第十七届中国东南地区数学奥林匹克

浙江·诸暨

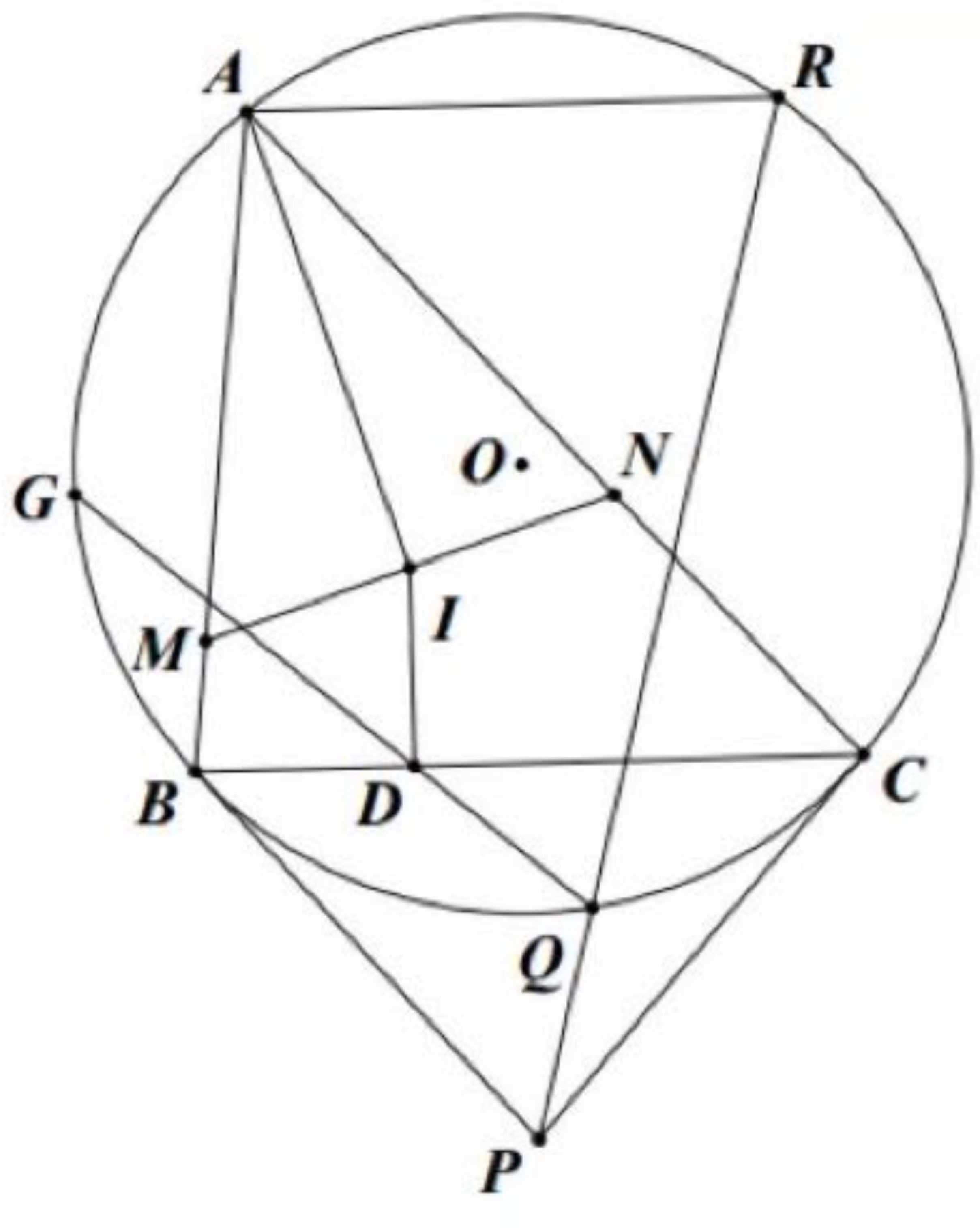
高一年级 第一天

2020 年 8 月 5 日　下午 1:30-5:30

1. 已知二次函数 $f(x)=a(3a+2c)x^2-2b(2a+c)x+b^2+(c+a)^2$（$a,b,c\in R$）. 假设对于任意$x\in R$都有$f(x)\leq 1$，求$|ab|$的最大值.

2. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB<AC$，PB和PC是$\triangle ABC$的外接圆O的切线. R是弧$\overparen{AC}$上的一个点，PR与圆O的另一个交点为Q. I是$\triangle ABC$的内心，$ID\perp BC$于点D，QD与圆O的另一个交点为G. 过点I且与AI垂直的直线与AB，AC分别相交于点M，N.

证明：若$AR//BC$，则A,G,M,N四点共圆.



3. 设多项式$f(x)=x^{2020}+\sum_{i=0}^{2019}c_ix^i$，其中$c_i\in\{-1,0,1\}$. 记$N$为$f(x)=0$正整数根的个数（含重根）. 若$f(x)=0$无负整数根，求$N$的最大值.

4. 设a_1，a_2，$\cdots$，a_{17}是1，2，$\cdots$，17的一个排列，且满足

$$(a_1-a_2)(a_2-a_3)\cdots(a_{16}-a_{17})(a_{17}-a_1)=n^{17}.$$

求正整数n的最大值.

第十七届中国东南地区数学奥林匹克

浙江 · 诸暨

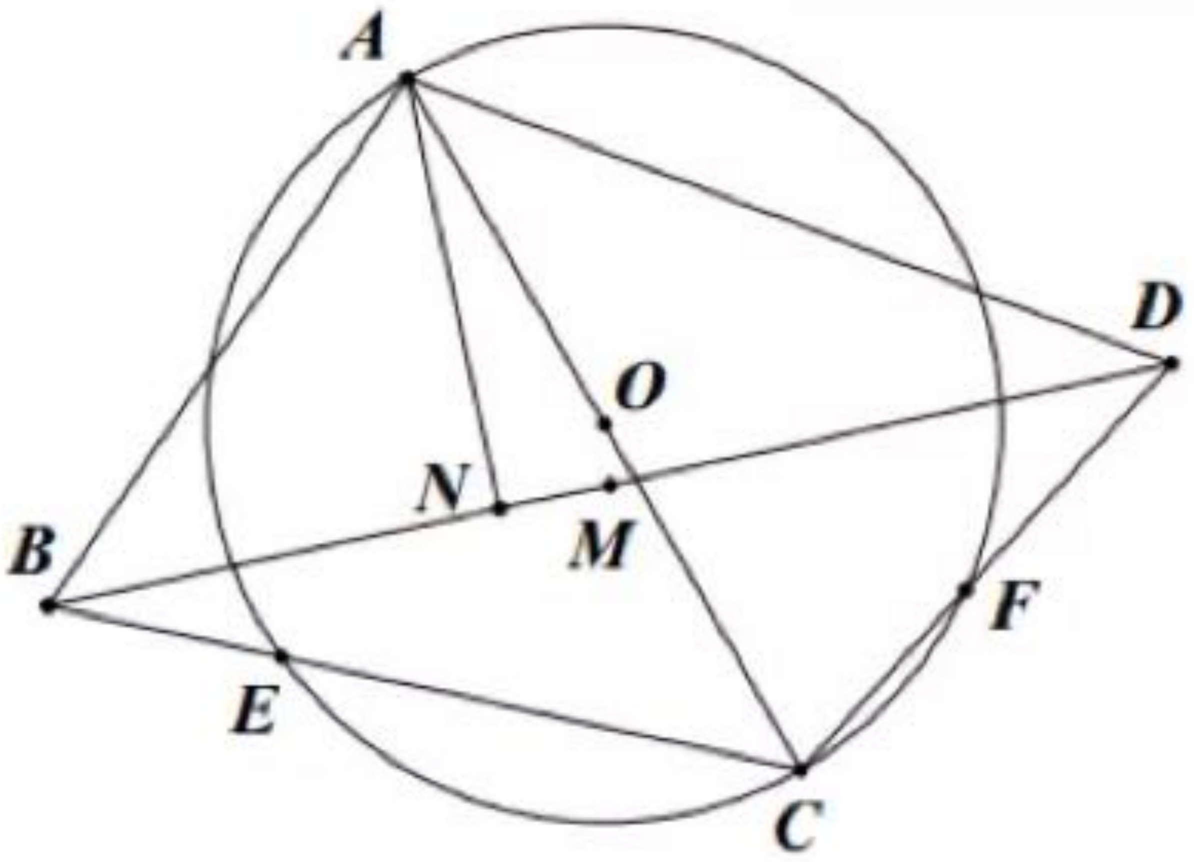
高一年级 第二天

2020 年 8 月 6 日　上午 8:00–12:00

