10.17.1)， $p' > q$ ，又再由定理 189，有

$$g_1(x) = \int_0^x g(y) dy \leqslant G^{1/q} x^{1/q'}.$$

因之，有

$$g_1^{p'}(x) x^{-p'\lambda} \leqslant g_1^q(x) (G^{1/q} x^{1/q'})^{p'-q} x^{-p'\lambda} = G^{(p'-q)/q} \left\{ \frac{g_1(x)}{x} \right\}^q \quad (10.17.3)$$

1) 左上和右下部分可用 § 9.14 中較为容易的方法来証明。

(因为

$$\frac{p'-q}{q'} - \lambda p' = \frac{p'-q}{q'} - \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}\right)p' = -\frac{q}{q'} - 1 = -q).$$

由(10.17.2)和(10.17.3)以及定理 327, 有

$$J_1 \leq K F^{1/p} G^{(p'-q)/p'q} \left\{ \int_0^\infty \left(\frac{g_1(x)}{x} \right)^q dx \right\}^{1/p'} \leq K F^{1/p} G^{1/q}.$$

J_2 的討論与此相同, 由此即得定理.

383. 設 $f(x)$ 在 $(0, \infty)$ 中为非負, 且属于 L^p , 其中 $p > 1$, 又設

$$0 < \alpha < \frac{1}{p}, \quad q = \frac{p}{1 - \alpha p} \quad (10.17.4)$$

和

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(y)(x-y)^{\alpha-1} dy, \quad (10.17.5)$$

則 $f_\alpha(x)$ 在 $(0, \infty)$ 中属于 L^q , 且

$$\int_0^\infty f_\alpha^q dx \leq K \left(\int_0^\infty f^p dx \right)^{q/p}, \quad (10.17.6)$$

其中

$$K = K(p, \alpha) = K(p, q).$$

設 $g(x)$ 是 $L^{q'}$ 中的任一函数, 又設

$$\lambda = 1 - \alpha = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q'}.$$

由定理 382, 有

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{g(x)f(y)}{|x-y|^\lambda} dx dy \leq K \left(\int_0^\infty f^p dx \right)^{1/p} \left(\int_0^\infty g^{q'} dx \right)^{1/q'}.$$

由是更有

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_\alpha(x) g(x) dx &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty g(x) dx \int_0^x \frac{f(y)}{(x-y)^\lambda} dy \\ &\leq K \left(\int_0^\infty f^p dx \right)^{1/p} \left(\int_0^\infty g^{q'} dx \right)^{1/q'}. \end{aligned}$$

因上式对于所有之 g 皆成立, 故由定理 191, 有

$$\left(\int_0^\infty f_\alpha^q dx \right)^{1/q} \leq K \left(\int_0^\infty f^p dx \right)^{1/p},$$

此即(10.17.6).

这証明指出,当 $f_a(x)$ 是由

$$f_a(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty f(y)(y-x)^{\alpha-1} dy$$

定义时,上之結果也成立.

定理 383 体现“非整次数的积分”理論中的一个結果. Liouville^[1] 和 Riemann^[1, pp. 331-344] 定义 $f(x)$ 的 α 次积分 $f_a(x)$ 为

$$f_a(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(y)(x-y)^{\alpha-1} dy. \quad (10.17.7)$$

下限 a 是“取积分的原点”;改变原点, f_a 即依某种方式改变,这种方式虽然对于这里所討論的这一类型的定理并不重要,但它在形式上并不是粗浅的. 由定理 383 容易推知¹⁾, 若 f 在 (a, b) 中属于 L^p , 其中 $-\infty < a < b \leq \infty$, $\alpha < \frac{1}{p}$, f_a 是 f 的 α 次积分, 其原点为 a , 则 f_a 在 (a, b) 中属于 L^q . 当 $\alpha > \frac{1}{p}$ 时, f_a 为連續, 且一定属于 $\alpha - \frac{1}{p}$ 阶的“Lipschitz 类”.

在运用此理論时, f 通常是周期的. Weyl^[3] 曾指出, 在这种情形, 参考一个原点 a 是不适当的. 因此 Weyl 將此定义修改如下. 若我們假定 f 在一周期上的平均值为 0 (对于这条件, 我們可从 f 減去一适当的常数总可使之滿足), 則

$$\int_{-\infty}^x f(y)(x-y)^{\alpha-1} dy$$

在下限收斂, 于是我們可在 (10.17.7) 中取 $a = -\infty$. 上述关于 Lebesgue 类的定理也可推广到此种情形.

10.18. 另外一个关于將一函数按降序重新排列的定理. 我們用来結束本书的这一定理, 就其在函数論中的应用來說是很重要的, 但我們所給出²⁾的証明本身却自有意义.

这定理可表成两种形式.

384. 設 $f(x)$ 在一有限区間 $(0, a)$ 中为非負且可积, $\bar{f}(x)$ 是

1) 参考 Hardy 和 Littlewood[6].

2) 属于 F. Riesz[10].

$f(x)$ 依降序的重新排列, 又設

$$\Theta(x) = \Theta(x, f) = \max_{0 \leq \xi < x} \frac{1}{x - \xi} \int_{\xi}^x f(t) dt, \quad (10.18.1)$$

$\bar{\Theta}(x)$ 是 $\Theta(x)$ 依降序的重新排列. 則对于 $0 < x \leq a$, 有

$$\bar{\Theta}(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^x \bar{f}(t) dt. \quad (10.18.2)$$

385. 設 $f(x)$ 滿足定理 384 中的条件, 又設 $s(y)$ 是在 $0 \leq y < \infty$ 中定义的任一单增函数, 則

$$\int_0^a s\{\Theta(x)\} dx \leq \int_0^a s\left\{\frac{1}{x} \int_0^x \bar{f}(t) dt\right\} dx. \quad (10.18.3)$$

我們先作两个預备性的說明.

(1) 我們先是証明定理 384, 然后再导出定理 385. 因 $\Theta(x)$ 和 $\bar{\Theta}(x)$ 是等同可測的, 故

$$\int_0^a s\{\Theta(x)\} dx = \int_0^a s\{\bar{\Theta}(x)\} dx.$$

于是由(10.18.2)即得(10.18.3).

至于从(10.18.3)推出(10.18.2), 因而定理的这两种形式是等价的这一点, 并不很明显, 但已經在定理 392 中証明¹⁾. 对于我們这里的目的來說, 前面一个推演(即从(10.18.2)推出(10.18.3))已經够用, 因为在应用时这定理是以第二种形式出現.

(2) 若

$$\Theta_0(x) = \Theta_0(x, f) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt,$$

則由(10.12.2), 有

$$\Theta_0(x, f) \leq \Theta_0(x, \bar{f}) = \Theta(x, \bar{f}) = \frac{1}{x} \int_0^x \bar{f}(t) dt.$$

1) 參看本章末尾的各种定理.

定理 385 是由 Hardy 和 Littlewood 証明的, 他們是从关于有限和的类似定理(定理 394)通过极限手續来推出. 他們关于定理 394 的証明是初等的, 但很长, 一个短得多的証明是由 Gabriel^[17] 发现的. Riesz "en combinant ce qui me paraît être l'idée essentielle de M. Gabriel avec un théorème appartenant aux éléments de l'analyse" (下述引理 A) 可以无需极限手續直接証明这定理.

此外,又有

$$\int_0^a s\{\Theta_0(x)\}dx \leq \int_0^a s\left\{\frac{1}{x}\int_0^x \bar{f}(t)dt\right\}dx. \quad (10.18.4)$$

这一个比之(10.18.3)大为浅易的不等式是定理 333 的积分类似情形.

10.19. 定理 384 的证明. 我們显然可以假定 $a = 1$.

我們来考虑一个使得

$$x_0 > 0, \quad \bar{\Theta}(x_0) > 0$$

的点 x_0 . 令

$$\bar{\Theta}(x_0) = p + \varepsilon \quad (p > 0, \varepsilon > 0), \quad (10.19.1)$$

而来考虑由

$$0 \leq x \leq 1, \quad \Theta(x) > p \quad (10.19.2)$$

定义的集 E . 因 $\Theta(x)$ 和 $\bar{\Theta}(x)$ 是等同可测的, 故 E 与由 $\bar{\Theta}(x) > p$ 所定义之集有同测度. 这集至少与使得 $\bar{\Theta}(x) \geq p + \varepsilon$ 之集同大, 根据(10.19.1), 此最后一个集的测度至少是 x_0 . 因之, 有

$$x_0 \leq mE. \quad (10.19.3)$$

但集 E 乃是由使得

$$\frac{1}{x - \xi} \int_{\xi}^x f(t) dt > p \quad (10.19.4)$$

对于某一 $\xi = \xi(x) < x$ 成立的那种 x 所组成. 我們可将(10.19.4)写成

$$\int_0^x f(t) dt - px > \int_0^{\xi} f(t) dt - p\xi \quad (10.19.5)$$

或

$$g(x) > g(\xi) \quad (\text{設}) \quad (10.19.6)$$

的形式. 于是, 集 E 乃是这样的一个点集, 对于此点集, 有某一連續函数 $g(x)$, 这个函数在 E 中任一点所取的值总比它在前面曾取过的某些值要大. 这一性質使得我們有可能来刻划 E 的结构.

引理 A. 集 E 是由有限个或可列无限个不相遮盖的区間 (α_k, β_k) 所組成. 所有这些区間皆是开的, 而且

$$g(\alpha_k) = g(\beta_k);$$

当 $x = 1$ 是 E 的一个点时可能例外, 在此种情形, 存在一个区间 $(a_k, 1)$, 它在右边是闭的, 而且 $g(a_k) \leq g(1)$, 虽然 $g(a_k)$ 不一定等于 $g(1)$ ¹⁾.

首先, 因 $g(x)$ 为连续, 故 E 是一开集 (对于 $x = 1$ 这一点可能除外). 因之, E 是一组区间 (a_k, β_k) , 若 $\beta_k < 1$, 则为开的.

