2020年全国高中数学联合竞赛一试（A卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设8分和0分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第9小题4分为一个档次，第10、11小题5分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，满分64分.

1. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_9=13, a_{13}=1$，则$\log_{a_1}13$的值为_____.

答案： $\dfrac{1}{3}$.

解： 由等比数列的性质知$\dfrac{a_1}{a_9}=\left(\dfrac{a_9}{a_{13}}\right)^2$，故$a_1=\dfrac{a_9^3}{a_{13}^2}=13^3$. 所以$\log_{a_1}13=\dfrac{1}{3}$.

2. 在椭圆Γ中，A为长轴的一个端点，B为短轴的一个端点，F_1, F_2为两个焦点. 若$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}=0$，则$\dfrac{|AB|}{|F_1F_2|}$的值为_____.

答案： $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

解： 不妨设Γ的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$A(a,0), B(0,b)$，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，其中$c=\sqrt{a^2-b^2}$. 由条件知

$$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}=(-c-a)(c-a)+(-c^2+b^2)=a^2+b^2-2c^2=0.$$

所以$\dfrac{|AB|}{|F_1F_2|}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2c}=\dfrac{\sqrt{2c^2}}{2c}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. 设$a>0$，函数$f(x)=x+\dfrac{100}{x}$在区间$(0,a]$上的最小值为m_1，在区间$[a,+\infty)$上的最小值为m_2. 若$m_1m_2=2020$，则a的值为_____.

答案： 1或100.

解： 注意到$f(x)$在$(0,10]$上单调减，在$[10,+\infty)$上单调增. 当$a\in(0,10]$时，$m_1=f(a), m_2=f(10)$；当$a\in[10,+\infty)$时，$m_1=f(10), m_2=f(a)$. 因此总有

$$f(a)f(10)=m_1m_2=2020,$$

即$a+\dfrac{100}{a}=\dfrac{2020}{20}=101$，解得$a=1$或$a=100$.

4. 设z为复数. 若$\dfrac{z-2}{z-\mathrm{i}}$为实数（$\mathrm{i}$为虚数单位），则$|z+3|$的最小值为_____.

答案： $\sqrt{5}$.

解法 1： 设 $z=a+b\mathrm{i}(a,\ b\in\mathbf{R})$，由条件知

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-2}{z-\mathrm{i}}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{(a-2)+b\mathrm{i}}{a+(b-1)\mathrm{i}}\right)=\frac{-(a-2)(b-1)+ab}{a^2+(b-1)^2}=\frac{a+2b-2}{a^2+(b-1)^2}=0,$$

故 $a+2b=2$．从而

$$\sqrt{5}|z+3|=\sqrt{(1^2+2^2)((a+3)^2+b^2)}\geq|(a+3)+2b|=5,$$

即 $|z+3|\geq\sqrt{5}$．当 $a=-2,\ b=2$ 时，$|z+3|$ 取到最小值 $\sqrt{5}$.

解法 2： 由 $\dfrac{z-2}{z-\mathrm{i}}\in\mathbf{R}$ 及复数除法的几何意义，可知复平面中 z 所对应的点在 2 与 i 所对应的点的连线上（i 所对应的点除外），故 $|z+3|$ 的最小值即为平面直角坐标系 xOy 中的点 $(-3,0)$ 到直线 $x+2y-2=0$ 的距离，即 $\dfrac{|-3-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=6,\ BC=4$，边 AC 上的中线长为 $\sqrt{10}$，则 $\sin^6\dfrac{A}{2}+\cos^6\dfrac{A}{2}$ 的值为_____.

答案： $\dfrac{211}{256}$.

解： 记 M 为 AC 的中点，由中线长公式得

$$4BM^2+AC^2=2(AB^2+BC^2),$$

可得 $AC=\sqrt{2(6^2+4^2)-4\cdot10}=8$.

由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{CA^2+AB^2-BC^2}{2CA\cdot AB}=\dfrac{8^2+6^2-4^2}{2\cdot8\cdot6}=\dfrac{7}{8}$，所以

$$\begin{aligned}\sin^6\frac{A}{2}+\cos^6\frac{A}{2}&=\left(\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\right)\left(\sin^4\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}+\cos^4\frac{A}{2}\right)\\&=\left(\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\right)^2-3\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}\\&=1-\frac{3}{4}\sin^2A\\&=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2A=\frac{211}{256}.\end{aligned}$$

6. 正三棱锥 $P-ABC$ 的所有棱长均为1，L,M,N 分别为棱 PA,PB,PC 的中点，则该正三棱锥的外接球被平面 LMN 所截的截面面积为_____.

