

用消点法解2019年IMO第6题

原创：金磊几何 金磊讲几何构型 5天前

编者按：近日作者一直忙着上课备课，看到IMO几何题又技痒难忍，不过只能抽上课间隙思考和写解答。上一篇第二题解答就是在高铁上草草写成的。第六题很难，我断断续续抽空思考探究出了一些结果，尝试了几个思路都没有通过。又不愿意看别人的解答，今天又持续坚持到底，终于水落石出，本文记录本人都此题的探究过程，供读者参考。

2019年IMO（国际数学奥林匹克）于今天7月23日落下帷幕，中国队和美国队并列总分第一，韩国落后一分屈居第三。今年中国队员的发挥都非常出色，都获得了金牌。特别是第六题，队员得分情况也比较好，终于险险夺得了冠军。实在可喜可贺。

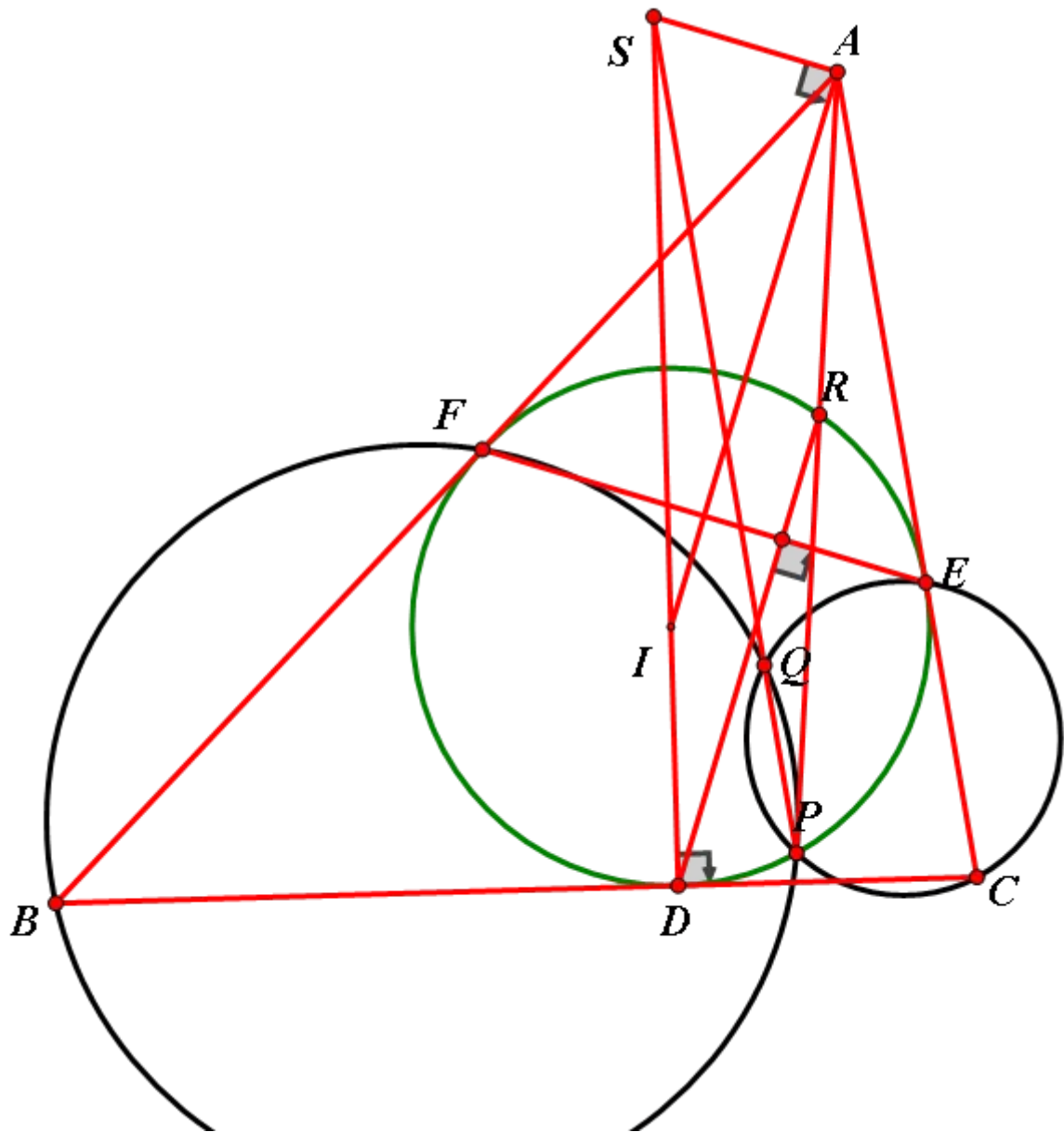


第六题为：

在锐角三角形 ABC 中， I 是内心， $AB \neq AC$ ， $\triangle ABC$ 内切圆 I 与 BC ， CA 和 AB 分别相切于 D ， E 和 F 。过点 D 且垂直于 EF 的直线与 I 的另一个交点为 R ，直线 AR 与 I 的另一个交点为 P 。 $\triangle PCE$ 与 $\triangle PBF$ 的外接圆的交于另一点 Q 。