若 $\beta_k < 1$, 则 β_k 不是 E 的一个点. 由 E 的定义, 有

$$g(a_k) \geq g(\beta_k). \quad (10.19.7)$$

其次, 假定 $a_k < x_1 < \beta_k$, 而来考虑 $g(x)$ 在区间 $0 \leq x \leq x_1$ 中的极小值. 这极小值不可能在 $a_k < x \leq x_1$ 中取到, 因为所有这种 x 皆属于 E , 故对于某一 $\xi < x$ 有 $g(x) > g(\xi)$. 因此它当 $x \leq a_k$ 时取到. 但 a_k 不是 E 中之点, 故对于所有的这些 x , 皆有 $g(a_k) \leq g(x)$. 因之, 此极小值在 a_k 处取到, 故 $g(a_k) \leq g(x_1)$. 令 $x_1 \rightarrow \beta_k$, 我们即得

$$g(a_k) \leq g(\beta_k); \quad (10.19.8)$$

再考虑到 (10.19.7), 这就证明了引理²⁾.

我们现在可以来证明定理 384. 我们可将 (10.19.8) 写成

$$p(\beta_k - a_k) \leq \int_{a_k}^{\beta_k} f(x) dx,$$

由此即得

$$p \cdot mE = p \sum (\beta_k - a_k) \leq \sum \int_{a_k}^{\beta_k} f(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

因之, 由 (10.12.1), 有

$$p \cdot mE \leq \int_E f(x) dx \leq \int_0^{mE} \bar{f}(x) dx; \quad (10.19.9)$$

于是, 由 (10.19.1), 有

$$\bar{\theta}(x_0) - \varepsilon = p \leq \frac{1}{mE} \int_0^{mE} \bar{f}(x) dx. \quad (10.19.10)$$

最后, 因 $\bar{f}(x)$ 为单降, 由 (10.19.10) 和 (10.19.3), 即得

1) 我们所需要的就是 $g(a_k) \leq g(\beta_k)$; 但若我们将此引理弄得完善, 証法也许更清楚一些.

2) 这里所用的証法属于 M. Riesz^[10].

$$\bar{\theta}(x_0) - \varepsilon \leq \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} \bar{f}(x) dx.$$

因 ε 为任意, 由此即得(10.18.1), 不过以 x_0 代 x .

定理 384 和 385 在函数論中的应用如下. 設 $f(\theta)$ 为可积并具有周期 2π , 又設

$$M(\theta) = M(\theta, f) = \max_{0 < |t| \leq \pi} \frac{1}{t} \int_0^t f(\theta + u) du,$$

$N(\theta)$ 是就 $|f(\theta + u)|$ 所做成的类似函数. 这些函数与定理 384 中的 $\theta(x)$ 属同一类型, 不过是就 θ 的这一边或那一边所取的均值来产生的.

現在来考虑积分

$$(i) \quad h(\theta, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta + t) \chi(t, p) dt,$$

其中 χ 是一个核, 它包含一个参数 p , 且满足条件

$$(ii) \quad \chi(t, p) \geq 0, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi(t, p) dt = 1,$$

这种核的标准例子是 “Poisson 核”

$$\chi = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2},$$

其中 $p = r$ 为正且小于 1; 和 “Fejér 核”

$$\chi = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} nt}{n \sin^2 \frac{1}{2} t},$$

其中 $p = n$ 为一正整数. h 的相应值是 $u(r, \theta)$, 即由 $f(\theta)$ 的 “Poisson 积分” 所定义的調和函数, 和 $\sigma_n(\theta)$, 即 $f(\theta)$ 的 Fourier 級数的一阶 Cesàro 平均.

今設 (a) $f(\theta)$ 属于 L^k , 其中 $k > 1$; (b) χ 满足附加条件

$$(iii) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| t \frac{\partial \chi}{\partial t} \right| dt \leq A,$$

其中 A 与 p 无关. 由具有 $s(y) = y^k$ 的定理 385 及 327 即知 $M(\theta)$

也属于 L^{k1} . 由 (i), (ii), (iii) 容易推知,

$$|h(\theta, p)| \leq AM(\theta),$$

其中 A 仍与 p 无关. 因之, h 具有一个属于 L^k 类的(与 p 无关的)控制函数.

容易証明 Poisson 核满足 (iii). 因之, $u(r, \theta)$ 具有一个属于 L^k 类的控制函数 $U(\theta)$. 这对 $\sigma_n(\theta)$ 也成立, 不过在此种情形, 証明远不如此簡單, 因为 Fejér 核并不满足 (iii). 但我們可以証明 $|\sigma_n(\theta)| \leq AN(\theta)$, 因而可得出类似的結論. 所有这些已由 Hardy 和 Littlewood^[8] 詳細作出.

各种定理和各种例

386. 若 $c_2 \geq c_3 \geq \dots \geq c_{2n} \geq 0$, 又設集 $(a), (b)$ 为非負, 且除排法之外已經給定, 則

$$\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n c_{r+s} a_r b_s$$

当 (a) 与 (b) 皆按降序排列时取极大.

[F. Wiener[1].]

387. 下式一般不成立:

$$\sum_{r+s+t=0} a_r b_s c_t \leq \sum_{r+s+t=0} a_r^+ b_s^+ c_t^+.$$

[此乃显而易见: 取 $(a), (b), (c)$ 为 $(0, 2, 1), (1, 2, 0), (1, 2, 1)$, 則有

$$\sum a_r b_s c_t = 14, \quad \sum a_r^+ b_s^+ c_t^+ = 12.]$$

388. 存在集合 $(a), (b), (c)$, 使得八个和数

$$\sum a^+ b^+ c^+, \sum^+ a b^+ c^+, \sum a^{++} b c^+, \dots, \sum^+ a^+ b^+ c$$

中没有一个給出极大和数 $\sum abc$.

[設 $0 < h < 1$, ε 为正且充分小; 又取 (a) 为 $0, 0, 0, 1, 2$, (b) 为 $h - \varepsilon, h, h + \varepsilon, 1, 1$, (c) 由任意五个不相同的元素組成.]

1) 参考下述定理 398.

389. 若

$$M(x) = \sum |r| x_r, \quad M(y) = \sum |s| y_s,$$

$p \neq 0$, 則 § 10.8 中的置換 Ω_p 使 $\mu = M(x) + M(y)$ 下降.

[这定理是显而易見的, 但可用來造出定理 371 的另一証明, 它还是依循 § 10.8 中的証明的一般思路, 但不用求助于“連續性”.

我們仍如 § 10.8 中使用 A, C, C', K ; 現在可能有一个以上的排列 C . 我們定义 L 是 K 中使得 μ 为最小的那种元素所成的子类. 若 $p \neq 0$, 且 A 关于 p 为錯誤的, 則 Ω_p 使 μ 下降而不使 S 减小. 因之, L 中的任何 A 皆为一 C' ; 于是, 我們就可依照 § 10.8 中指出, L 包含一个 C .]

390. 运用定理 373 的記号, 对于每一 n , 有

$$\sum_{r+s+t=n} a_r b_s c_t \leq \sum_{r+s+t=0} a_r^{++} b_s c_t^*.$$

[定理 373 的系.]

391. 若 $(a), (a'), (b), (b'), (c), (c')$ 是六个由服从 (10.5.1) 的正数所成之集, 則

$$\sum_{r+s+t=0} a_r a'_r b_s b'_s c_t c'_t \leq \sum_{r+s+t=0} a_r^* a'_r b_s^* b'_s c_t^* c'_t.$$

[假若先用 § 10.3 中的方法把它化为其中每一数不为 0 即为 1 这一特殊情形, 此則定理 372 的一个系.]

392. 若 f 与 g 为非負, 而且对于任何单增正函数 $s(y)$ 皆有

$$(i) \quad \int_0^a s\{f(x)\} dx \leq \int_0^a s\{g(y)\} dx,$$

則

$$(ii) \quad \bar{f} \leq \bar{g},$$

可能除掉可列多个 x 的值不計.

[这是我們在 § 10.18 中証明定理 384 与 385 等价时所引用的定理. 它是定理 107 的一个类似情形.]

因当 f 和 g 分別代之以 $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$ 时, (i) 中之积分不变, 故可假定 f 和 g 本身为单降, 因而 $f = \bar{f}$, $g = \bar{g}$ (可能除掉可列多个点不計).

若 (ii) 并非对几乎所有的 x 成立, 我們則可求得 b 和 c , 使得

$$(iii) \quad b < c, \quad f(c) > g(b),$$

盖若不然, 則对于所有之 b 有 $f(b+0) \leq g(b)$, 在这些函数的所有連續点, 因而除了一个可列集之外, 有 $f(b) \leq g(b)$.

于是我們假定 b 与 c 滿足 (iii), 我們选取 r 使得

$$g(b) < r < f(c);$$

又定义 $s(y)$ 如

$$s(y) = 0 \quad (y < r), \quad s(y) = 1 \quad (y \geq r),$$

則

$$\int_0^a s\{f(x)\} dx = \int_{f \geq r} dx \geq c > b \geq \int_{g \geq r} dx = \int_0^a s\{g(x)\} dx,$$

而与 (i) 矛盾.]

393. 若 $a_1, a_2, \dots, a_N$ 为非負,

$$\Theta(n) = \Theta(n, a) = \max_{1 \leq p \leq n} \frac{a_p + a_{p+1} + \dots + a_n}{n - p + 1},$$

又設一橫表示依降序的一重新排列 (此記号与 § 10.1 中所用者相反), 則

$$\bar{\Theta}(n) \leq \frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n}{n} \quad (1 \leq n \leq N).$$

394. 若定理 393 中的条件成立, 又設 $s(y)$ 是 y 的一个正的单增函数, 則

$$\sum_1^N s\{\Theta(n)\} \leq \sum_1^N s\left(\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n}{n}\right).$$

[上述二定理乃是定理 384 和 385 关于有限和的类似情形, 讀者若采用 §§ 10.18—19 中的方法来証明它們, 将会发觉是有教益的. Hardy 和 Littlewood 以及 Gabriel 的較早的証明已曾在 § 10.18 中引到.]

