

2019 年浙江大学自主招生试题解析

福建省厦门市 叶超杰

1. 已知 $\alpha = \frac{\pi}{7}$, 求 $\cos \alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$ 的值

解: 令 $a = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$, 则

$$2a \sin \frac{\pi}{7} = 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7}$$

由积化和差公式可知

$$2a \sin \frac{\pi}{7} = \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{7} - \sin \frac{4\pi}{7}$$

化简可得

$$a = \frac{1}{2}$$

2. 已知 $S = \{1, 2, 3, 4\}$, 若 $|a_1 - a_3| + |a_2 - a_4|$ 的平均数为最简分数 $\frac{q}{p}$, 其中

$a_1, a_2, a_3, a_4 \in S$, 则 $p + q$ 的值为_____

解: 情形一: $|a_1 - a_3|$ 为 0 时, 此时有 4 种, 情形二: $|a_1 - a_3|$ 为 1 时, 此时有 6 种

情形三: $|a_1 - a_3|$ 为 2 时, 此时有 4 种, 情形四: $|a_1 - a_3|$ 为 3 时, 此时有 2 种

则 $|a_1 - a_3| + |a_2 - a_4|$ 为 0 时, 有 16 个; 为 1 时, 有 48 个; 为 2 时, 有 68 个; 为 3 时, 有 64

个; 为 4 时, 有 40 个; 为 5 时, 有 16 个; 为 6 时, 有 4 个

则平均数为

$$\frac{0 \times 16 + 1 \times 48 + 2 \times 68 + 3 \times 64 + 4 \times 40 + 5 \times 16 + 6 \times 4}{256} = \frac{5}{2}$$

所以 $p + q = 7$

3. 一枚质地均匀的硬币, 扔硬币 10 次, 正面朝上次数多的概率为_____

解: 易知

$$p = \frac{C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10}}{2^{10}} = \frac{193}{512}$$

4. 已知 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 求 $\sqrt{3}xy + yz$ 的最小值

解: 由常见不等式可知

$$1 = x^2 + \frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 \geq -\sqrt{3}xy - yz$$

解得

$$\sqrt{3}xy + yz \geq -1$$

当且仅当 $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}y$, $z = -\frac{1}{2}y$ 时, 等号成立, 则 $\sqrt{3}xy + yz$ 的最小值为 -1

5. 已知 $p(n)$ 为 n 次的整系数多项式, 若 $p(0)$ 和 $p(1)$ 均为奇数, 则 ()

A. $p(n)$ 无整数根 B. $p(n)$ 可能有负整数根 C. $p(n)$ 无解 D. 忘了

解: 设 $p(n) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, 因为 $p(0)$ 和 $p(1)$ 均为奇数, 则

a_0 为奇数, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 为偶数

假设 $p(n)$ 有整数根, 设 $p(x_0) = 0$, 易知 $x_0 | a_0$, 则

x_0 为奇数

情形一: 当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 全是偶数时, 则此时易知

$p(x_0)$ 为奇数

情形二: 当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中有奇数时, 而 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 为偶数, 则奇数必定是成对出现, 则此时

$p(x_0)$ 还是为奇数

综上所述: $p(n)$ 无整数根, 故选 A

6. $3.\overline{abc}$ 是所有小数中最接近 $\sqrt{11}$ 的数, 求 $a + b + c$ 的值

解: 易知 $a = 3, b = 1, c = 7$, 则 $a + b + c = 11$

7. 已知 $n \in N^*$ ，下列说法正确的是 ()

A. 若 $n \neq 3k, k \in N$ ，则 $7|2^n - 1$

B. 若 $n = 3k, k \in N$ ，则 $7|2^n - 1$

C. 若 $n \neq 3k, k \in N$ ，则 $7|2^n + 1$

B. 若 $n = 3k, k \in N$ ，则 $7|2^n + 1$

解：情形一：当 $n = 3k, k \in N^*$ 时，则

$$2^n - 1 = 8^k - 1 = (7 + 1)^k - 1 = C_k^k 7^k + C_k^{k-1} 7^{k-1} + \cdots + C_k^1 7$$