证明：直线 DI 和 PQ 的交点在过 A 且垂直于 AI 的直线上。

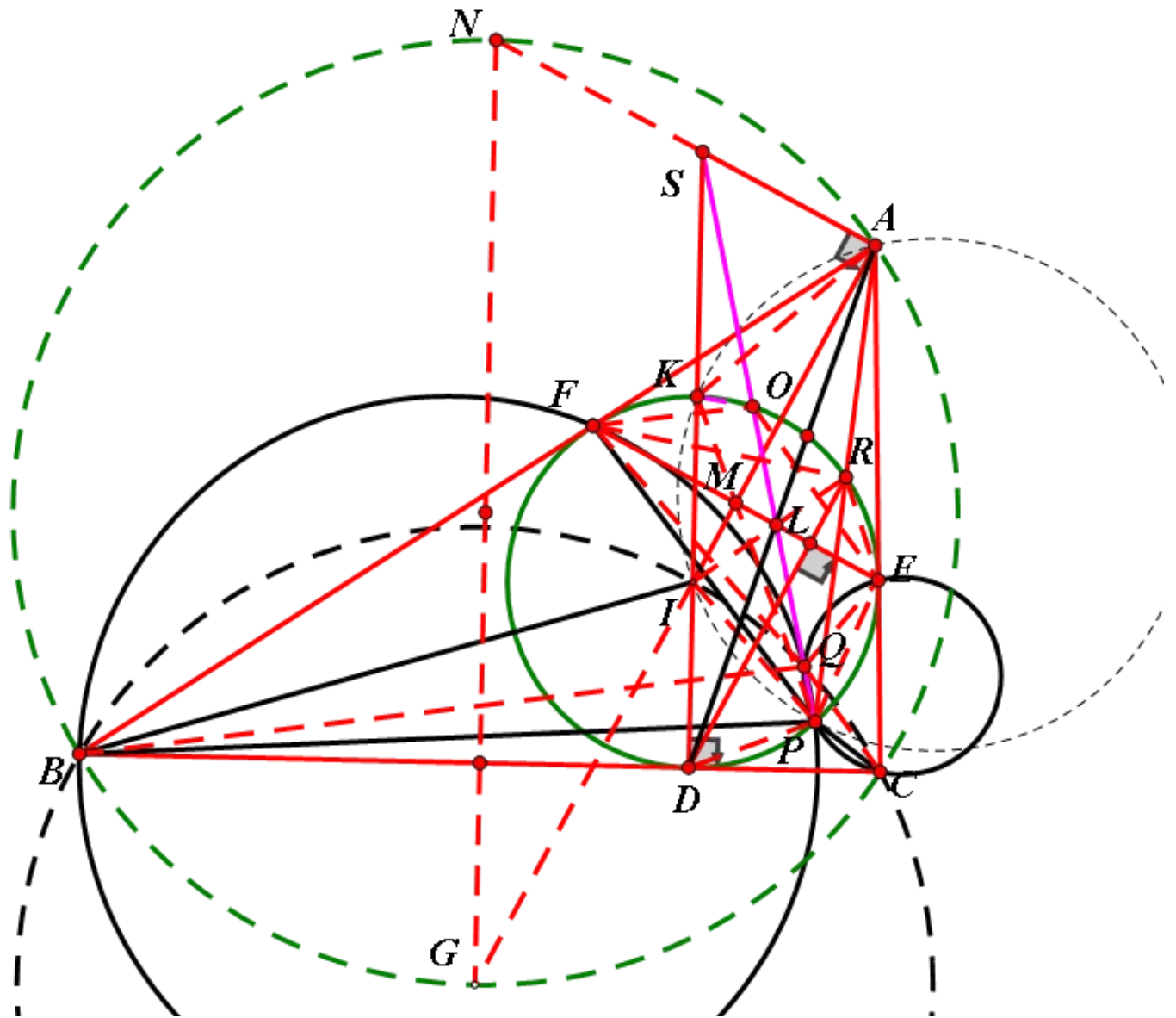
首先根据题意画出准确图形如下：



思路分析：

此题中DI上满足 $SA \perp AD$ 的点S很好描述，
 相当于要证明S在两圆根轴上。或者PQS共线。
 本题难点在于如何描述PQ，因为两个圆看起来
 都很难刻画，根轴就更不好描述了。
 但是现在又必须确定PQ，只能先挖掘图形的基本性质，
 走一步看一步了。

