

2019年清华大学自主招生试题解析（部分）

福建省厦门市 叶超杰

1. 一个四面体棱长分别为6, 6, 6, 6, 6, 9, 求外接球的半径

解：设 $AB = AC = AD = BC = BD = 6$, $CD = 9$, 易知 $\triangle BCD$ 的外接圆 O_1 半径为

$$r_1 = \frac{12}{\sqrt{7}}$$

同理可得 $\triangle ACD$ 的外接圆 O_2 的半径为

$$r_2 = \frac{12}{\sqrt{7}}$$

设外接圆的圆心为 O , 易知

$$OO_2 = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

则外接球半径

$$R = \sqrt{r_2^2 + OO_2^2} = \sqrt{\frac{3}{7} + \frac{144}{7}} = \sqrt{21}$$

所以外接球半径为 $\sqrt{21}$

2. 求值: $\int_{-1}^1 (1 - \sin^2 x) x^2 dx$

解: $\int_{-1}^1 (1 - \sin^2 x) x^2 dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 x^2 dx + \int_{-1}^1 x^2 \cos 2x dx \right)$, 由分部积分法可知

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos 2x dx &= \frac{1}{2} \int x^2 d \sin 2x = \frac{1}{2} \left(x^2 \sin 2x - \int \sin 2x dx^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x^2 \sin 2x - \int 2x \sin 2x dx \right) = \frac{1}{2} \left(x^2 \sin 2x + \int x d \cos 2x \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x^2 \sin 2x + x \cos 2x - \int \cos 2x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x^2 \sin 2x + x \cos 2x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1 - \sin^2 x) x^2 dx &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} (\sin 2 + 2 \cos 2) \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} (\sin 2 + 2 \cos 2) \end{aligned}$$

备注: 听说真题是这一道: 求值: $\int_{-1}^1 (1 - \sin x) x^2 dx$

解: $\int_{-1}^1 (1 - \sin x) x^2 dx = \int_{-1}^1 x^2 dx - \int_{-1}^1 x^2 \sin x dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$

3. 已知 P 为单位圆上一动点, $A(0, 2)$, $B(0, -1)$, 求 $|AP| \times |BP|^2$ 的最大值

解: 设 $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$, 在

$$S = |AP| \times |BP|^2 = \sqrt{\cos^2 \alpha + (\sin \alpha - 2)^2} [\cos^2 \alpha + (1 + \sin \alpha)^2]$$

整理可得

$$S = 8\sqrt{\left(\frac{1 + \sin \alpha}{2}\right)^2 \left(\frac{5}{4} - \sin \alpha\right)}$$

由三元均值不等式可知

$$S \leq 8 \times \sqrt{\left(\frac{1 + \frac{5}{4}}{3}\right)^3} = 3\sqrt{3}$$

当且仅当 $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 则 $|AP| \times |BP|^2$ 的最大值为 $3\sqrt{3}$

4. AB 为圆 O 的直径, $CO \perp AB$, M 为 AC 中点, $CH \perp MB$, 则下列选项正确的是 ()

A. $AM = 2OH$ B. $AH = 2OH$ C. $\triangle BOH \sim \triangle BMA$ D. 忘记

解: 设圆 O 的半径为2, 易知 $BM = \sqrt{10}$, $BH = \frac{8}{\sqrt{10}}$, $AM = CM = \sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{2}$

在 $\triangle OBH$ 与 $\triangle ABM$ 中, 由余弦定理可知

$$\cos \angle ABM = \frac{16 + 10 - 2}{8\sqrt{10}} = \frac{4 + \frac{64}{10} - OH^2}{\frac{32}{\sqrt{10}}}$$

解得

$$OH = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$AM \neq 2OH$, 选项A错误

在 $\triangle AHC$ 中, 由中线定理可知

$$AH^2 + \frac{16}{10} = \frac{8}{10} + 4$$

$$\text{解得 } AH = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

则 $AH = 2OH$, 选项B正确

而 $\frac{BO}{BM} = \frac{BH}{BA} = \frac{OH}{MA} = \frac{2}{\sqrt{10}}$, 所以 $\triangle BOH \sim \triangle BMA$, 选项C正确