1. 集合$I=\{1,2,\cdots,2020\}$. 称$W=\{w(a,b)=(a+b)+ab|a,b\in I\}\cap I$为“吴”集合，$Y=\{y(a,b)=(a+b)\cdot ab|a,b\in I\}\cap I$ 为“越”集合，$X=W\cap Y$为“西子”集合. 试求“西子”集合中最大数与最小数之和.

2. 如图，在四边形$ABCD$中，$\angle ABC=\angle ADC<90°$. 以$AC$为直径的圆$O$与边$BC$，$CD$的另一个交点分别为$E$，$F$. M为BD的中点，$AN\perp BD$于点N.

证明：M，N，E，F四点共圆.



3. 对于任一素数$p\geq 3$，证明：当正整数x足够大时，$x+1,x+2,\cdots,x+\frac{p+3}{2}$中至少有一个整数有大于$p$的素因子.

4. 用一个喷头对一张$1\times n$的方格纸条的每一格进行喷涂，当喷头对指定的第$i(1\leq i\leq n)$格喷涂时，该格被染成黑色，同时与第i格相邻的左侧方格和右侧方格（在存在的情况下）独立地各有$\frac{1}{2}$的概率也被染成黑色.

设在最佳策略下（使喷涂次数尽可能少），喷完n个方格所需要喷涂的次数期望值为$T(n)$. 求$T(n)$的通项公式.

第十七届中国东南地区数学奥林匹克

浙江 · 诸暨

高二年级 第一天

2020 年 8 月 5 日　下午 1:30-5:30

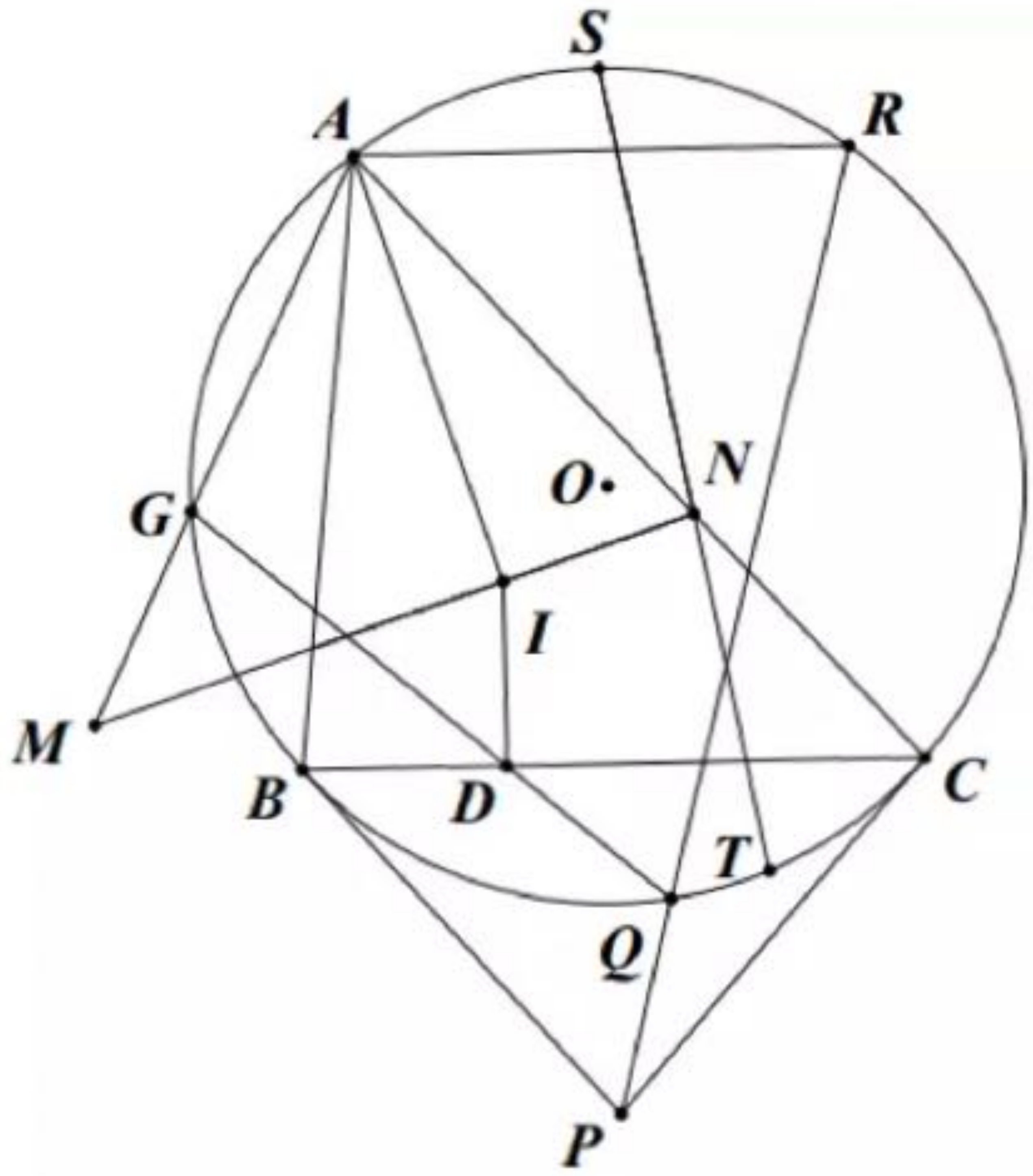
1. 设$a_1, a_2, \cdots, a_{17}$是1,2, $\cdots$,17的一个排列，且满足