395. 若

$$c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_p > 0, \quad d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_q > 0;$$

$e_1, e_2, \dots, e_{p+q}$ 是諸 c 和 d 一起依降序排列的总体;

$$C_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n,$$

D_n 和 E_n 亦同法定义; $s(y)$ 是一正的单增函数; 则

$$s(C_1) + s\left(\frac{C_2}{2}\right) + \cdots + s\left(\frac{C_p}{p}\right) + s(D_1) + s\left(\frac{D_2}{2}\right) + \cdots \\ + s\left(\frac{D_q}{q}\right) \leq s(E_1) + s\left(\frac{E_2}{2}\right) + \cdots + s\left(\frac{E_{p+q}}{p+q}\right).$$

[这是定理 394 的一个特别情形. 关于用归纳法所作的一直接证明(属于 Chaundy), 可参考 Hardy 和 Littlewood[8]. 这定理乃是他们用来作为他们证明定理 394 的基础的引理之一.]

396. 若 p, q, P, Q 皆是正整数, $s(y)$ 为一正的单增函数, 则

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \sum_1^p s\left(\frac{p}{n}\right) + \sum_1^q s\left(\frac{q}{n}\right) \leq \sum_1^{p+q} s\left(\frac{p+q}{n}\right), \\ \text{(ii)} \quad & \sum_{p+1}^{p+P} s\left(\frac{p}{n}\right) + \sum_{q+1}^{q+Q} s\left(\frac{q}{n}\right) \leq \sum_{p+q+1}^{p+q+P+Q} s\left(\frac{p+q}{n}\right), \\ \text{(iii)} \quad & \sum_1^\infty s\left(\frac{p}{n}\right) + \sum_1^\infty s\left(\frac{q}{n}\right) \leq \sum_1^\infty s\left(\frac{p+q}{n}\right). \end{aligned}$$

[(i) 与 (ii) 可由定理 395 通过适当的特殊化而得出, 而 (iii), 它不管 p 与 q 为整数与否皆成立, 乃是一个系. (iii) 的一个特殊情形是

$$\frac{x^{1/a}}{1-x^{1/a}} + \frac{x^{1/b}}{1-x^{1/b}} \leq \frac{x^{1/(a+b)}}{1-x^{1/(a+b)}} \\ (a > 0, b > 0, 0 < x < 1);$$

这当然可以独自来证明 (而且以 ' $<$ ' 代 ' $\leq$ '), 例如运用定理 103.]

397. 若 a, b, α, β 皆为正, $s(y)$ 为正且单增, 则

$$\int_a^{a+a} s\left(\frac{a}{x}\right) dx + \int_b^{b+\beta} s\left(\frac{b}{x}\right) dx \leq \int_{a+b}^{a+b+\alpha+\beta} s\left(\frac{a+b}{x}\right) dx.$$

398. 若 $k > 1$, $\Theta(x)$ 如定理 384 中所定义, 则

$$\int_0^a \Theta^k(x) dx \leq \left(\frac{k}{k-1}\right)^k \int_0^a f^k(x) dx.$$

[由定理 385 和 327, 关于有限和, 当然有一相应的定理. 这定理有一些特别重要的应用.]

399. 欲使一可积函数 $\phi(x)$ 对于所有正的、单增而且有界的 $s(x)$, 皆有性质

$$\int_0^1 s(x)\phi(x)dx \geq 0,$$

則必要且充分的条件是

$$\int_x^1 \phi(t)dt \geq 0 \quad (0 \leq x \leq 1),$$

[欲証条件为必要的, 只須适当选取 $s(x)$ 即可; 欲証其为充分的, 可用部分积分或第二中值定理. 若在 0 与 1 之間有一 ξ 使得当 $x > \xi$ 时, $\phi(x) \geq 0$, 当 $x < \xi$ 时, $\phi(x) \leq 0$, 而且

$$\int_0^1 \phi(x)dx = 0,$$

則条件必然滿足.

定理 397 乃是这定理的一个特殊情形 (經過一簡單变换之后).]

400. 若 E 和 ξ 皆是 x 的函数, 且滿足关系

$$0 \leq dE \leq dx, \quad 0 \leq \xi < x,$$

則

$$\int_0^1 \left\{ \frac{E(x) - E(\xi)}{x - \xi} \right\}^k dx \leq \frac{kE(1) - E^k(1)}{k-1} \quad (k > 1),$$

$$\int_0^1 \frac{E(x) - E(\xi)}{x - \xi} dx \leq E(1) \left\{ 1 + \log \frac{1}{E(1)} \right\}.$$

[設 $f(x)$ 常为 0 或 1, 又設 $E(x)$ 是 $(0, x)$ 中使得 $f(x) = 1$ 的那一部分的測度, 然后运用定理 385.]

401. 若

$$p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1, \lambda = 2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q},$$

$$h < 1 - \frac{1}{p}, k < 1 - \frac{1}{q}, h + k \geq 0,$$

且若 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 則 $h + k > 0$, 則

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x^k y^k |x-y|^{k-h-k}} dx dy \leq K \left(\int_0^\infty f^p dx \right)^{1/p} \left(\int_0^\infty g^q dx \right)^{1/q}.$$

[在这里以及在定理 402 和 403 中, K 表示一个只与定理中的参数 (在这里就是 p, q, h, k) 有关的正数.]

402. 若

$$p > 1, 0 \leq a < \frac{1}{p}, p \leq q \leq \frac{p}{1-ap},$$

则

$$\int_0^\infty x^{-(p-q+pq\alpha)/p} f_a^q dx \leq K \left(\int_0^\infty f^p dx \right)^{q/p},$$

在这里, f_a 如在 (10.17.5) 中所定义, 这结果当 $\alpha \geq \frac{1}{p}$ 时仍成立, 此时加于 q 的第二条件可以省去.

[关于上述二定理可参考 Hardy 和 Littlewood [6]. 若 $q = p$, 则得

$$\int_0^\infty (x^{-a} f_a)^p dx \leq K \int_0^\infty f^p dx;$$

比较定理 329.]

403. 定理 383 中的结果当 $p = 1$ 时不一定成立.

[定义 $f(x)$ 如

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \left(\log \frac{1}{x} \right)^{-\beta} & \left(0 < x \leq \frac{1}{2} \right), \\ 0 & \left(x > \frac{1}{2} \right), \end{cases}$$

其中 $\beta > 1$, 则

$$\begin{aligned} f_a(x) &= K \int_0^x \frac{1}{y} \left(\log \frac{1}{y} \right)^{-\beta} (x-y)^{a-1} dy \\ &> K x^{a-1} \int_0^x \frac{1}{y} \left(\log \frac{1}{y} \right)^{-\beta} dy = K x^{a-1} \left(\log \frac{1}{x} \right)^{1-\beta}. \end{aligned}$$

这里的 $p = 1, q = 1/(1-a)$; f 属于 L , 但 f_a 只当

$$\frac{\beta-1}{1-a} > 1, \quad \beta > 2-a$$

时才属于 L^q .]

404. 設 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 中定义, 且有一連續導數 $f'(x)$, 它只在有限个点为 0, 又設

$$f(x) \geq 0, f(-1) = f(1) = 0,$$

則曲綫 $y=f(x)$ 之長大于曲綫 $y=f^*(x)$ 的長, 除非 $f(x)=f^*(x)$.

[參考 Steiner [1, II, p. 265]. 若 $0 < y < Y = \max f$, 則 (可能除掉有限个 y 值) 方程 $y=f(x)$ 有偶数 $2n$ 个 (与 y 有关) 根. 若我們將这些根依升序排列記作 $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$, 又設 x_ν 关于 y 的導數記作 x'_ν , 則由定理 25, 有

$$2 \int_0^Y \left\{ 1 + \left[\frac{1}{2} \sum (-1)^\nu x'_\nu \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dy \leq \int_0^Y \sum (1 + x'^2)^{\frac{1}{2}} dy.$$

等号只当对于所有之 y 有 $n=1$, 且 $x_1 = -x_2$ 时成立.]

405. 設对于所有之 x, y , $f(x, y) \geq 0$, 又設使得 $f(x, y) \geq z$ 的集的測度 $M(z)$ 对于所有正的 z 皆为有限; 定义 $\rho(z)$ 如

$$M(z) = \pi \rho^2,$$

并令

$$f^*(x, y) = \rho^{-1} \{ \sqrt{x^2 + y^2} \};$$

其中 ρ^{-1} 乃是 ρ 的逆. 則 (在适当的正則条件 (conditions of regularity) 下) 曲面 $z=f(x, y)$ 的面积大于曲面 $z=f^*(x, y)$ 的面积.

[參考 Schwarz[1]. 这定理由于它包含 $f^*(x)$ 这一概念在二維空間的一个推广, 故本身很重要而且有意义.]

附 录 I

关于严格正形式

11.1. 附录 I 的目的是要論述 W. Habicht¹⁾ 关于在 § 2.23 中所說的 Hilbert 与 Artin 定理的一个重要特別情形所給出的初等証明。

“形式”一辞乃是用来作为“一实系数齐次多項式”的簡称。一形式

$$F = F(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

若对于其变数的任何实值 $x_1, x_2, \dots, x_m$, 除 $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ 之外, 皆为正, 則称之为严格正的; 此外, 我們还假定 F 不是一个常数。我們要来証明下述的定理。

406. 任一严格正形式皆可表示成

$$F = \frac{\sum_i M_i^2}{\sum_i N_i^2}, \quad (11.1.1)$$

其中 M_i 与 N_i 乃是适当选取的形式。

我們的証明乃是基于定理 56。在該定理中, “正系数形式”一辞, 虽不明言, 乃是用于下之意义(讀者應該去驗証一下, § 2.24 中的証明就是以这种意义来做的): 若 $G = G(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 是一正系数形式, 其次数为 g , 則

$$G = \sum a x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m},$$

其中对于所有满足条件

$$a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_m \geq 0, a_1 + a_2 + \dots + a_m = g$$

1) “Über die Zerlegung strikte definiter Formen in Quadrate”, *Commentarii Math. Helvetici*, 12 (1940), 317—322.

