2019 全国高中数学联赛一试模拟 (2)

一、填空题。(本大题共八小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

- 1、设 z 是模长为 1 的复数, 则 $\left| \frac{z+i}{z+2} \right|$ 的最大值为_____
- 2、设 $a \geq 0$, 对 $\forall m, x$ ($0 \leq m \leq a, 0 \leq x \leq \pi$), 均有 $|\sin x - \sin(x+m)| \leq 1$, 则 $a_{\max} =$ _____
- 3、设椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上有动点 P, Q, R , 且 P, Q 关于坐标原点对称. S 为长轴上一点, 使 $\triangle PSF_1$ 与 $\triangle PSF_2$ 的内切圆半径相等, 则 $(|PS| + |PR| + |RQ|)_{\max} =$ _____
- 4、若恰有两组解 (m, n) , 使函数 $f(x) = |x^2 - a|$ 定义域与值域同时为 $[m, n]$, 则 a 的取值范围是_____
- 5、设等腰四面体 $DBMN$ 的外接球半径为 R , $\triangle BMN$ 的外接圆半径为 r , 已知 $DB = MN = a, DM = BN = b, DN = BM = c$, 则 $\frac{r}{R}$ 的取值范围是_____
- 6、设 $x_k > -3$ ($k=1, 2, \dots, n$). 则 $\left[\sum_{k=1}^n \sqrt{x_k + (k+1)^2} \right]^2 - \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{x_k + 2k+1} \right)^2$ 的最小值为_____
- 7、设集合 $A = \{1, 2, \dots, 2019\}$, 映射 $f: A \rightarrow A$ 且 $f(f(x)) = x$ 的个数为_____
- 8、已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 规定 $S_0 = 0$, 若对任意 $n \in \mathbb{Z}_+$, 均有 $\frac{a_n}{2019} = -\frac{2019 + S_{n-1}}{n}$, 则 $\sum_{n=1}^{2019} 2^n a_n =$ _____

二、解答题。(第 9 小题 16 分, 第 10、11 小题各 20 分, 共 56 分)

- 9、是否存在正整数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 对 $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $\frac{a_1 \cdots a_n}{a_1 + \cdots + a_n}$ 为 2019 次方数, 证明你的结论.
- 10、设 $n \in \mathbb{N}^+$, $f(x) = \sum_{i=0}^n x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^n \frac{k}{a_i} x^i$, 求 k 的取值范围, 可以适当选择 n 及实数 a_i ($i=0, 1, \dots, n$), 使 $f(g(1))g(f(1)) < 4k$.
- 11、平面直角坐标系中, 圆 A 是以 $A(-3, 0)$ 为圆心, 5 为半径的圆, 点 $B(2, 0)$, 求 $c_{\max}$ 使对任意点 X ($|XA| > 5$) 有 $|OX| - 2 \geq c[\min\{|BX|, |BX|^2\} \cdot d(B)]$. 其中 $d(B)$ 表示点 B 到椭圆 $17x^2 - 16xy + 4y^2 - 34x + 16y + 13 = 0$ 两条对称轴距离之积.

2019 全国高中数学联赛加试模拟 (2)

一、(本题满分 40 分) 非钝角三角形 ABC 的内切圆 γ 分别切 AB 、 AC 、 BC 于点 F 、 E 、 D ，直线 EF 交其外接圆于 M 、 N (M 在劣弧 AB 上)。 P 、 Q 为 γ 上的两点 ($P \neq F$, $Q \neq E$) 使 $MF = MP$, $NE = NQ$ 。

证明： P 、 I 、 Q 共线 $\Leftrightarrow \angle BAC = 90^\circ$

二、(本题满分 40 分) $n \in N^+$ ($n \geq 3$), $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, 且 $\sum_{i=1}^n a_i = n$ 。

证明： $a_1^3 a_2 + a_2^3 a_3 + \dots + a_n^3 a_1 + n \geq 2(a_1 \cdots a_{n-1} + a_2 \cdots a_n + \dots + a_n \cdots a_{n-2})$

三、(本题满分 50 分) 设 $k+l$ 元集合 $M = \{x_1, x_2, \dots, x_{k+l}\}$ ($0 \leq x_i \leq 1$, $k, l \in N^+$)，若

M 的 k 元子集 A 满足 $\left| \frac{1}{k} \sum_{x_i \in A} x_i - \frac{1}{l} \sum_{x_j \in M \setminus A} x_j \right| < \frac{k+l}{2kl}$ ，则称 A 为 M 的“新时代”子集。

证明： M 的“新时代”子集至多有 $\frac{2}{k+l} C_{k+l}^k$ 个。

四、(本题满分 50 分) 证明：存在常数 $c > 0$ 满足：若正整数 a, b, n 对任意整数

$i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ 都有 $\gcd(a+i, b+j) > 1$ ，则 $\min\{a, b\} > n^{\frac{n}{2}} \cdot c^n$ 。