按生成顺序，先确定P的性质，设DI交圆I于K，
 显然 $DR \parallel AI$ ，故 $\angle KIA = \angle KDR = \angle KPA$ ，
 故A, K, I, P共圆。
 又 $IK = IP$ ，则 $\angle KAI = \angle PAI$ ，
 这样点P算是可以确定了。

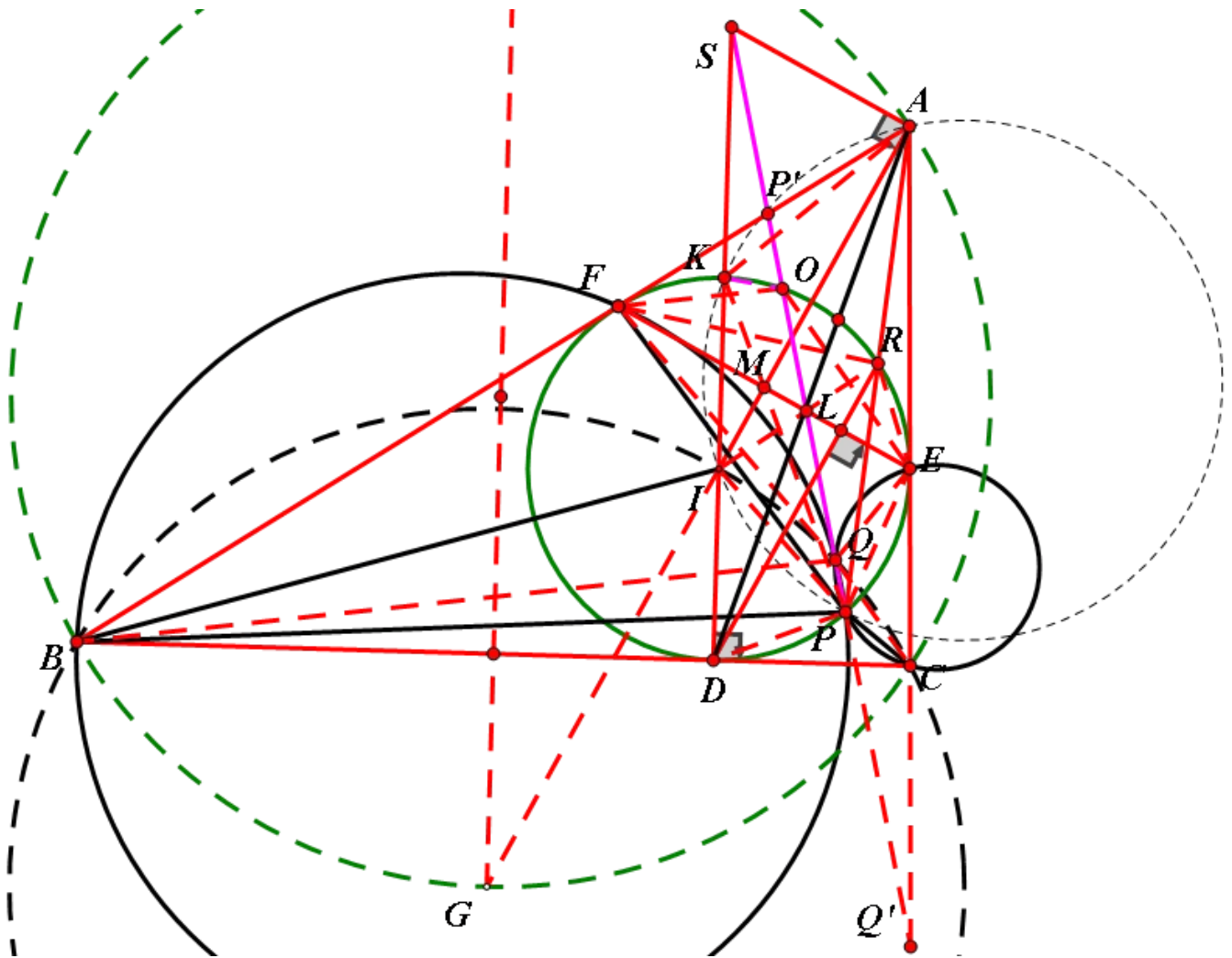


Q为 $\triangle PCE$ 与 $\triangle PBF$ 的外接圆另一个交点，
看起来很难描述。
两个圆也没有什么好的性质。

在准确作图上，可以目测发现BIQC共圆，
即Q在A所对的鸡爪圆上，这个结论很可能有用，
证明用倒角不难得到。

但是这样还不足以确定点Q，需要继续挖掘Q的性质，
若PQ交圆I于O，不难得到 $FO \parallel BP$, $EO \parallel CQ$ ，
还有若作出ABC外接圆与BC垂直的直径GN，
则AIG共线且ASN共线，但是感觉意义不大。