的整数 $a_1, a_2, \dots, a_m$, 皆有

$$a = a_{a_1 a_2 \dots a_m} > 0.$$

我們从 56 出发, 分三步来証明 406.

11.2. 一个特殊情形. 設形式 $K(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 对于它的各个变数皆为偶函数. 就是說, 設

$$\begin{aligned} K(-x_1, x_2, \dots, x_m) &= K(x_1, -x_2, \dots, x_m) = \dots \\ &= K(x_1, \dots, x_{m-1}, -x_m) = K(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{aligned}$$

因为在此种形式 K 中, 只有这些变数的偶方次出現, 故得

$$K(x_1, x_2, \dots, x_m) = L(x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2), \quad (11.2.1)$$

其中 $L(y_1, y_2, \dots, y_m)$ 是一形式. 若 K 与 L 的次数分别为 k 和 l , 則当然有 $k = 2l$.

今設 $K(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 为严格正的, 則对于 $y \geq 0, \sum y > 0$, 有

$$L(y_1, y_2, \dots, y_m) > 0.$$

因而由定理 56, 有

$$L = \frac{G}{(y_1 + y_2 + \dots + y_m)^p}, \quad (11.2.2)$$

其中 G 为一正系数形式. 因任一正数必是某一正数的平方, 故可将 G 写成

$$G = \sum q^2 y_1^{a_1} y_2^{a_2} \dots y_m^{a_m}, \quad (11.2.3)$$

其中諸 q 皆是正数. 由 (11.2.1), (11.2.2), (11.2.3) 即得

$$K(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{\sum (q x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m})^2}{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2)^p}. \quad (11.2.4)$$

由是, K 即可表成所要的形式 (11.1.1). 事实上, 諸形式 M_i 和 N_i 皆化为单項式¹⁾. 按照 § 11.1 末所作的說明, 与 K 的次数可相容的諸单項式 $q x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}$ 中, 沒有一个为 0.

11.3. 一个中間性的表示. 我們現在来考虑任一严格正形式

1) Pólya[3].

$F(x_1, \dots, x_m)$ 以及由 2^m 个因子做成的积

$$\prod_{y_1=0}^1 \prod_{y_2=0}^1 \cdots \prod_{y_m=0}^1 F((-1)^{y_1}x_1, (-1)^{y_2}x_2, \dots, (-1)^{y_m}x_m) \\ = K(x_1, x_2, \dots, x_m). \quad (11.3.1)$$

形式 $K(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 关于其各变数显然为偶函数, 而且作为一些严格正因子的积, 也是严格正的. 因之, (11.2.4) 适用于 K . 结合 (11.3.1), 我們即有結論: 任与一正严格形式 F , 我們可得一形式 P , 使得乘积 FP 是单項式的平方和:

$$FP = \sum (qx_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m})^2. \quad (11.3.2)$$

我們仍然沒有理由假定 P 是一平方和, 因而我們的目标 (11.1.1) 仍未达到.

11.4. 定理 406 的证明. 仍来考虑严格正形式 F . 設其次数为 $2n$. 我們引进(这是关键性想法)一个額外变数 u , 而来考虑 $m+1$ 个变数的形式

$$u^{2n} + F(x_1, x_2, \dots, x_m);$$

这显然是严格正的. 根据 § 11.3, 我們可求得一形式 $P^*(x_1, x_2, \dots, x_m, u)$, 使得

$$(u^{2n} + F(x_1, \dots, x_m))P^*(x_1, \dots, x_m, u) \\ = \sum (qx_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m} u^a)^2. \quad (11.4.1)$$

我們現在利用“就 $\text{mod } (u^{2n} + F)$ 来約簡”(11.4.1) 的右边来达到我們的目的, 我們現在詳細的來說明这一做法.

我們現来考虑 (11.4.1) 右边的和数中的一般項. 用 $2n$ 除 a , 則有二非負整数 β 和 γ , 使得

$$a = 2n\beta + \gamma \quad (11.4.2)$$

和

$$0 \leq \gamma \leq 2n-1. \quad (11.4.3)$$

于是有

$$u^a = u^{2n\beta+\gamma} = [(u^{2n})^\beta - (-F)^\beta]u^\gamma + (-F)^\beta u^\gamma. \quad (11.4.4)$$

方括号中的式子可以被 $u^{2n} - (-F)$ 除尽. 因之, 由 (11.4.4), 有

$$qx_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m} u^a = (u^{2n} + F)Q + Ru^\gamma, \quad (11.4.5)$$

其中

$$R = R(x_1, \dots, x_m) = qx_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m} (-F)^\beta$$

只与 m 个变数有关, 且不恒等于 0 (形式 $Q = Q(x_1, \dots, x_m, u)$ 可以与 $m+1$ 个变数有关, 而且可以恒等于 0; Q 与 Ru^γ 乃是在将 (11.4.5) 的左边的单项式和 $u^{2n} + F$ 看成是系数与 $x_1, \dots, x_m$ 有关的、 u 的一多项式时, 将后者除前者所得的商式和余式). 将 (11.4.5) 代入 (11.4.1) 的右边, 并将可被 $u^{2n} + F$ 除尽的项移入左边, 则得

$$(u^{2n} + F)P^{**} = \sum_{\gamma=0}^{2n-1} u^{2\gamma} \sum_{\delta} R_{\gamma\delta}^2 \quad (11.4.6)$$

注意 γ 满足 (11.4.3), 并注意, 按照 § 11.1 末的说明和 § 11.2, (11.4.1) 右边的和数中必有某些项, 其 $\alpha = 0$, 因而由 (11.4.2), 其 $\gamma = 0$. 因之, 和数

$$\sum_{\delta} R_{0\delta}^2$$

非空, 且不恒为 0.

由 (11.4.6) 可知, P^{**} 作为 u 的一多项式, 其次数 $\leq 2n-2$. 于是, 我们可将 (11.4.6) 写成

$$(u^{2n} + F) \sum_{\gamma=0}^{2n-2} T_{\gamma}(x_1, \dots, x_m) u^{\gamma} = \sum_{\gamma=0}^{2n-1} u^{2\gamma} \sum_{\delta} R_{\gamma\delta}^2$$

比较 u^0 和 u^{2n} 的系数, 即得

$$FT_0 = \sum_{\delta} R_{0\delta}^2,$$

$$T_0 = \sum_{\delta} R_{n\delta}^2$$

由前一方程可知 T_0 不恒为 0; 于是, 由此二方程即得

$$F = \sum_{\delta} R_{0\delta}^2 / \sum_{\delta} R_{n\delta}^2,$$

此即证明所要的 (11.1.1), 因而证明了定理 406.

这证明实际所产生的比我们所说的要多. 事实上, 我们有

407. 若严格正形式的系数皆为有理数, 则表示式 (11.1.1) 可

以如此选取,使得形式 M_i 和 N_i 的系数也都是有理数.

我們只須加一点修改. 在推导(11.2.3)时,我們曾用了下面一点显然的說明: 任一正数必是某一正数的平方. 我們現在改而运用下面一个同样显然的說明: 任一正有理数乃是正有理数之一平方和. (事实上,若 r 与 s 皆是正整数,則

$$\frac{r}{s} = \frac{rs}{s^2} = \left(\frac{1}{s}\right)^2 + \left(\frac{1}{s}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{s}\right)^2,$$

这是一 rs 項之和数.)

附录 II

Thorin 关于定理 295 的证明及推广¹⁾

12.1. 这既漂亮而又容易了解: 希望避免一切困难的读者, 可以用这一附录去代替 § 8.15. 但这证明主要是依据复变函数论, 而这在我们的正文中是故意避而不用的, 而且 § 8.15 中的证法, 尽管是很难, 而且范围比较有限, 但仍有其重要性和值得注意之处. 推广的定理是

408. 設

$$A = A(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j,$$

$M_{\alpha, \beta}$ 是在条件

$$\sum_{i=1}^m |x_i|^{1/\alpha} \leq 1, \quad \sum_{j=1}^n |y_j|^{1/\beta} \leq 1 \quad (12.1.1)$$

之下 $|A|$ 的极大值, 在这里, 我們规定, 若 $\alpha = 0$ 或 $\beta = 0$ (或两者同时为 0), 則上之不等式即分別代之以 $|x_i| \leq 1$ 和 $|y_j| \leq 1$. 于是 $\log M_{\alpha, \beta}$ 在象限 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 中为凸的.

证明的关键在于下列原則, 它們全都是明显的. (i) 一族(可能是无限个)凸函数的上界²⁾是凸的; (ii) 一收敛的凸函数序列的极限是凸的; (iii) 在求关于一些个相互独立的条件所取的上界时, 我們可以逐次的取上界, 而且不問次序; 例如

$$\max_{(x, y)} f(x, y) = \max_{(x)} \left(\max_{(y)} f(x, y) \right).$$

1) G. O. Thorin, "Convexity theorems generating those of M. Riesz and Hadamard with some applications", *Seminar Math. Lund*, 9 (1948). 著者还証明了更一般的形式.

2) "上界"都指的是"最小上界".

我們需要下之

引理. 設 $\Sigma = \sum a e^{b_i s}$ 为一有限和, 其中 b 为实数, $s = \sigma + it$, σ 与 t 为实数, 又設

$$m(\sigma) = \max_{(t)} |\Sigma|,$$

則 $\log m(\sigma)$ 是 σ 的一凸函数.

$m(\sigma)$ 关于 a, b 是連續的; 因之, 由原則(ii), 只須就所有的 b 皆为有理数的情形来証明引理即可. 此时 Σ 是 $z = e^{s/Q}$ 的一多項式, 其中 Q 是諸 b 的公分母, 而所要的結果則是 Hadamard 的“三圓定理”的一个推論.