综上所述: 选为B, C

5. $A = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, f 是 A 到 B 的映射, 若满足 $f(x) = f(y)$, 则

称有序对 (x, y) 为“好对”, 求“好对”的个数最小值

解: 情形一: 当只对应 B 中1个元素时, 此时“好对”有

$$15 \times 15 = 225 \text{ 对}$$

情形二：当只对应 B 中2个元素时，设有 a_1 组 $f(x) = f(y)$ ， b_1 组 $f(x) = f(y)$ ，则此时“好对”有

$$a_1^2 + b_1^2 \text{ 对, 且 } a_1 + b_1 = 15$$

则由柯西不等式可知

$$a_1^2 + b_1^2 \geq \frac{(a_1 + b_1)^2}{2} = \frac{225}{2}$$

情形三：当只对应 B 中3个元素时，设有 a_2 组 $f(x) = f(y)$ ， b_2 组 $f(x) = f(y)$ ， c_2 组 $f(x) = f(y)$ ，则此时“好对”有

$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \text{ 对, 且 } a_2 + b_2 + c_2 = 15$$

则由柯西不等式可知

$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \geq \frac{(a_2 + b_2 + c_2)^2}{3} = 75$$

依次可得，易知当对应 B 中有5个元素时，此时“好对”的最小值为45，当且仅当 A 中每3个元素对应 B 中一个元素时，等号成立
则“好对”的个数的最小值为45

6. 若对 $\forall c \in R, \exists a, b$, 使得 $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f(c)$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 满足性质 T , 下列函数不满足性质 T 的是 ()

A. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ B. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ C. $f(x) = e^{x+1}$ D. $f(x) = \sin(2x + 1)$

解: 因为 $\forall c \in R, \exists a, b$, 使得 $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f(c)$, 则

$f(x)$ 的值域是 $f'(x)$ 值域的子集

A 选项: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 \in [0, +\infty)$, $f(x) \in R$, 满足题意

B 选项: $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$, 令 $x = \tan \alpha$, 则

$$g(\alpha) = -\frac{1}{2} \sin 2\alpha (1 + \cos 2\alpha)$$

当 $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha > 0$ 时, 则由四元均值不等式可知

$$\sin^2 2\alpha (1 + \cos^2 2\alpha) = 27 \times \left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{3}\right)^3 (1 - \cos 2\alpha) \leq 27 \times \left(\frac{2}{4}\right)^4$$

当且仅当 $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 所以

$$f'(x) \in \left[-\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right], f(x) \in (0, 1], \text{ 满足题意}$$

因为 $g(\alpha)$ 为奇函数

C 选项: $f'(x) = e^{x+1}$, $f(x) \in R, f'(x) \in R$, 不满足题意

D 选项, $f'(x) = 2\cos(2x + 1)$, $f(x) \in [-1, 1], f'(x) \in [-2, 2]$, 不满足题意

综上所述: 选 A, B

7. 已知 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$, $(\vec{c} - \vec{a})(\vec{c} - \vec{b}) = 0$, 若 $|\vec{d} - \vec{c}| = 1$, 求 $|\vec{d}|$ 的最大值

解: 建立平面直角坐标系, 且 $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 易知点 $\vec{c}$ 的终点的轨迹方程为

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

又 $|\vec{d} - \vec{c}| = 1$, 所以此时

$$|\vec{d}|_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

8. 椭圆 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$, 过 $F(2, 0)$ 的直线交椭圆于 A, B 两点, 点 C 在直线 $x = 3$ 上, 若 $\triangle ABC$ 为正三角形, 求 $\triangle ABC$ 的面积