又经过一段时间探索，
还是找不到Q的比较好的性质，那就更没法证明S在PQ上了。



那如何证明结果呢？

能不能绕开点Q证明S在两圆根轴上呢？

或者想办法消去两圆和点Q呢？

设PQ交AB、AC于P'、Q'，

若结论成立则 $P'F \cdot P'B = P'Q \cdot P'P$ ，

$Q'E \cdot Q'C = Q'P \cdot Q'Q$ ，

消去Q得到

$P'F \cdot P'B / P'P + Q'E \cdot Q'C / Q'P = P'Q + Q'Q = P'Q'$ 。

反之，如果上式成立，设P'Q'上点Q使得PBFQ共圆，则ECPQ共圆。

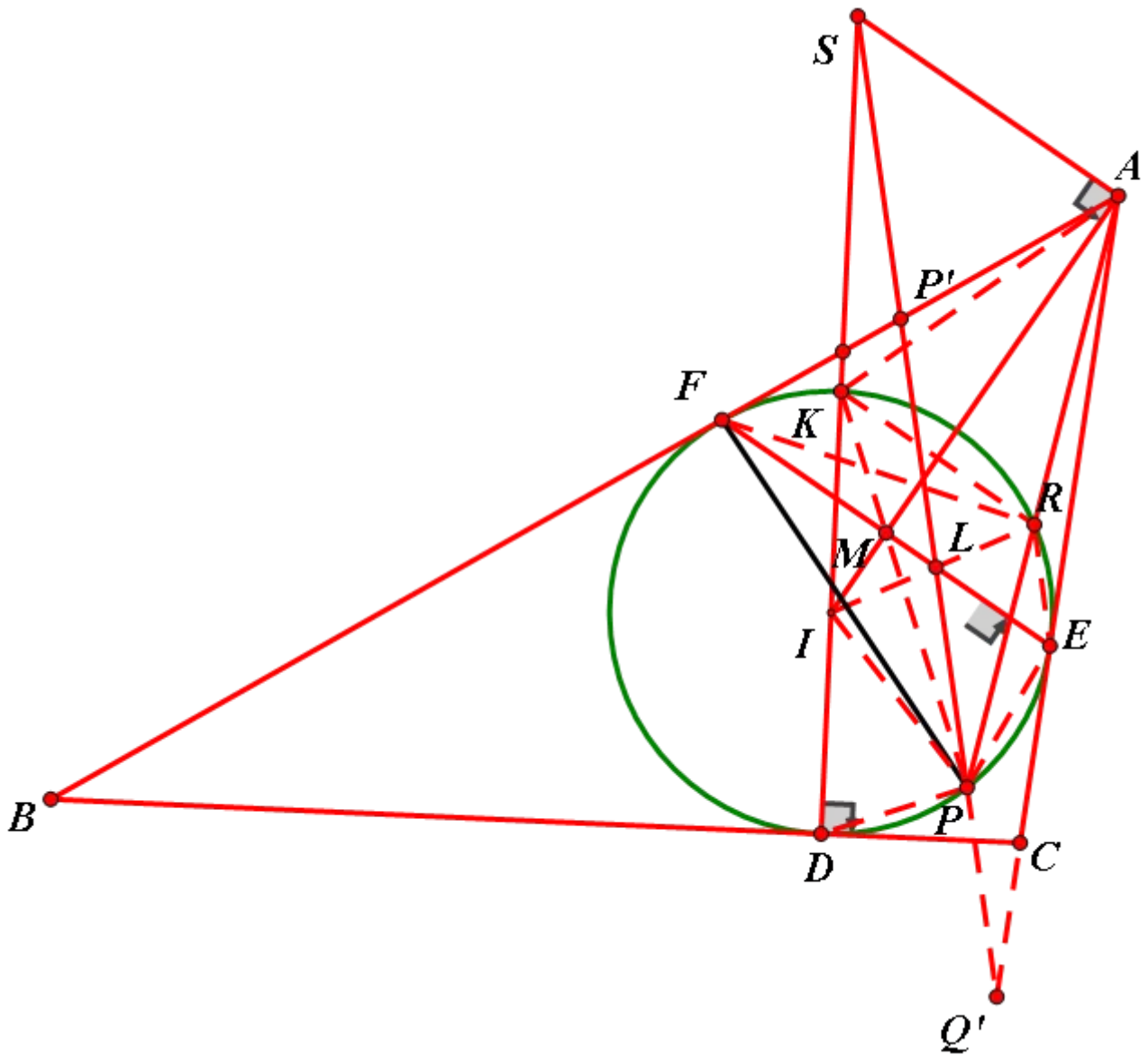
即只需证明上式就能完成证明了。

这个式子虽然很麻烦，

但是毕竟能消去点Q和 $\triangle PCE$ 与 $\triangle PBF$ 的外接圆，

而且是一个能完成证明的思路。那就在简化图形上继续思考吧，

从而简化得到下图：