[若 $f(z)$ 在环 $r_1 \leq |z| \leq r_2$ 中为正則, $M(r)$ 是 $|f(z)|$ 在 $|z| = r$ 上的极大值, 則 $\log M(r)$ 是 $\log r$ 的一凸函数.

为完备起見, 我們給出它的証明. 取 μ 使

$$r_1^\mu M(r_1) = r_2^\mu M(r_2) = T,$$

則 $z^\mu f(z)$ 在上述环中的每一点为正則, 且有一个在此环中为单值的模. 它在边界上的最大模是 T ; 由是可知 $r^\mu M(r) \leq T$, 因之, 对于 $\log r = t \log r_1 + (1-t) \log r_2$, 我們有

$$\log M(r) \leq t \log M(r_1) + (1-t) \log M(r_2).]$$

現回到定理 408, 由連續性(正如在 § 8.13 中所指出), 我們只須証明 $\log M_{\alpha, \beta}$ 在任何属于开象限 $\alpha > 0, \beta > 0$ 中的直綫段 $\alpha = \alpha_0 + \lambda_1 \sigma, \beta = \beta_0 + \lambda_2 \sigma$ 上关于 σ 为凸即可. 但对于任一內点 (α, β) , 我們可写

$$x_k = \xi_k^\alpha e^{i\phi_k}, y_l = \eta_l^\beta e^{i\psi_l}, \xi, \eta \geq 0,$$

于是, 对于变化着的(实) ϕ, ψ , 以及在条件

$$\sum \xi \leq 1, \quad \sum \eta \leq 1 \quad (12.1.2)$$

(一个与 α, β 无关的条件)之下变化着的非負的 ξ, η , 有

$$M_{\alpha, \beta} = \max_{\phi, \psi, \xi, \eta} \left| \sum \sum a \xi^{\alpha_0 + \lambda_1 \sigma} \eta^{\beta_0 + \lambda_2 \sigma} e^{i(\phi + \psi)} \right|.$$

若在其中以 $s = \sigma + it$ 代 σ , 則对于任一給定的实数 t , 此上界不变 ($\psi + \phi$ 只是“受移动”一下). 現在我們可以加上一关于变化

着的 t 的运算 $\max$; 由原則(iii), 我們可使它成为内部的运算:

$$M_{\alpha, \beta} = \max_{\phi, \psi, \xi, \eta} (\max_{(t)} |\sum \sum a \xi^{\alpha_0 + \lambda_1 t} \eta^{\beta_0 + \lambda_2 t} e^{i(\phi + \psi)}|),$$

現对于固定的 ϕ, ψ, ξ, η , 我們可在 $\sum \sum$ 中把 ξ 或 η 等于 0 的任一項删去 (指数皆为正), 而得一修正了的二重和 $\sum \sum$, 設为 $F_{\xi, \eta, \phi, \psi}$. 于是

$$M_{\alpha, \beta} = \max_{\phi, \psi, \xi, \eta} m_{\phi, \psi, \xi, \eta}(\sigma), \quad m(\sigma) = \max_{(t)} |F(t)|.$$

但 F 是引理中的 Σ , 因而 (对于所有的 σ , 特别是在直綫段上的) 它的 $\log m(\sigma)$ 是凸的. 由原則(i), 族 $\log m(\sigma)$ 的上界也是凸的, 因而我們的証明即告完成.

附 录 III

关于 Hilbert 不等式

13.1. 在 § 4.6 中关于多变函数的极大极小理論的限度作了說明之后,有趣的是,有一些比較出自人工的不等式也可用此方法作簡單的証明. 我們現取 Hilbert 不等式来作例子, 但为簡單起見, 我們取諸 b 恆等于諸 a ¹⁾:

$$\sum_{m,n=0}^N \frac{a_m a_n}{m+n+1} < \pi \sum_0^N a_n^2,$$

除非所有的 a 皆为 0.

我們可假設至少有两个 a 不为 0, 对于除外的情形, 我們的結論是显而易見的. 我們現来考虑

$$F(a) = F(a_0, a_1, \dots, a_N) = \sum_{m,n=0}^N \frac{a_m a_n}{m+n+1},$$

其中的 $a_0, a_1, \dots, a_N$ 滿足关系

$$G(a) = \sum_0^N a_n^2 = t, \quad (13.1.1)$$

这里的 t 是一正常数. 若有任一 a_n 为 0, 則此 a_n 若增加一微小的量 δ , 在 G 中即增加一 δ^2 , 在 F 中即产生一 δ 阶的增量, 因而使得 F/G 增大. 因 F 为連續, 可知在条件(13.1.1)之下, F 对于某一組全不为 0 的 a_n 取其极大值 $F^* = F^*(t)$.

对于此組 a_n , 方程組

$$\frac{\partial F}{\partial a_n} - \lambda \frac{\partial G}{\partial a_n} = 0 \quad (n \leq N)$$

1) J. W. S. Cassels, "An elementary proof of some inequalities", *Journ. L. M. S.*, **23** (1948), 285—290. 对于普遍情形, 以及对于 Hardy 和 Carleman 不等式, 也有类似証明.

对于某一与 n 无关的 λ 成立. 由此即得

$$\sum_{m=0}^N \frac{a_m}{m+n+1} = \lambda a_n \quad (n \leq N), \quad (13.1.2)$$

乘以 a_n 然后相加即得

$$F^*(t) = \lambda t.$$

設 $\left(m + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a_m$ 在 $m = \mu$ 处取其极大值, 則当 $n = \mu$ 时, 由 (13.1.2) 即得

$$\begin{aligned} \lambda a_\mu &= \sum_{m=0}^N \frac{a_m}{m + \mu + 1} \\ &\leq a_\mu \left(\mu + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^N \frac{1}{(m + \mu + 1) \left(m + \frac{1}{2}\right)^{1/2}}. \end{aligned}$$

因 $\left\{(x + \mu + 1) \left(x + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{-1}$ 为严格凸的, 故得

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^N \frac{1}{(m + \mu + 1) \left(m + \frac{1}{2}\right)^{1/2}} \\ &< \int_{-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x + \mu + 1) \left(x + \frac{1}{2}\right)^{1/2}} \\ &= \int_0^{(N+1)^{1/2}} \frac{2dy}{y^2 + \mu + \frac{1}{2}} < \int_0^\infty = \left(\mu + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \pi, \end{aligned}$$

因 $a_\mu \neq 0$, 故得 $\lambda < \pi$.

对于任何非空的集 (a_n) , 我們現有

$$F(a) \leq F^*(G) = \lambda G < \pi G = \pi \sum_0^N a_n^2.$$

参 考 文 献

N. H. Abel

1. Sur les séries, *Oeuvres complètes*, II (2-е изд. Christiania, 1881), 197—201.

E. Artin

1. Ueber die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate, *Abhandl. a. d. math. Seminar Hamburg*, 5 (1927), 100—115.

E. Artin und O. Schreier

1. Algebraische Konstruktion reeller Körper, *Abhandl. a. d. math. Seminar Hamburg*, 5 (1927), 85—99.

G. Aumann

1. Konvexe Funktionen und die Induktion bei Ungleichungen zwischen Mittelwerten, *Münchener Sitzungsber.* 1933, 403—415.

Н. И. Ахмезер

1. *Лекции по теории аппроксимации* (ГТТИ, Москва, 1947)

S. Banach

1. *Opérations lineaires* (Warszawa, 1932).

R. Bellman

1. A note on periodic functions and their derivatives, *Journ. London Math. Soc.* 18 (1943), 140—142.
2. An integral inequality, *Duke Math. Journ.* 10 (1943), 547—550.

J. Bernoulli

1. *Unendliche Reihen* (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 171, Leipzig, 1909).

F. Bernstein

1. Ueber das Gauss'sche Fehlergesetz, *Math. Annalen*, 64 (1907), 417—447.

F. Bernstein und G. Doetsch

1. Zur Theorie der konvexen Funktionen, *Math. Annalen*, 76 (1915), 514—526.

S. Bernstein

1. Sur quelques propriétés extrémales des intégrals successives, *Comptes rendus*, 200 (1935), 1900—1902.

A. S. Besicovitch

1. On mean values of functions of a complex and of a real variable, *Proceedings London Math. Soc.* (2), 27 (1928), 373—388.

Z. W. Birnbaum und W. Orlicz

1. Ueber die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen, *Studia Math.* 3 (1931), 1—67.

W. Blaschke

1. *Kreis und Kugel* (Leipzig, 1916).

G. A. Bliss

1. *Calculus of variations* (Chicago, 1927).
2. The transformation of Clebsch in the calculus of variations, *Proceedings International Math. Congress* (Toronto, 1924), I, 589—603.
3. An integral inequality, *Journ. London Math. Soc.* 5 (1930), 40—46.

H. Blumberg

1. On convex functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 20 (1919), 40—44.

М. Бокер

1. *Введение в высшую алгебру* (Москва, ГТТИ, 1934).

H. Bohr

1. Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen (I), *Acta Math.* 45 (1924), 29—127.
2. Un théorème général sur l'intégration d'un polynome trigonometrique, *Comptes rendus*, 200 (1935), 1276—1277.
3. En Sætning om Fourierrække, *Mat. Tidskrift* (B), 1935, 77—81.
4. Ein allgemeiner Satz über die Integration eines trigonometrischen Polynoms, *Prace mat. fiz.* 43 (1936), 273—288.

O. Bolza

1. *Vorlesungen über Variationsrechnung* (Leipzig, 1909).

L. S. Bosanquet

1. Generalisations of Minkowski's inequality, *Journ. London Math. Soc.* 3 (1928), 51—56.
2. A mean value theorem, *Journ. London Math. Soc.* 16 (1941), 146—148.

Ю. Г. Боссе (Г. Е. Шилов).

1. О неравенствах между производными, *Московский Гос. Университет, Сборник работ научных студенческих кружков*, 1937, 17—27.