答案： $\dfrac{\pi}{3}$.

解： 由条件知平面 LMN 与平面 ABC 平行，且点 P 到平面 LMN,ABC 的距离之比为1:2．设 H 为正三棱锥 $P-ABC$ 的面 ABC 的中心，PH 与平面 LMN 交于点 K，则 $PH\perp$ 平面 ABC，$PK\perp$ 平面 LMN，故 $PK=\dfrac{1}{2}PH$.

正三棱锥 $P-ABC$ 可视为正四面体，设 O 为其中心（即外接球球心），则 O 在 PH 上，且由正四面体的性质知 $OH=\dfrac{1}{4}PH$．结合 $PK=\dfrac{1}{2}PH$ 可知 $OK=OH$，

即点 O 到平面 LMN, ABC 等距. 这表明正三棱锥的外接球被平面 LMN, ABC 所截得的截面圆大小相等.

从而所求截面的面积等于 ΔABC 的外接圆面积，即 $\pi\cdot\left(\frac{AB}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{\pi}{3}$.

7. 设 $a,b>0$，满足：关于 x 的方程 $\sqrt{|x|}+\sqrt{|x+a|}=b$ 恰有三个不同的实数解 x_1,x_2,x_3，且 $x_1<x_2<x_3=b$，则 $a+b$ 的值为_____.

答案：144.

解：令 $t=x+\frac{a}{2}$，则关于 t 的方程 $\sqrt{\left|t-\frac{a}{2}\right|}+\sqrt{\left|t+\frac{a}{2}\right|}=b$ 恰有三个不同的实数解 $t_i=x_i+\frac{a}{2}(i=1,2,3)$.

由于 $f(t)=\sqrt{\left|t-\frac{a}{2}\right|}+\sqrt{\left|t+\frac{a}{2}\right|}$ 为偶函数，故方程 $f(t)=b$ 的三个实数解关于数轴原点对称分布，从而必有 $b=f(0)=\sqrt{2a}$. 以下求方程 $f(t)=\sqrt{2a}$ 的实数解.

当 $|t|\le\frac{a}{2}$ 时，$f(t)=\sqrt{\frac{a}{2}-t}+\sqrt{\frac{a}{2}+t}=\sqrt{a+\sqrt{a^2-4t^2}}\le 2a$，等号成立当且仅当 $t=0$；当 $t>\frac{a}{2}$ 时，$f(t)$ 单调增，且当 $t=\frac{5a}{8}$ 时 $f(t)=\sqrt{2a}$；当 $t<-\frac{a}{2}$ 时，$f(t)$ 单调减，且当 $t=-\frac{5a}{8}$ 时 $f(t)=\sqrt{2a}$.

从而方程 $f(t)=\sqrt{2a}$ 恰有三个实数解 $t_1=-\frac{5}{8}a,\ t_2=0,\ t_3=\frac{5}{8}a$.

由条件知 $b=x_3=t_3-\frac{a}{2}=\frac{a}{8}$，结合 $b=\sqrt{2a}$ 得 $a=128$.

于是 $a+b=\frac{9a}{8}=144$.

8. 现有10张卡片，每张卡片上写有1, 2, 3, 4, 5中两个不同的数，且任意两张卡片上的数不完全相同. 将这10张卡片放入标号为1, 2, 3, 4, 5的五个盒子中，规定写有 i, j 的卡片只能放在 i 号或 j 号盒子中. 一种放法称为“好的”，如果 1 号盒子中的卡片数多于其他每个盒子中的卡片数. 则“好的”放法共有_____种.

答案：120.

解：用 $\{i, j\}$ 表示写有 i, j 的卡片. 易知这10张卡片恰为 $\{i, j\}\ (1\le i<j\le 5)$.

考虑“好的”卡片放法. 五个盒子一共放有10张卡片，故1号盒至少有 3 张卡片. 能放入 1 号盒的卡片仅有 $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\}$.

情况一：这 4 张卡片都在 1 号盒中，此时其余每个盒中已经不可能达到 4 张卡片，故剩下 6 张卡片无论怎样放都符合要求，有 $2^6=64$ 种好的放法.

情况二：这 4 张卡片恰有 3 张在 1 号盒中，且其余每盒最多仅有 2 张卡片.

考虑 $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}$ 在 1 号盒，且 $\{1,5\}$ 在 5 号盒的放法数 N.