题目转化为：已知内切圆 I 与 $\triangle ABC$ 三边切于 D 、 E 、 F ，
 DI 交圆 I 于 K ， S 在 DI 上且 $SA \perp AI$ ， AK 关于 AI 对称的直线交圆 I 于 R 、 P ，
 SP 交 AB 、 AC 于 P' 、 Q' 。
 求证： $P'F \cdot P'B / P'P + Q'C \cdot Q'E / Q'P = P'Q'$



如何证明此结论呢？

最直接的思路是“暴力”计算。

建立直角坐标系感觉过于复杂，

先尝试用三角吧，

设 $\angle RAI = \angle PAI = \theta$ ，

$\triangle KAI$ 中可以算出 $\cot \theta$ ，

这样在 $\triangle SAP$ 中可以用张角定理算出 AP' ，

同理可以算出 AQ' 。

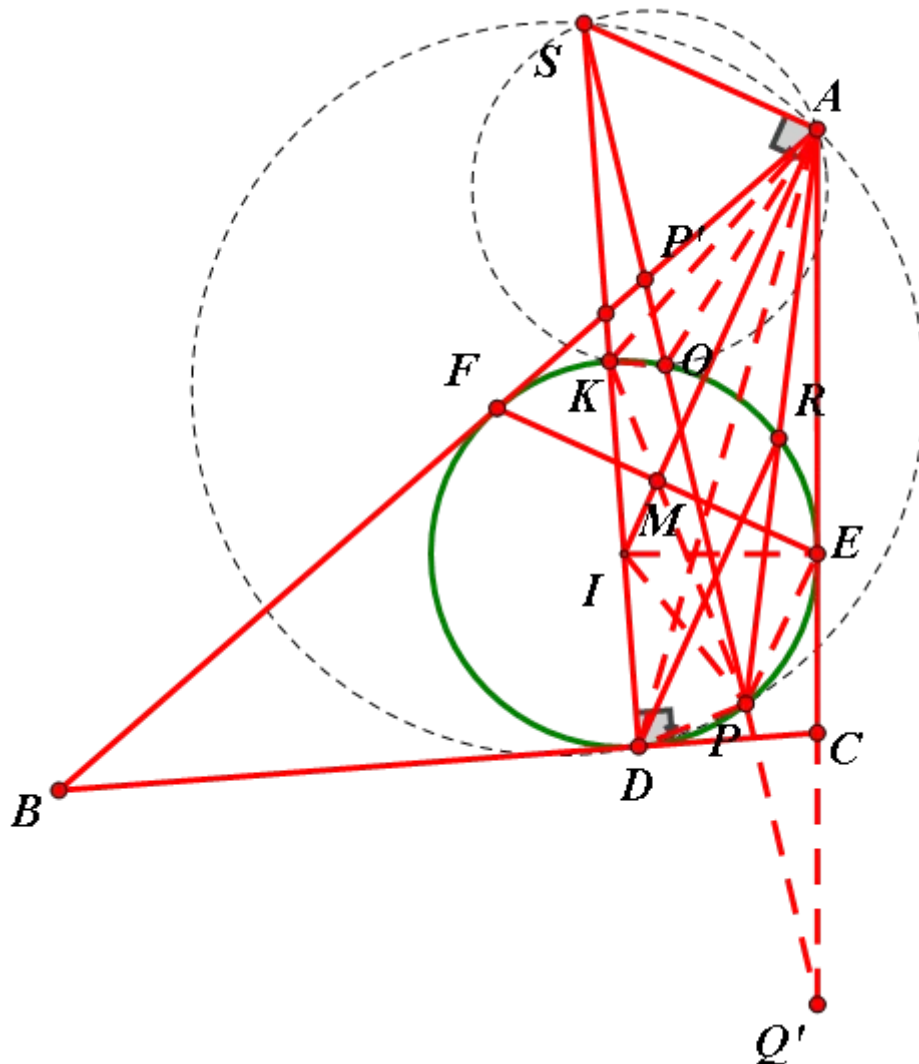
这样理论上 $P'F$ 、 $P'B$ 、 $Q'E$ 、 $Q'C$ 都能算出来了。

