

2019 年亚太地区数学奥林匹克

2019 年 3 月 12 日 考试时间:4 小时 5 个问题 每题 7 分

1 f 是定义在正整数上且取值为正整数的函数, 试求所有的 f , 使得: 对任意的正整数 a 和 b , $a^2 + f(a)f(b)$ 能被 $f(a) + b$ 整除。

2 m 是正整数, 数列 a_n 定义如下。其中, a_1 是正整数:

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n^2 + 2^m & \text{当 } a_n < 2^m; \\ \frac{a_n}{2} & \text{当 } a_n \geq 2^m; \end{cases}$$

试求所有的 a_1 , 使得数列 a_n 的所有项都是整数。

3 三条边各不相等的三角形 ABC 内接于圆 L 中。 BC 的中点为点 M , P 点(动点)在线段 AM 上, 圆 L 与三角形 BPM 的外接圆交于点 D (异于点 B), 直线 DP 与三角形 CPM 的外接圆交于点 X (异于点 P)。而且, 圆 L 与三角形 CPM 的外接圆交于点 E (异于点 C), 直线 EP 与三角形 BPM 的外接圆交于点 Y (异于点 P)。试证: 不依赖于 P 的选取, 三角形 AXY 的外接圆过异于点 A 的某定点 T 。

4 对于 2018×2019 的方格, 每个格子里写着一个整数, 对于每个格子, 与它有公共边的别的格子称之邻居, 考虑下面的操作: 任意选择几个格子, 计算出格子的邻居的数的平均值, 然后将这些值替换进格子。能否做到: 不管最初的情况如何, 总能在有限次操作后, 使得所有格子中的数都相等?

5 f 是定义在实数上且取值为实数的函数, 求所有的 f , 使得: 对任意实数 x 和 y , 满足

$$f(x^2 + f(y)) = f(f(x)) + f(y^2) + 2f(xy).$$