2020年全国高中数学联赛（四川预赛）试题

（考试时间：2020年6月14日 14:30~16:30）

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，满分64分.

1. 设ΔABC的外接圆的圆心为O，且$3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=0$，则$\angle C$的大小是______.

2. 正四面体的4个表面上分别写有数字1，2，3，4，将4个这样的密度均匀的正四面体同时投掷于桌面上，与桌面接触的4个面上的4个数的和能被4整除的概率是______.

3. 设函数$f(x)=\sqrt{2x^2+2x+41}-\sqrt{2x^2+4x+4}\,(x\in\mathbf{R})$，则$f(x)$的最大值是______.

4. 在平面直角坐标系中，$A(1,2)$，$B(3,0)$，点P为圆$(x-3)^2+(y-2)^2=1$上任意一点，设$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}\,(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，则$11\lambda+9\mu$的最小值是______.

5. 数列$\{a_n\}$满足：$a_0=\sqrt{6}$，$a_{n+1}=[a_n]+\dfrac{1}{\{a_n\}}$（其中$[a_n]$和$\{a_n\}$分别表示实数$a_n$的整数部分与小数部分），则$a_{2020}=$______.

6. 已知正实数x,y满足：$\dfrac{1}{x+3y}+\dfrac{1}{2x+y}=1$，则$x+y$的最小值是______.

7. 设复数$z=a+b\mathrm{i}\,(a,b\in\mathbf{Z})$，满足$z^3=2+11\mathrm{i}$，则$a+b=$______.

8. 用$[x]$表示不超过实数x的最大整数，若数列$\{a_n\}$满足：$a_n=[(2+\sqrt{3})^{2^n}]\,(n\in\mathbf{N}^*)$，则$a_{2020}$的末尾两位数字是______

二、解答题：本大题共3小题，满分56分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本题满分 16 分）过点$P(0,1)$作一直线l，l与抛物线$y=x^2$交于A、B两不同点，过点A、B分别作抛物线$y=x^2$的切线，两切线交于点Q.

求点Q到直线AB的距离的最小值.

10.（本题满分20分）设λ为正实数，对任意两两不等的正实数a、b、c，都有

$$\frac{a^3}{(b-c)^2}+\frac{b^3}{(c-a)^2}+\frac{c^3}{(a-b)^2}\geq\lambda(a+b+c).$$

求λ的最大值.

11（本题满分20分）设m是给定的正整数．求证：对任意给定的正整数$n(n\geq 2)$，都存在集合$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\subseteq\mathbf{N}^*$，使得对任意的正整数$k\ (1\leq k\leq n)$，都有$a_k\mid m+\dfrac{P(A)}{a_k}$，其中$P(A)$表示集合$A$中的元素之积.