卡片 $\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$ 的放法有 8 种可能，其中 6 种是在 2, 3, 4 号的某个盒中放两张，其余 2 种则是在 2, 3, 4 号盒中各放一张.

若 $\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$ 有两张在一个盒中，不妨设 $\{2,3\},\{2,4\}$ 在 2 号盒，则

$\{2,5\}$只能在 5 号盒，这样 5 号盒已有$\{1,5\},\{2,5\}$，故$\{3,5\},\{4,5\}$分别在 3 号与 4 号盒，即$\{2,5\},\{3,5\},\{4,5\}$的放法唯一；

若$\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$在$2,3,4$号盒中各一张，则$2,3,4$号盒均至多有 2 张卡片，仅需再使 5 号盒中不超过 2 张卡片，即$\{2,5\},\{3,5\},\{4,5\}$有 0 张或 1 张在 5 号盒中，对应$C_3^0+C_3^1=4$种放法.

因此$N=6\times1+2\times4=14$．由对称性，在情况二下有$4N=56$种好的放法.

综上，好的放法共有$64+56=120$种.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本题满分 16 分） 在$\triangle ABC$中，$\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．求$\cos B+\sqrt{2}\cos C$的取值范围.

解：记$f=\cos B+\sqrt{2}\cos C$.

由条件知$A=\dfrac{\pi}{4}$或$A=\dfrac{3\pi}{4}$. ……4 分

当$A=\dfrac{\pi}{4}$时，$B=\dfrac{3\pi}{4}-C$，其中$0<C<\dfrac{3\pi}{4}$，此时

$$f=\cos\left(\frac{3\pi}{4}-C\right)+\sqrt{2}\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin C+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos C=\sin\left(C+\frac{\pi}{4}\right)\in(0,1].$$

……8 分

当$A=\dfrac{3\pi}{4}$时，$B=\dfrac{\pi}{4}-C$，其中$0<C<\dfrac{\pi}{4}$，此时

$$f=\cos\left(\frac{\pi}{4}-C\right)+\sqrt{2}\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin C+\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos C=\sqrt{5}\sin(C+\varphi),$$

其中$\varphi=\arctan 3$. ……12 分

注意到$\varphi\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，函数$g(x)=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$在$\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}-\varphi\right]$上单调增，在$\left[\dfrac{\pi}{2}-\varphi,\dfrac{\pi}{4}\right]$上单调减，又$g(0)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}>2=g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$g\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sqrt{5}$，故$f\in(2,\sqrt{5}]$.

综上所述，$f=\cos B+\sqrt{2}\cos C$的取值范围是$(0,1]\cup(2,\sqrt{5}]$.

……16 分

10.（本题满分 20 分）对正整数n及实数$x\,(0\le x<n)$，定义

$$f(n,x)=(1-\{x\})\cdot C_n^{[x]}+\{x\}\cdot C_n^{[x]+1},$$

其中$[x]$表示不超过实数x的最大整数，$\{x\}=x-[x]$．若整数$m,n\ge2$满足

$$f\left(m,\frac{1}{n}\right)+f\left(m,\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(m,\frac{mn-1}{n}\right)=123,$$

求$f\left(n,\dfrac{1}{m}\right)+f\left(n,\dfrac{2}{m}\right)+\cdots+f\left(n,\dfrac{mn-1}{m}\right)$的值.

解：对$k=0,1,\cdots,m-1$，有

$$\sum_{i=1}^{n-1} f\left(m, k+\frac{i}{n}\right)=\mathrm{C}_m^k\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)+\mathrm{C}_m^{k+1}\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n}=\frac{n-1}{2}\cdot\left(\mathrm{C}_m^k+\mathrm{C}_m^{k+1}\right).$$

……5 分

所以

$$f\left(m,\frac{1}{n}\right)+f\left(m,\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(m,\frac{mn-1}{n}\right)=\sum_{j=1}^{m-1}\mathrm{C}_m^j+\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}f\left(m,k+\frac{i}{n}\right)$$

$$=2^m-2+\frac{n-1}{2}\cdot\left(\sum_{k=0}^{m-1}\mathrm{C}_m^k+\sum_{k=0}^{m-1}\mathrm{C}_m^{k+1}\right)$$

$$=2^m-2+\frac{n-1}{2}\cdot\left(2^m-1+2^m-1\right)=(2^m-1)n-1.$$ ……10 分

同理得 $f\left(n,\frac{1}{m}\right)+f\left(n,\frac{2}{m}\right)+\cdots+f\left(n,\frac{mn-1}{m}\right)=(2^n-1)m-1$.