又 $P'Q' = PP' + QQ'$ ，

这样的话，上面证明的式子就能转化为
 $(P'F \cdot P'B - P'P^2)/P'P = (Q'P^2 - Q'C \cdot Q'E)/Q'P$ ，
 下面只能用余弦定理表示出 $P'P^2, Q'P^2$ ，
 理论上确实能算。

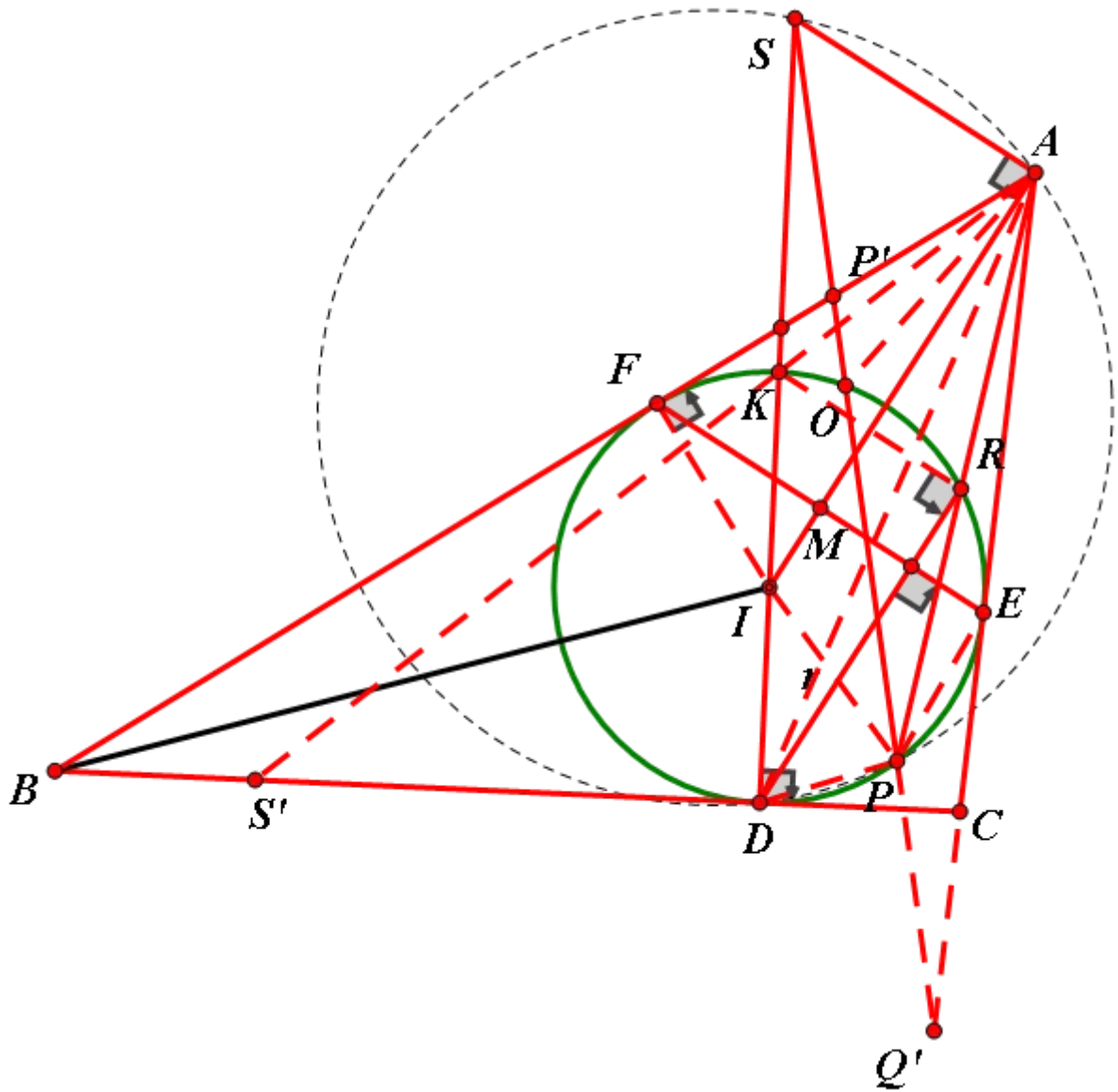
但是我具体算了一下，发现 $\cot\theta$ 已经很复杂，
 后面的各个式子都几乎算不下去。
 至此我踟蹰不前，又试着算了几次，
 感觉希望很渺茫，
 看来蛮干硬算估计不行。