解: 设直线 $l: x = my + 2$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, AB 中点为 E , 联立

$$\begin{cases} x = my + 2 \\ x^2 + 3y^2 = 6 \end{cases}$$

整理可得

$$(m^2 + 3)y^2 + 4my - 2 = 0$$

则

$$AB = \frac{2\sqrt{6}(m^2 + 1)}{m^2 + 3}$$

而

$$\begin{aligned} EC &= \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} \times |3 - x_E| = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} \times \left|3 - \frac{6}{m^2 + 3}\right| \\ &= \frac{3(m^2 + 1)\sqrt{m^2 + 1}}{(m^2 + 3)|m|} \end{aligned}$$

而 $\frac{AB}{EC} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, 解得

$$m^2 = 1$$

所以

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

则 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

9. 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上一点 (x_0, y_0) 处的切线交抛物线 $y^2 = 8x$ 于 A, B 两点, 且满足 $\angle AOB = 90^\circ$,

其中 O 为坐标原点, 求 x_0

解: 因为 $\angle AOB = 90^\circ$, 所以直线 AB 恒过定点 $(8, 0)$, 而切线方程为

$$l_{AB}: xx_0 + yy_0 = 4$$

则

$$8x_0 = 4$$

解得

$$x_0 = \frac{1}{2}$$

10. 设 a 为 4444^{4444} 各位数字和, b 是 a 的各位数字之和, c 为 b 的各位数字之和, 求 c 的值

解: 因为 $1000^{4444} < 4444^{4444} < 10000^{4444}$, 则

$$3 \times 4444 < \lg 4444^{4444} < 4 \times 4444$$

则

$$a < 9 \times (4444 \times 4 + 1) \times 9 = 159993$$

情形一: 当 a 的位数为6, 则

$$b \leq 1 + 4 + 9 \times 4 = 41$$

情形二: 当 a 的位数为小于6, 则

$$b \leq 5 \times 9 = 45$$

由情形一和情形二可知

$$b \leq 45$$

情形三: 当 b 的位数为2位时, 则

$$c \leq 3 + 9 = 12$$

情形四: 当 b 的位数为1位数时, 则

$$c \leq 9$$

由情形三和情形四可知

$$c \leq 12$$

又

$$4444 \equiv 7 \pmod{9}, 7^3 \equiv 1 \pmod{9}$$

则

$$4444^{4444} \equiv 7^{4444} = (7^3)^{1481} \times 7 \equiv 7 \pmod{9}$$

而

$$4444^{4444} \equiv a \equiv b \equiv c \equiv 7 \pmod{9}$$

所以

$$c = 7$$

11. 实数 x, y 满足 $x^2 + (y-2)^2 \leq 1$, 求 $\frac{x + \sqrt{3}y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 的最大值和最小值

解: 情形一: 当 $x = 0$ 时, 此时

$$P = \frac{x + \sqrt{3}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{3}$$

情形二: 当 $x > 0$ 时, 此时

$$P = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}y}{x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}$$

易知 $\frac{y}{x} \in [\sqrt{3}, +\infty)$, 令 $\frac{y}{x} = \tan \alpha$, $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, 则

$$P = 2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \in (\sqrt{3}, 2]$$

情形三: 当 $x < 0$ 时, 此时

$$P = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}y}{x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}$$

易知 $\frac{y}{x} \in (-\infty, -\sqrt{3}]$, 令 $\frac{y}{x} = \tan \beta$, $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right]$, 则

$$P = -2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \in [1, \sqrt{3})$$

综上所述: P 的最小值为1, 最大值为2

12. 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n^2 - 3a_n + 4$, 则 ()

A. $\{a_n\}$ 单调递增

B. $\{a_n\}$ 无上界

C. 忘记

D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i - 1} = 1$

解: 易知 $a_n \neq 0$, 且 $a_{n+1} = a_n^2 - 3a_n + 4$, 则

$$a_{n+1} - a_n = (a_n - 2)^2 > 0, \{a_n\} \text{ 单调递增}$$

又 $a_1 = 3 > \frac{3}{2}$ (二次函数对称轴), 则 $\{a_n\}$ 无上界, 而

$$\frac{1}{a_{n+1} - 2} - \frac{1}{a_n - 2} = -\frac{1}{a_n - 1}$$

则

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i - 1} = 1 - \frac{1}{a_{n+1} - 2}$$

