2020 年全国高中数学联合竞赛一试试题(A 卷)

一.填空题: 本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 满分 64 分.

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_9 = 13, a_{13} = 1$, 则 $\log_{a_1} 13$ 的值为_____.

2. 在椭圆 Γ 中, A 为长轴的一个端点, B 为短轴的一个端点, F_1, F_2 为两个焦点. 若 $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} + \overrightarrow{BF_1} \cdot \overrightarrow{BF_2} = 0$, 则 $\frac{|AB|}{|F_1F_2|}$ 的值为_____.

3. 设 $a > 0$, 函数 $f(x) = x + \frac{100}{x}$ 在区间 $(0, a]$ 上的最小值为 m_1 , 在区间 $[a, +\infty)$ 上的最小值为 m_2 , 若 $m_1 m_2 = 2020$, 则 a 的值为_____.

4. 设 z 为复数, 若 $\frac{z-2}{z-i}$ 为实数(i 为虚数单位), 则 $|z+3|$ 的最小值为_____.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 6, BC = 4$, 边 AC 上的中线长为 $\sqrt{10}$, 则 $\sin^6 \frac{A}{2} + \cos^6 \frac{A}{2}$ 的值为_____.

6. 正三棱锥 $P-ABC$ 的所有棱长都为 1, L, M, N 分别为棱 PA, PB, PC 的中点, 则该三棱锥的外接球被平面 LMN 所截的截面面积为_____.

7. 设 $a, b > 0$, 满足: 关于 x 的方程 $\sqrt{|x|} + \sqrt{|x+a|} = b$ 恰有三个不同的实数解 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3 = b$, 则 $a+b$ 的值为_____.

8. 现有 10 张卡片, 每张卡片上写有 1,2,3,4,5 中两个不同的数, 且任意两张卡片上的数不完全相同. 将这 10 张卡片放入标号为 1,2,3,4,5 的五个盒子中, 规定写有 i, j 的卡片只能放在 i 号或 j 号盒子中. 一种放法称为“好的”, 如果 1 号盒子中的卡片数多于其他每个盒子中的卡片数. 则“好的”放法公共有_____种.

二.解答题: 本大题共 3 小题, 满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9. (本题满分 16 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 $\cos B + \sqrt{2} \cos C$ 的取值范围.

10. (本题满分 20 分) 对正整数 n 及实数 $x(0 \leq x < n)$, 定义 $f(n, x) = (1 - \{x\})C_n^{[x]} + \{x\} \cdot C_n^{[x]+1}$ 其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数, $\{x\} = x - [x]$. 若整数 $m, n \geq 2$ 满足

$$f\left(m, \frac{1}{n}\right) + f\left(m, \frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(m, \frac{mn-1}{n}\right) = 123,$$

求 $f\left(n, \frac{1}{m}\right) + f\left(n, \frac{2}{m}\right) + \cdots + f\left(n, \frac{mn-1}{m}\right)$ 的值.

11. (本题满分 20 分) 在平面直角坐标系中, 点 A, B, C 在双曲线 $xy = 1$ 上, 满足 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 求 $\triangle ABC$ 的面积的最小值.