虽然上面的蛮算没有完成，
 但是我也得到了一些新的角度性质，
 $\angle APD = \angle APK + \angle KPD = \angle RDK + 90^\circ$
 $= \angle AIK + 90^\circ = 180^\circ - \angle ASI$ ，
 故 S, A, P, D 共圆。
 这应该是一个有用的性质。



设SP交圆I于O，
 则 $\angle SAK = 90^\circ - \angle KAI = 90^\circ - \angle IAP = 90^\circ - \angle DKP$
 $= 90^\circ - \angle CDP = \angle KDP = \angle SOK$ ，
 则S, K, O, A共圆，
 故 $\angle KAO = \angle KSO = \angle DAP$ ，
 从而 $\angle IAO = \angle IAD$ 。

刚才那样蛮算之所以没有算下去，
 主要是各个线段都很难算，
 引入O以后，可以用切割线定理算出P'F, Q'E，
 这样就能将上面的算是转化为成简洁的结果，
 应该就有希望了！



这样就能化简得到

$$\begin{aligned}
 &P'F \cdot P'B / P'P + Q'C \cdot Q'E / Q'P = P'Q' \\
 &\Leftrightarrow (P'F^2 + P'F \cdot FB) / P'P + (Q'E^2 - CE \cdot Q'E) / Q'P = P'Q' \\
 &\Leftrightarrow P'O + P'F \cdot FB / P'P + Q'O - CE \cdot Q'E / Q'P = P'Q'
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow P'F \cdot DB / P'P = CD \cdot Q'E / Q'P$$

$$\Leftrightarrow (OQ'/OP')(PP'/PQ') = ((DB/DC))^2$$

至此将结果简化了，而且所有线段都集中在PS上，
应该问题不大了，设AK交BC于S'，

上式 $\Leftrightarrow$

$$(AQ' \sin \angle OAQ' / AP' \sin \angle OAP')(AP' \sin \angle PAP' / AQ' \sin \angle PAQ') = (DB/DC)^2$$

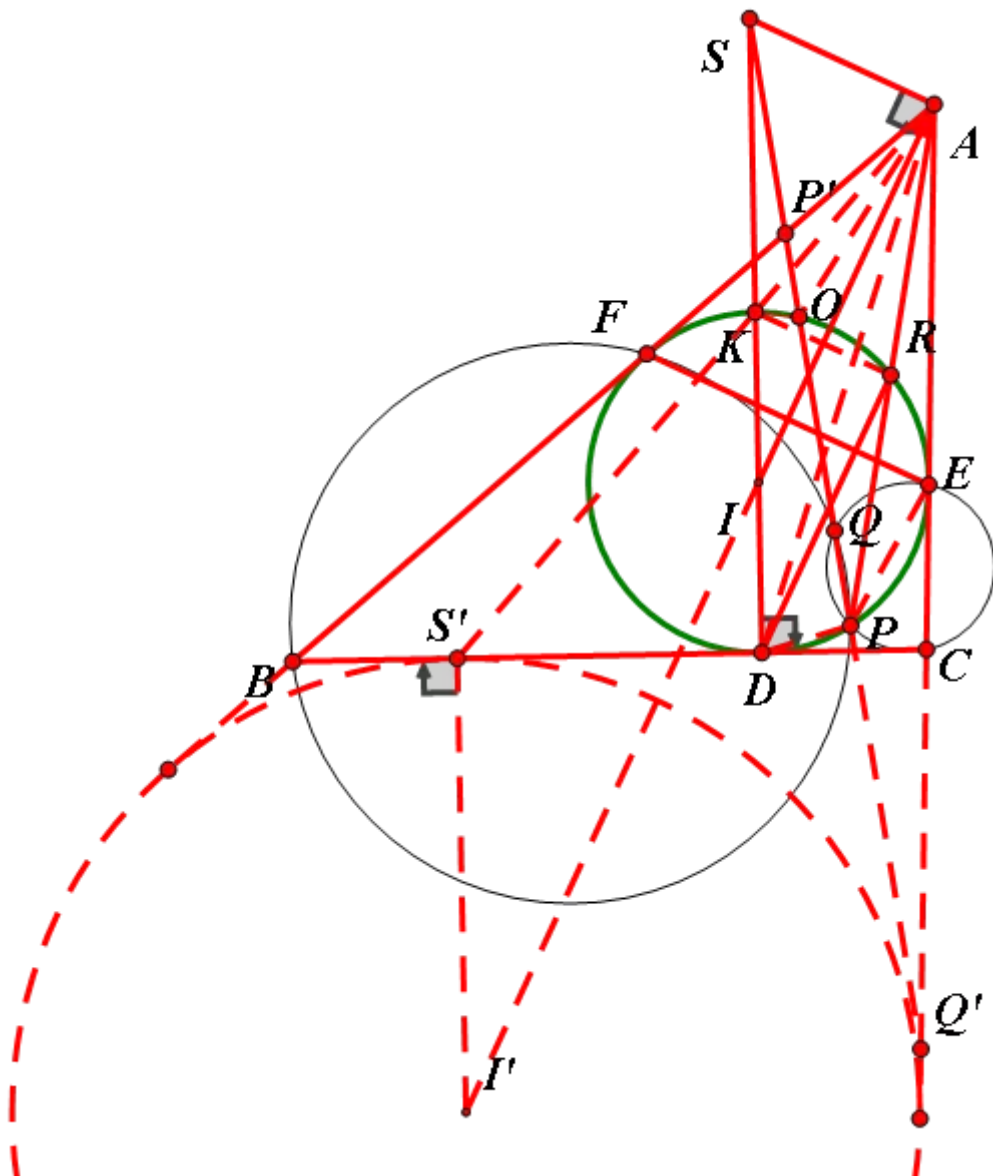
$$\Leftrightarrow (\sin \angle DAB / \sin \angle DAC)(\sin \angle S'AC / \sin \angle S'AB) = (DB/DC)^2$$