W. Briggs and G. H. Bryan

1. *The tutorial algebra* (4-е изд., London, 1928).

T. A. A. Broadbent

1. A proof of Hardy's convergence theorem, *Journ. London Math. Soc.* 3 (1928), 242—243.

J. Bronowski

1. An inequality relating to means, *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 40 (1944), 253—255.

V. Buniakowsky

1. Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies, *Mémoires de l'Acad. de St-Petersbourg* (VII), 1 (1859), No. 9.

T. Carleman

1. Sur les fonctions quasi-analytiques, *Conférences faites au cinquième congrès des mathématiciens scandinaves* (Helsingfors, 1923), 181—196.

F. Carlson

1. Une inégalité, *Arkiv för Mat., Astron. och Fys.* 25 B (1934), Nr. 1.

W. B. Caton

1. A class of inequalities, *Duke Math. Journ.* 6 (1940), 442—461.

A. L. Cauchy

1. *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique*. I^{re} partie. Analyse algébrique (Paris, 1821). [Oeuvres complètes, II^e série, III.]
2. *Exercices de mathématiques*, II (Paris, 1827). [Oeuvres complètes II^e série, VII.]

Y. C. Chow

1. A note on Hardy's inequality and similar inequalities, *Journ. London Math. Soc.* 14 (1939), 88—93.

G. Chrystal

1. *Algebra*, II (2-е изд., London, 1900).

R. Cooper

1. Notes on certain inequalities (I): generalisation of an inequality of W. H. Young, *Journ. London Math. Soc.* 2 (1927), 17—21.
2. Notes on certain inequalities (II), *Journ. London Math. Soc.* 2 (1927), 159—163.
3. The converses of the Cauchy-Hölder inequality and the solutions of the inequality $g(x+y) \leq g(x)+g(y)$, *Proceedings London Math. Soc.* (2), 26 (1927), 415—432.
4. Note on the Cauchy-Hölder inequality, *Journ. London Math. Soc.* 3 (1928), 8—9.

E. T. Copson

1. Note on series of positive terms, *Journ. London Math. Soc.* 2 (1927), 9—12.
2. Note on series of positive terms, *Journ. London Math. Soc.* 3 (1928), 49—51.

J. G. van der Corput

1. Generalisations of Carleman's inequality, *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam* XXXIX (1936), No. 8.
2. Generalisation of an inequality of Knopp, *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam* XXXIX (1936), No. 9.

G. E. Crawford

1. Elementary proof that the arithmetic mean of any number of positive quantities is greater than the geometric mean, *Proceedings Edinburgh Math. Soc.* 18 (1900), 2—4.

G. Darboux

1. Sur la composition des forces en statique, *Bull. des sciences math.* 9 (1875), 281—288.

L. L. Dienes

1. A theorem on orthogonal functions with an application to integral inequalities, *Trans. Amer. Math. Soc.* 30 (1928), 425—438.

A. L. Dixon

1. A proof of Hadamard's theorem as to the maximum value of the modulus of a determinant, *Quart. Journ. of Math.* (2), 3 (1932), 224—225.

J. Dougall

1. Quantitative proofs of certain algebraic inequalities, *Proceedings Edinburgh Math. Soc.* 24 (1906), 61—77.

J. M. C. Duhamel et A. A. L. Reynaud

1. *Problèmes et développemens sur diverses parties des mathématiques* (Paris, 1823).

E. B. Elliott

1. A simple exposition of some recently proved facts as to convergency, *Journ. London Math. Soc.* 1 (1926), 93—96.
2. A further note on sums of positive terms, *Journ. London Math. Soc.* 4 (1929), 21—23.

Euclid

1. *The thirteen books of Euclid's Elements* (translated by Sir Thomas Heath, Cambridge, 1908).

J. Favard

1. Application de la formule sommatoire d'Euler à la démonstration de quelques propriétés extrémales des intégrals des fonctions périodiques, *Mat. Tidskrift* (B), 1936, 81—94.
2. Sur une propriété extrême de l'intégral d'une fonction périodique, *Comptes rendus*, 202 (1936), 273.

L. Fejér

1. Ueber gewisse Minimumprobleme der Funktionentheorie, *Math. Annalen*, 97 (1927), 104—123.

L. Fejér und F. Riesz

1. Ueber einige funktionentheoretische Ungleichungen, *Math. Zeitschr* 11 (1921), 305—314.

B. de Finetti

1. Sul concetto di media, *Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari* 2 (1931), 369—396.

E. Fischer

1. Ueber den Hadamardschen Determinantensatz, *Archiv der Math. u. Physik* (3), 13 (1908), 32—40.

E. C. Francis and J. E. Littlewood

1. *Examples in infinite series with solutions* (Cambridge, 1928).

F. Franklin

1. Proof of a theorem of Tschebyscheff's on definite integrals, *American Journ. of Math.* 7 (1885), 377—379.

M. Fréchet

1. Pri la funkcio $f(x+y)=f(x)+f(y)$, *L'enseignement math.* 15 (1913), 390—393.

2. A propos d'un article sur l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$, *L'enseignement math.* 16 (1914), 136.

G. Frobenius

1. Ueber Matrizen aus positiven Elementen (II), *Berliner Sitzungsber.*, 1909, 514—518.

R. M. Gabriel

1. An additional proof of a theorem upon rearrangements, *Journ. London Math. Soc.* 3 (1928), 134—136.
2. An additional proof of a maximal theorem of Hardy and Littlewood, *Journ. London Math. Soc.* 6 (1931), 163—166.
3. The rearrangement of positive Fourier coefficients, *Proceedings London Math. Soc.* (2), 33 (1932), 32—51.
4. An extension of an inequality due to Carlson, *Journ. London Math. Soc.* 12 (1937), 130—132.

C. F. Gauss

1. *Werke* (Göttingen, 1863—1929).

В. И. Гливенко

1. *Интеграл Стильбеса* (Москва, ОНТИ, 1936).

J. A. Gmeiner und O. Stolz

1. *Theoretische Arithmetik*, II Abteilung (Leipzig, 1902).

St. Golab

1. Aufgabe 151, *Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung*, 43 (1933), 1.

Г. М. Голузин

1. Оценки для аналитических функций с ограниченным средним модулем, *Труды Мат. Института им. В. А. Стеклова*, XVIII (1946).

В. Л. Гончаров

1. *Теория интерполирования и приближения функций* (Москва—Ленинград, 1934).

A. Gorny

1. Contribution a l'étude des fonctions dérivable d'une variable réelle, *Acta Math.* 71 (1939), 317—358.

J. P. Gram

1. Ueber die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen, mittelst der Methode der kleinsten Quadrate, *Journal f. Math.* 94 (1881), 41—73.

K. Grandjot

1. On some identities relating to Hardy's convergence theorem, *Journ. London Math. Soc.* 3 (1928), 114—117.

Grebe

1. Ueber die Vergleichung zwischen dem arithmetischen, dem geometrischen und dem harmonischen Mittel, *Zeitschr. f. Math. u. Physik* 3 (1858), 297—298.

A. Haar

1. Ueber lineare Ungleichungen, *Acta Litt. ac Scient. Univ. Hung.* 2 (1924), 1—14.

J. Hadamard

1. Résolution d'une question relative aux déterminants, *Bull. des sciences math.* (2), 17 (1893), 240—248.

H. Hahn

1. *Theorie der reellen Funktionen*, I (Berlin, 1921).

G. Hamel

1. Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y)=f(x)+f(y)$, *Math. Annalen*, 60 (1905), 459—462.

G. H. Hardy

1. *A course of pure mathematics* (6-е изд., Cambridge, 1928) ¹⁾.
2. Note on a theorem of Hilbert, *Math. Zeitschr.* 6 (1920), 314—317.
3. Note on a theorem of Hilbert concerning series of positive terms, *Proceedings London Math. Soc.* (2), 23 (1925), Records of Proc. xlv-xlvi.
4. Notes on some points in the integral calculus (LX), *Messenger of Math.* 54 (1925), 150—156.
5. Notes on some points in the integral calculus (LXIV), *Messenger of Math.* 57 (1928), 12—16.
6. Remarks on three recent notes in the Journal, *Journ. London Math. Soc.* 3 (1928), 166—169.
7. Notes on some points in the integral calculus (LXVIII), *Messenger of Math.* 58 (1929), 115—120.
8. Prolegomena to a chapter on inequalities, *Journ. London Math. Soc.* 4 (1929), 61—78 и 5 (1930), 80.
9. Remarks in addition to Dr Widder's note on inequalities, *Journ. London Math. Soc.*, 4 (1929), 199—202.
10. The constants of certain inequalities, *Journ. London Math. Soc.* 8 (1933), 114—119.
11. A note on two inequalities, *Journ. London Math. Soc.* 11 (1936), 167—170.
12. An inequality for Hausdorff means, *Journ. London Math. Soc.* 18 (1943), 46—50.

G. H. Hardy and J. E. Littlewood

1. Elementary theorems concerning power series with positive coefficients and moment constants of positive functions, *Journal f. Math.* 157 (1927), 141—158.
2. Some new properties of Fourier constants, *Math. Annalen* 97 (1927), 159—209 (199).
3. Notes on the theory of series (VI): two inequalities, *Journ. London Math.*

¹⁾ Готовится русский перевод: Г. Харди. *Курс чистой математики*.

Soc. 2 (1927), 196—201.