又 $\{a_n\}$ 无上界, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i - 1} = 1$

综上所述: A, B, D 正确

13. 若正实数 a, b 满足 $ab(a + 8b) = 20$, 则 $a + 3b$ 的最小值为_____

解: 因为 $ab(a + 8b) = 20$, 由二元均值不等式可知

$$\left(\frac{5a}{2}\right)(5b)(a + 8b) = 250 \leq \frac{\left(\frac{5a}{2} + 5b\right)^2}{4} \times (a + 8b)$$

解得

$$1000 \leq \left(5b + \frac{5a}{2}\right)^2 (a + 8b)$$

再由三元均值不等式可知

$$100 \leq \left(\frac{5a}{2} + 5b\right)^2 (a + 8b) \leq \left(\frac{6a + 18b}{3}\right)^3$$

此时

$$a + 3b \geq 5$$

当且仅当 $a = 2, b = 1$ 时, 等号成立

14. 设 $f(x) = |x-1| + |x-3|$, $g(x) = 2e^x$, 求 $f(x) + g(x)$ 最小值

解：情形一：当 $x \leq 1$ 时，则

$$\varphi(x) = f(x) + g(x) = 2e^x - 2x + 4$$

此时易知 $\varphi(x)_{\min} = \varphi(0) = 6$

情形二：当 $1 < x < 3$ 时，则

$$\varphi(x) = 2e^x + 2$$

此时 $\varphi(x) > 2e + 2$

情形三：当 $x \geq 3$ 时，则

$$\varphi(x) = 2e^x + 2x - 4$$

此时 $\varphi(x) \geq \varphi(3) = 2e^3 + 2$

综上所述： $f(x) + g(x)$ 最小值为 6

15. 设 $x, y \in N$ ，则方程 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{100}$ 的解的个数为_____

解：不妨设 $x \leq y$ ，则易知 $34 \leq x \leq 66$ ，而

$$y = \frac{100x}{3x-100}$$

则

$$\begin{cases} x=34 \\ y=1700 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=35 \\ y=700 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=36 \\ y=450 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=40 \\ y=200 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=50 \\ y=100 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=60 \\ y=75 \end{cases}$$

综上所述：总共解的个数为 12

16. 若实数 x, y 满足 $x^3 + 8y^3 + 6xy - 1 = 0$, 求 x^3y 的取值范围

解: 因为 $x^3 + 8y^3 + 6xy - 1 = 0$, 则

$$(x + 2y - 1)[(x + 2y)^2 + (x + 2y) - 6xy + 1] = 0$$

情形一: 当 $(x + 2y)^2 + (x + 2y) - 6xy + 1 = 0$ 时, 由常见不等式可知

$$6xy \leq \frac{3(x + 2y)^2}{4}$$

所以

$$(x + 2y)^2 + (x + 2y) - 6xy + 1 \geq \left(\frac{x + 2y}{2} + 1\right)^2 > 0$$

当 $x = 2y = -1$ 时, 等号成立, 而 $x = 2y = -1$ 满足题意, 此时

$$x^3y = \frac{1}{2}$$

情形二: 当 $x + 2y = 1$ 时, 此时

$$x^3y = \frac{x^3(1-x)}{2}$$

令 $f(x) = x^3(1-x)$, 则

$$f'(x) = x^2(3-4x)$$

易知 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{256}$, 所以

$$x^3y \in \left(-\infty, \frac{27}{512}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

17. 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 已知 $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 6$, $BC = BB_1 = 3\sqrt{2}$, 动点 P 在线段 B_1C 上, 求 $A_1P + BP$ 的最小值

解: 将平面 BB_1C 展开与平面 A_1CB_1 重合, 则易知 $\angle A_1B_1B = 135^\circ$, 在 $\triangle A_1B_1B$ 中, 由余弦定理可知

$$A_1B^2 = 36 + 18 + 36 = 90$$

所以

$$A_1B = 3\sqrt{10}$$

$A_1P + BP$ 的最小值为 $3\sqrt{10}$