$$(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)\cdots(a_{16} - a_{17})(a_{17} - a_1) = 2^n.$$

求正整数n的最大值.

2. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB < AC$，PB和PC是$\triangle ABC$的外接圆O的切线. R是弧$\overset{\frown}{AC}$上的一个点，PR与圆O的另一个交点为Q. I是$\triangle ABC$的内心，$ID \perp BC$于点D，QD与圆O的另一个交点为G. 过点I垂直AI的直线与AG, AC分别相交于点M, N. S为弧$\overset{\frown}{AR}$的中点，直线SN与圆O的另一个交点为T.

证明：若$AR // BC$，则M，B，T三点共线.



3. 设多项式$f(x) = x^{2020} + \sum_{i=0}^{2019} c_i x^i$，其中$c_i \in \{-1,0,1\}$. 记$N$为$f(x) = 0$正整数根的个数（含重根）. 若$f(x) = 0$无负整数根，求$N$的最大值.

4. 设$a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_1 \geq 0$，且$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

证明：对任意非负实数$x_i, y_i \ (1 \leq i \leq n)$，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i - \prod_{i=1}^{n} y_i^{a_i}\right) \leq a_n^2 \left(n\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i} - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{y_i}\right)^2.$$

第十七届中国东南地区数学奥林匹克

浙江·诸暨

高二年级 第二天

2020 年 8 月 6 日　上午 8:00-12:00

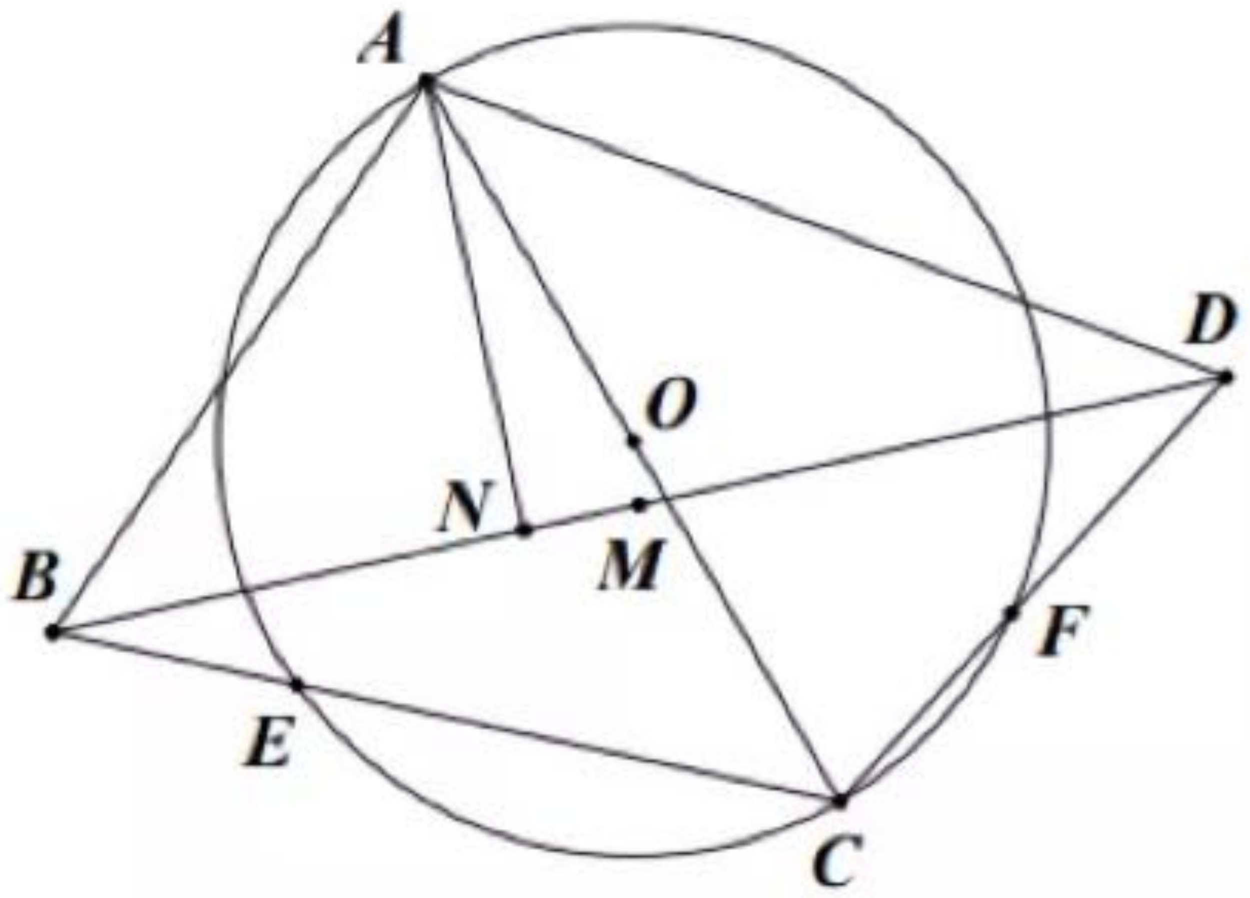
1. 集合$I=\{1,2,\cdots,2020\}$. 称$W=\{w(a,b)=(a+b)+ab|a,b\in I\}\cap I$为“吴”集合，$Y=\{y(a,b)=(a+b)\cdot ab|a,b\in I\}\cap I$为“越”集合，$X=W\cap Y$为“西子”集合.

（1）试求“西子”集合中最大数与最小数之和；

（2）若“越”集合中的元素$n=y(a,b)(a\le b)$表示方法不唯一（如$30=y(1,5)=y(2,3)$），就称n为“卓越数”. 求“越”集合中“卓越数”的个数.

2. 如图，在四边形$ABCD$中，$\angle ABC=\angle ADC<90°$. 以$AC$为直径的圆$O$与边$BC$，$CD$的另一个交点分别为$E$，$F$. M为BD的中点，$AN\perp BD$于点N.

证明：M，N，E，F四点共圆.



3. 将所有不含平方因子的正整数从小到大排成数列$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$.
证明：存在无穷多个正整数n，使得$a_{n+1}-a_n=2020$.

4. 用一个喷头对一张$1\times n$的方格纸条的每一格进行喷涂，当喷头对指定的第$i(1\le i\le n)$格喷涂时，该格被染成黑色，同时与第i格相邻的左侧方格和右侧方格（在存在的情况下）独立地各有$\frac{1}{2}$的概率也被染成黑色.

设在最佳策略下（使喷涂次数尽可能少），喷完n个方格所需要喷涂的次数期望值为$T(n)$. 求$T(n)$的通项公式.