4. Notes on the theory of series (VIII): an inequality, *Journ. London Math. Soc.* 3 (1928), 105—110.
5. Notes on the theory of series (X): some more inequalities, *Journ. London Math. Soc.* 3 (1928), 294—299.
6. Some properties of fractional integrals (I), *Math. Zeitschr.* 27 (1928), 565—606.
7. Notes on the theory of series (XII): on certain inequalities connected with the calculus of variations, *Journ. London Math. Soc.* 5 (1930), 283—290.
8. A maximal theorem with function-theoretic applications, *Acta Math.* 54 (1930), 81—116.
9. Notes on the theory of series (XIII): some new properties of Fourier constants, *Journ. London Math. Soc.* 6 (1931), 3—9.
10. Some integral inequalities connected with the calculus of variations, *Quart. Journ. of Math.* (2), 3 (1932), 241—252.
11. Some new cases of Parseval's theorem, *Math. Zeitschr.* 84 (1932), 620—633.
12. Some more integral inequalities, *Tôhoku Math. Journ.* 37 (1933), 151—159.
13. Bilinear forms bounded in space $[p, q]$, *Quart. Journ. of Math.* (2), 5 (1934), 241—254.

G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya

1. The maximum of a certain bilinear form, *Proceedings London Math. Soc.* (2), 25 (1926), 265—282.
2. Some simple inequalities satisfied by convex functions, *Messenger of Math.* 58 (1929), 145—152.

G. H. Hardy and M. Riesz

1. *The general theory of Dirichlet's series* (Cambridge, 1915).

F. Hausdorff

1. Summationsmethoden und Momentfolgen (I), *Math. Zeitschr.* 9 (1921), 74—109.
2. Eine Ausdehnung des Parsevalschen Satzes über Fourierreihen, *Math. Zeitschr.* 16 (1923), 163—169.

E. Hellinger und O. Toeplitz

1. Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen, *Math. Annalen*, 69 (1910), 289—330.

C. Hermite

1. *Cours de la Faculté des Sciences de Paris* (4-е литографир. изд., Paris, 1888) 1).

¹⁾ Имеется русский перевод: Ш. Эрмит. Курс анализа (Москва—Ленинград, 1936).

D. Hilbert

1. Ueber die Darstellung definitiver Formen als Summe von Formenquadraten, *Math. Annalen* 32 (1888), 342—350. [*Werke*, II, 154—161.]
2. Ueber ternäre definite Formen, *Acta Math.* 17 (1893), 169—197. [*Werke*, II, 345—366.]

E. W. Hobson

1. *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier series*, I, II (2-е изд., Cambridge, 1921, 1926).

O. Hölder

1. Ueber einen Mittelwertsatz, *Göttinger Nachrichten*, 1889, 38—47.

A. Hurwitz

1. Ueber den Vergleich des arithmetischen und des geometrischen Mittels, *Journal f. Math.* 108 (1891), 266—268. [*Werke*, II, 505—507.]
2. Sur le problème des isopérimètres, *Comptes rendus*, 132 (1901), 401—403. [*Werke*, I, 490—491.]

A. E. Ingham

1. A note on Hilbert's inequality, *Journ. London Math. Soc.* 11 (1936), 237—240.

J. L. W. V. Jensen

1. Sur une généralisation d'une formule de Tchebycheff, *Bull. des sciences math.* (2), 12 (1888), 134—135.
2. Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, *Acta Math.* 30 (1906), 175—193.

B. Jessen

1. Om Uligheder imellem Potensmiddelvaerdier, *Mat. Tidsskrift*, B (1931), No. 1.
2. Bemærkninger om konvekse Funktioner og Uligheder imellem Mittelvaerdier (I), *Mat. Tidsskrift*, B (1931), No. 2.
3. Bemærkninger om konvekse Funktioner og Uligheder imellem Mittelvaerdier (II), *Mat. Tidsskrift*, B (1931), No. 3—4.
4. Ueber die Verallgemeinerung des arithmetischen Mittels, *Acta Litt. ac Scient. Hung.* 5 (1931), 108—116.

A. E. Jolliffe

1. An identity connected with a polynomial algebraic equation, *Journ. London Math. Soc.* 8 (1933), 82—85.

Th. Kaluza und G. Szegő

1. Ueber Reihen mit lauter positiven Gliedern, *Journ. London Math. Soc.* 7 (1932), 208—214.

J. Karamata

1. Sur une inégalité relative aux fonction convexes, *Publ. math. Univ. Belgrade*, 1 (1932), 145—148.
2. Beziehungen zwischen den Oszillationsgrenzen einer Funktion und ihrem arithmetischen Mittel, *Proc. London Math. Soc.* (2) 43 (1937), 20—25.

K. Knopp

1. Ueber Reihen mit positiven Gliedern, *Journ. London Math. Soc.* **3** (1928), 205—211.
2. Neuere Sätze über Reihen mit positiven Gliedern, *Math. Zeitschr.* **30** (1929), 387—413.
3. Ueber Reihen mit positiven Gliedern (2te Mitteilung), *Journ. London Math. Soc.* **5** (1930), 13—21.

A. Н. Колмогоров**A. Kolmogoroff**

1. Sur notion de la moyenne, *Rend. Accad. dei Lincei* (6), **12** (1930), 388—391.
2. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале, *Ученые Записки МГУ*, **30**, *Математика* (1939), 3—16.

N. Kritikos

1. Sur une extension de l'inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique, *Bull. soc. math. Grèce* **9** (1928), 43—46.

E. Landau

1. Ueber einen Konvergenzsatz, *Göttinger Nachrichten* 1907, 25—27.
2. Einige Ungleichungen für zweimal differentiierbare Funktionen, *Proceedings London Math. Soc.* (2), **13** (1913), 43—49.
3. Die Ungleichungen für zweimal differentiierbare Funktionen, *Meddelelser København*, **6** (1925), Nr. 10.
4. A note on a theorem concerning series of positive terms, *Journ. London Math. Soc.* **1** (1926), 38—39.

М. Лаврентьев и Л. Люстерник

1. *Основы вариационного исчисления т. I, часть II* (ОНТИ НКТП, Москва—Ленинград, 1935).
2. *Курс вариационного исчисления* (Москва—Ленинград, 1934).

H. Lebesgue

1. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (2-е изд., Paris, 1928).¹⁾

В. И. Левин**V. Levin**

1. О неравенствах. I. Некоторые неравенства между рядами, *Матем. сборник*, **3** (45) (1938), 341—345.
2. О неравенствах. III. Неравенства, выполняемые геометрическим средним неотрицательной функции, *Матем. сборник*, **4** (46), (1938), 325—331.
3. Two remarks on Van der Corput's generalization of Knopp's inequality *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, XL (1937).

¹⁾ Имеется русский перевод. А. Лебег, *Интегрирование и отыскание примитивных функций* (Москва—Ленинград, 1934).

No. 5.

4. On the two-parameter extension and analogue of Hilbert's inequality, *Journ. London Math. Soc.* **11** (1936), 119—124, 320.
5. О неравенствах. IV. К неравенству Гильберта—Рисса, *Известия АН СССР, ОМОН*, 1938, 525—542.
6. О неравенствах. II. Об одном классе интегральных неравенств, *Матем. сборник*, **4** (46) (1938), 309—324.
7. On some integral inequalities involving periodic functions, *Journ. London Math. Soc.* **10** (1935), 45—48.
8. Точные константы в неравенствах типа Карлсона, *ДАН СССР*, **LIX** (1948), 635—639.

5. Lhuillier

1. *Polygonométrie, ou de la mesure des figures rectilignes. Et abrégé d'isopérimétrie élémentaire* (Genève et Paris, 1789).

A. Liapounoff

1. Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité, *Mémoires de l'Acad. de St-Petersbourg* (VIII), **12** (1901), No. 5.

J. Liouville

1. Sur le calcul des différentielles à indices quelconques, *Journal de l'École Polytechnique*, **13** (1832), 1—69.

J. E. Littlewood

1. Note on the convergence of series of positive terms, *Messenger of Math.* **39** (1910), 191—192.
2. On bounded bilinear forms in an infinite number of variables, *Quart. Journ. of Math.* (2), **2** (1930), 164—174.

G. Loche

1. Lösung der Aufgabe 151, *Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereini-gung*, **44** (1934), 1—20.

C. Maclaurin

1. *A treatise of fluxions* (Edinburgh, 1742).
2. A second letter to Martin Folkes, Esq.; concerning the roots of equations, with the demonstration of other rules in algebra, *Phil. Transactions*, **36** (1729), 59—96.

S. Mandelbrojt

1. Sur les fonctions convexes, *Comptes rendus*, **209** (1939), 977—978.

E. Meissner

1. Ueber positive Darstellung von Polynomen, *Math. Annalen* **70** (1911), 223—235.

E. A. Milne

1. Note on Rosseland's integral for the stellar absorption coefficient, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **85** (1925), 979—984.

H. Minkowski

1. *Geometrie der Zahlen*, I (Leipzig, 1896).

2. Discontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz, *Journal f. Math.* 129 (1905), 220—274.

P. Montel

1. Sur les fonctions convexes et les fonctions soubharmoniques, *Journal de math.* (9), 7 (1928), 29—60.

T. Muir

1. Solution of the question 14792 [*Educational Times*, 54 (1901), 83], *Math. from Educ. Times* (2), 1 (1902), 52—53.

R. E. Muirhead

1. Inequalities relating to some algebraic means, *Proceedings Edinburgh Math. Soc.* 19 (1901), 36—45.
2. Some methods applicable to identities and inequalities of symmetric algebraic functions of n letters, *Proceedings Edinburgh Math. Soc.* 21 (1903), 144—157.
3. Proofs that the arithmetic mean is greater than the geometric mean, *Math. Gazette*, 2 (1904), 283—287.
4. Proofs of an inequality, *Proceedings Edinburgh Math. Soc.* 24 (1906), 45—50.

H. P. Mulholland

1. Note on Hilbert's double series theorem, *Journ. London Math. Soc.* 3 (1928), 197—199.
2. Some theorems on Dirichlet series with positive coefficients and related integrals, *Proceedings London Math. Soc.* (2), 29 (1929), 281—292.
3. A further generalisation of Hilbert's double series theorem, *Journ. London Math. Soc.* 6 (1931), 100—106.
4. On the generalisation of Hardy's inequality, *Journ. London Math. Soc.* 7 (1932), 208—214.