$$\Leftrightarrow (DB/DC)(AC/AB)(S'B/S'C)(AB/AC) = (DB/DC)^2$$

$$\Leftrightarrow S'B = DC$$

这就是一个经典的结论了，用计算或者位似很快就能证明。

至此思路打通，将以上思路整理好，倒过来书写证明过程如下：



证明：

作出A所对的旁切圆I'且BC于S'，设DI交圆I于K，S在DI上且SA⊥AI，

设PS交AB、AC、圆I于P'、Q'、O，

则圆I与圆I'位似，

又I'S'//IK,故A,K,S'共线，

由切线性质知BS'=CD。

显然DR//AI,故∠KIA=∠KDR=∠KPA，

故A,K,I,P共圆。

又IK=IP,则∠KAI=∠PAI。

∠APD=∠APK+∠KPD=∠RDK+90°

=∠AIK+90°=180°-∠ASI，

故S,A,P,D共圆。

则∠SAK=90°-∠KAI=90°-∠IAP=90°-∠DKP

=90°-∠CDP=∠KDP=∠SOK，

则S,K,O,A共圆，

故∠KAO=∠KSO=∠DAP，

从而∠IAO=∠IAD。

故 $(DB/DC)(AC/AB)(S'B/S'C)(AB/AC)=(DB/DC)^2$ ，

即 $(\sin\angle DAB/\sin\angle DAC)(\sin\angle S'AC/\sin\angle S'AB)=(DB/DC)^2$ ，

则 $(AQ'\sin\angle OAQ'/AP'\sin\angle OAP')(AP'\sin\angle PAP'/AQ'\sin\angle PAQ')=(DB/DC)^2$ 。

故 $(OQ'/OP')(PP'/PQ')=((DB/DC))^2$ ，

故 $P'F*DB/P'P=CD*Q'E/Q'P$ ，

故 $P'O+P'F*FB/P'P+Q'O-CE*Q'E/Q'P=P'Q'$

故 $(P'F^2+P'F*FB)/P'P+(Q'E^2-CE*Q'E)/Q'P=P'Q'$

即 $P'F*P'B/P'P+Q'C*Q'E/Q'P=P'Q'$ ，

设P'Q'上点Q*使得PBFQ*共圆，则ECPQ*共圆，

故Q*与Q重合，故直线DI和PQ的交点在过A且垂直于AI的直线上。



注：本问题图形比较复杂，性质也非常丰富，思路也很多，但是计算量都比较大，一般也要添加不少辅助线，本文展示了本人对本题的思考探索过程，本思路比较容易想到，基本没有添加太多辅助线，只是计算和转化过程有些复杂，可能会与其他很多高手的思路雷同。还有最后S'B=CD是一个经典性质，我在初中时就在很多老书上见到过，在前面的文章[1]中也出现过。



参考文献

[1] 阿基米德折弦定理之二

点我留言