由条件知 $(2^m-1)n-1=123$，即 $(2^m-1)n=124$，故 $(2^m-1)\mid 124$. 又 $m\geq 2$，所以 $2^m-1\in\{3,7,15,31,63,127,\cdots\}$，仅当 $m=5$ 时，$2^m-1=31$ 为124的约数，进而有 $n=\frac{124}{31}=4$. 进而

$$f\left(n,\frac{1}{m}\right)+f\left(n,\frac{2}{m}\right)+\cdots+f\left(n,\frac{mn-1}{m}\right)=(2^4-1)\cdot 5-1=74.$$

……20 分

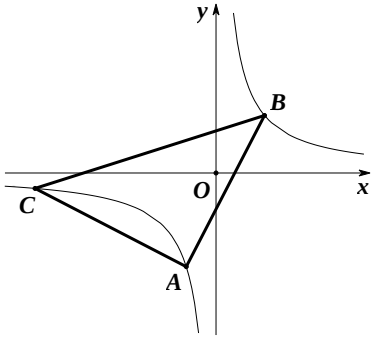
11.（本题满分 20 分）在平面直角坐标系中，点 A,B,C 在双曲线 $xy=1$ 上，满足 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形. 求 $\triangle ABC$ 的面积的最小值.

解：不妨设等腰直角 $\triangle ABC$ 的顶点 A,B,C 逆时针排列，A 为直角顶点.

设 $\overrightarrow{AB}=(s,t)$，则 $\overrightarrow{AC}=(-t,s)$，且 $\triangle ABC$ 的面积

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\frac{s^2+t^2}{2}.$$ ……5 分

注意到 A 在双曲线 $xy=1$ 上，设 $A\left(a,\frac{1}{a}\right)$，则 $B\left(a+s,\frac{1}{a}+t\right)$，$C\left(a-t,\frac{1}{a}+s\right)$.



由 B,C 在双曲线 $xy=1$ 上，可知

$$(a+s)\left(\frac{1}{a}+t\right)=(a-t)\left(\frac{1}{a}+s\right)=1,$$

这等价于

$$\frac{s}{a}+at=-st,$$ ①

$$-\frac{t}{a}+as=st.$$ ②

由①、②相加，得 $\frac{s-t}{a}+a(t+s)=0$，即

$$a^2=\frac{t-s}{t+s}. \qquad ③$$

由①、②相乘，并利用③，得

$$-s^2t^2=\left(\frac{s}{a}+at\right)\left(-\frac{t}{a}+as\right)=\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)st+s^2-t^2$$

$$=\left(\frac{t-s}{t+s}-\frac{t+s}{t-s}\right)\cdot st+s^2-t^2=\frac{4st}{s^2-t^2}\cdot st+s^2-t^2$$

$$=\frac{(s^2+t^2)^2}{s^2-t^2}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 10\text{ 分}$$

所以由基本不等式得

$$(s^2+t^2)^4=\ -s^2t^2(s^2-t^2)^{\ 2}=\frac{1}{4}\cdot 2s^2t^2\cdot 2s^2t^2\cdot(s^2-t^2)^2$$

$$\le\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2s^2t^2+2s^2t^2+(s^2-t^2)^2}{3}\right)^3=\frac{(s^2+t^2)^6}{108}, \qquad ④$$

故$s^2+t^2\ge\sqrt{108}=6\sqrt{3}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 15\text{ 分}$

以下取一组满足条件的实数(s,t,a)，使得$s^2+t^2=6\sqrt{3}$（进而由s,t,a可确定一个满足条件的ΔABC，使得$S_{\Delta ABC}=\frac{s^2+t^2}{2}=3\sqrt{3}$）.

考虑④的取等条件，有$2s^2t^2=(s^2-t^2)^2$，即$\frac{s^2}{t^2}=2\pm\sqrt{3}$.

不妨要求$0<s<t$，结合$s^2+t^2=6\sqrt{3}$，得$s=\sqrt{3(\sqrt{3}-1)},\ t=\sqrt{3(\sqrt{3}+1)}$.

由①知$a<0$，故由③得$a=-\sqrt{\frac{t-s}{t+s}}$，其中$t=\sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}}s=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}s$，从而有$a=-\sqrt{\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1+\sqrt{2}}}$.

综上，ΔABC的面积的最小值为$3\sqrt{3}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 20\text{ 分}$