M. Nagumo

1. Ueber eine Klasse der Mittelwerte, *Jap. Journ. of Math.* 7 (1930), 71—79.

B. Nagy

1. Über Carlsonsche und verwandte Ungleichungen, *Mat. Fiz. Lapok*, 48 (1941), 162—175.
2. Über Integralungleichung zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung, *Acta Univ. Szeged, Sect. Sci. Math.* 10 (1941), 64—74.

E. J. Nanson

1. An inequality, *Messenger of Math.* 33 (1904), 89—90.

I. Newton

1. *Arithmetica universalis: sive de compositione et resolutione arithmetica liber* [Opera, I.]

D. G. Northcott

1. Some inequalities between periodic functions and their derivatives, *Journ. London Math. Soc.* 14 (1939), 198—202.

A. Oppenheim

1. Note on Mr Cooper's generalisation of Young's inequality, *Journ. London Math. Soc.* 2 (1927), 21—23.
2. Inequalities connected with definite hermitian forms, *Journ. London Math. Soc.* 5 (1930), 114—119.

A. Ostrowski

1. Zur Theorie der konvexen Funktionen, *Comm. Math. Helvetici*, 1 (1929), 157—159.
2. Ueber quasi-analytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwicklungen, *Acta Math.* 53 (1929), 181—266.

P. M. Owen

1. A generalisation of Hilbert's double series theorem, *Journ. London Math. Soc.* 5 (1930), 270—272.

R. E. A. C. Paley

1. A proof of a theorem on averages, *Proceedings London Math. Soc.* (2), 31 (1930), 289—300.
2. A proof of a theorem on bilinear forms, *Journ. London Math. Soc.* 6 (1931), 226—230.
3. Some theorems on orthogonal functions, *Studia Math.* 3 (1931), 226—238.
4. A note on bilinear forms, *Bull. Amer. Math. Soc.* (2), 39 (1933), 259—260.

H. Poincare

1. Sur les équations algébriques, *Comptes rendus*, 97 (1888), 1418—1419.

S. Pollard

1. The Stieltjes integral and its generalisations, *Quart. Journ. of Math.* 49 (1923), 73—138.

G. Pólya

1. On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation, *Trans. Amer. Math. Soc.* 24 (1922), 312—324.
2. Proof of an inequality, *Proceedings London Math. Soc.* (2), 24 (1926). Records of Proc. lvii.
3. Ueber positive Darstellung von Polynomen, *Vierteljahrsschrift d. naturforschenden Gesellsch. Zürich* 73 (1928), 141—145.
4. Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, *Math. Zeitschr.* 29 (1929), 549—640.

Г. Поля и Г. Сеге.

1. Задачи и теоремы из анализа. I. II. (Москва—Ленинград, 1937, 1938).

T. Popoviciu

1. Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur. III. *Mathematica, Cluj*, 16 (1940), 74—86.

И. И. Привалов

1. Субгармонические функции (ОНТИ НКТП, Москва—Ленинград, 1937).

A. Pringsheim

1. Zur Theorie der ganzen transzendenten Funktionen (Nachtrag), *Münchener Sitzungsber.* 32 (1902), 295—304.

J. Radon

1. Ueber die absolut additiven Mengenfunktionen, *Wiener Sitzungsber.* (IIa), 122 (1913), 1295—1438.
2. Lösung der Aufgabe 151, *Jahresbericht der Deutschen Mathematikerverei- nigung*, 44 (1934), 20—22.

B. Riemann

1. *Gesammelte math. Werke* (Leipzig, 1876).¹⁾

F. Riesz

1. *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* (Paris, 1913).
2. Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, *Math. Annalen*, 69 (1910), 449—497.
3. Ueber die Randwerte einer analytischen Funktion, *Math. Zeitschr.* 18 (1923), 87—95.
4. Ueber eine Verallgemeinerung der Parsevalschen Formel, *Math. Zeitschr.* 18 (1923), 117—124.
5. Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel, *Acta Math.* 48 (1926), 329—343.
6. Su alcune disuguaglianze, *Boll dell' Unione Math. Italiana*, Anno. 7 (1928), No. 2.
7. Sur les valeurs moyenne des fonctions, *Journ. London Math. Soc.* 5 (1930), 120—121.
8. Sur une inégalité intégrale, *Journ. London Math. Soc.* 5 (1930), 162—168.
9. Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel (seconde partie), *Acta Math.* 54 (1930), 162—168.
10. Sur un théorème de maximum de MM. Hardy et Littlewood, *Journ. London Math. Soc.* 7 (1932), 10—13.

M. Riesz

1. Sur les maxima des forms bilinéaires et sur les fonctionelles linéaires, *Acta Math.* 49 (1927), 465—497.
2. Sur les fonctions conjuguées, *Math. Zeitschr.* 27 (1928), 218—244.

A. Родов

1. Зависимости между верхними гранями производных функции действительного переменного, *Изв. АН СССР, Сер. Мат.* 10 (1946), 257—270.

L. J. Rogers

1. An extension of a certain theorem in inequalities, *Messenger of Math.* 17 (1888), 145—150.

S. Saks

1. Sur un théorème de M. Montel, *Comptes rendus*, 187 (1928), 276—277.

O. Schlömilch

¹⁾ Готовится русский перевод.

1. Ueber Mittelgrößen verschiedener Ordnungen, *Zeitschr. f. Math. u. Physik*, **3** (1858), 301—308.

E. Schmidt

1. Über die Ungleichung, welche die Integrale über eine Potenz einer Funktion und über eine andere Potenz ihrer Ableitung verbindet, *Math. Annalen*, **117** (1940), 301—326.

I. Schur

1. Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen, *Journal f. Math.* **140** (1911), 1—28.
2. Ueber eine Klasse von Mittelbildungen mit Anwendungen auf die Determinantentheorie, *Sitzungsber. d. Berl. Math. Gesellsch.* **22** (1923), 9—20.

H. A. Schwarz

1. Beweis des Satzes dass die Kugel kleinere Oberfläche besitzt, als jeder andere Körper gleichen Volumens, *Göttinger Nachrichten*, 1884, 1—13. [*Werke*, II, 327—340.]
2. Ueber ein Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung, *Acta soc. scient. Fenn.* **15** (1885), 315—362. [*Werke*, I, 224—269.]

W. Sierpinski

1. Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$, *Fundamenta Math.* **1** (1920), 116—122.
2. Sur les fonctions convexes mesurable, *Fundamenta Math.* **1** (1920), 125—129.

H. Simon

1. Ueber einige Ungleichungen, *Zeitschr. f. Math. u. Physik*, **33** (1888), 56—61.

Ch. Smith

1. *A treatise on algebra* (London, 1888).

J. F. Steffensen

1. Et Bevis for Sætningen om, at det geometriske Middeltal at positive Størrelser ikke større end det aritmetiske, *Mat. Tidsskrift A* (1930), 115—116.
2. The geometrical mean, *Journ. of the Institute of Actuaries*, **62** (1931), 117—118.

J. Steiner

1. *Gesammelte Werke* (Berlin, 1881—2).

E. Stiemke

1. Ueber positive Lösungen homogener linearer Gleichungen, *Math. Annalen*, **76** (1915), 340—342.

R. Sturm

1. *Maxima und Minima in der elementaren Geometrie* (Leipzig, 1910).

E. C. Titchmarsh

1. *The theory of functions* (Oxford, 1932).

2. Reciprocal formulae involving series and integrals, *Math. Zeitschr.* 25 (1926), 321—341.

3. An inequality in the theory of series; *Journ. London Math. Soc.* 3 (1928), 81—83.

O. Toeplitz

1. Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen, *Göttinger Nachrichten*, 1910, 489—506.

G. Valiron

1. *Lectures on the general theory of integral functions* (Toulouse, 1923).

Ш. -Ж. де ла Валле-Пуссен Ch.-J de la Vallée Poussin

1. *Курс анализа бесконечно малых*, 1 (ГТТИ Москва и Ленинград, 1933).

2. *Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire* (Paris, 1916).

J. H. MacLagan Wedderburn

1. The absolute value of the product of two matrices, *Bull. Amer. Math. Soc.* 31 (1925), 304—308.

H. Weyl

1. *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (2-е изд., Leipzig, 1931).

2. *Singuläre Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtigung des Fourierschen Integraltheorems*, Inaugural-Dissertation (Göttingen 1908).

3. Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung, *Vierteljahresschrift d. naturforschenden Gesellsch. Zurich*, 62 (1917), 296—302.

D. V. Widder

1. An inequality related to one of Hilbert's, *Journ. London Math. Soc.* 4 (1929), 194—198.

F. Wiener

1. Elementarer Beweis eines Reihensatzes von Herrn Hilbert, *Math. Annalen*, 68 (1910), 361—366.

W. H. Young

1. On a class of parametric integrals and their application to the theory of Fourier series, *Proceedings Royal Soc. (A)* 85 (1911), 401—414.

2. On classes of summable functions and their Fourier series, *Proceedings Royal Soc. (A)* 87 (1912), 225—229.

3. On the multiplication of successions of Fourier constants, *Proceedings Royal Soc. (A)* 87 (1912), 331—339.

4. Sur la généralisation du théorème de Parseval, *Comptes Rendus*, 155 (1912), 30—33.

5. On a certain series of Fourier, *Proceedings London Math. Soc. (2)*, 11 (1913), 357—366.

6. On the determination of the summability of a function by means of its Fourier constants, *Proceedings London Math. Soc. (2)*, 12 (1913), 71—88.

7. On integration with respect to a function of bounded variation, *Proceedings London Math. Soc.* (2), 13 (1914), 109—150.
8. On Fourier series and functions of bounded variation, *Proc. Royal Soc. (A)*, 88 (1913), 561—568.

A. Zygmund

А. Зигмунд

1. On an integral inequality, *Journ. London Math. Soc.* 8 (1933), 175—178.
2. *Тригонометрические ряды* (Москва—Ленинград, 1939).

封面	页
书名	页
版权	页
前言	
目录	
正文	