此时 $7|2^n - 1$ ，则 B 正确

情形二：当 $n = 3k - 1, k \in N^*$ 时，则

$$2^n - 1 = \frac{8^k}{2} - 1 = \frac{(7 + 1)^k}{2} - 1 = \frac{1}{2} (C_k^k 7^k + C_k^{k-1} 7^{k-1} + \cdots + C_k^1 7 - 1)$$

此时 $7|2^n - 1$ 不成立

情形二：当 $n = 3k - 2, k \in N^*$ 时，则

$$2^n - 1 = \frac{8^k}{4} - 1 = \frac{(7 + 1)^k}{4} - 1 = \frac{1}{4} (C_k^k 7^k + C_k^{k-1} 7^{k-1} + \cdots + C_k^1 7) - \frac{3}{4}$$

此时 $7|2^n - 1$ 不成立，则 A 错误，同理可得，C, D 错误，综上所述：选 B

8. 复数 $|z_1| = |z_2| = 1 (z_1 \neq z_2)$ ，满足 $|z_k + 1 + i| + |z_k - 1 - i| = 2\sqrt{3} (k = 1, 2)$ ，求 $z_1 z_2$

解：设 $z_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha, z_2 = \cos \beta + i \sin \beta$ ，则

$$\sqrt{(\cos \alpha + 1)^2 + (\sin \alpha + 1)^2} + \sqrt{(\cos \alpha - 1)^2 + (\sin \alpha - 1)^2} = 2\sqrt{3}$$

整理可得

$$\sqrt{3 + 2(\cos \alpha + \sin \alpha)} + \sqrt{3 - 2(\cos \alpha + \sin \alpha)} = 2\sqrt{3}$$

解得

$$\sin \alpha + \cos \alpha = 0$$

同理可得 $\sin \beta + \cos \beta = 0$ ，所以

$$\alpha = \frac{3\pi}{4} + 2k_1\pi, \beta = \frac{7\pi}{4} + 2k_2\pi, k_1, k_2 \in Z$$

而 $z_1 z_2 = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$ ，所以

$$z_1 z_2 = i$$

9. 若 $x > 1$ ，且满足 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$ ，求 $x^5 - \frac{1}{x^5}$

解：因为 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$ ，则

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 7, x - \frac{1}{x} = 1$$

而

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^5 - \frac{1}{x^5} - \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)$$

又 $x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right) = 4$ ，所以

$$x^5 - \frac{1}{x^5} = 11$$

10. 已知点 (a, b) 在椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上，求 $2a + 3b + 4$ 的最大值与最小值的和

解：设 $a = 2\cos\alpha$ ， $b = \sqrt{3}\sin\alpha$ ，则

$$\begin{aligned} 2a + 3b + 4 &= 4\cos\alpha + 3\sqrt{3}\sin\alpha + 4 \\ &= \sqrt{43}\sin(\alpha + \varphi) + 4 \in [4 - \sqrt{43}, 4 + \sqrt{43}] \end{aligned}$$

所以 $2a + 3b + 4$ 的最大值与最小值的和为 8

11. 若将19表示为若干个正整数的和, 则这些正整数的积的最大值为_____

解: 设分拆中有 x 个2, y 个3, 则

$$2x + 3y = 19$$

当 $x = 2$ 时, 此时乘积最大, 乘积为

$$2^2 \times 3^5 = 972$$

故乘积的最大值为972

12. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $S_{n+1} = 4a_n + 3$, 求 $a_{2019} - 2a_{2018}$ 的值

解: 易知 $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}$, 则

$$a_{n+1} - 2a_n = 2(a_n - 2a_{n-1})$$

此时有

$$a_n - 2a_{n-1} = 2^n$$

整理可得

$$\frac{a_n}{2^n} - \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} = 1$$

所以

$$a_n = n \times 2^n - 2^{n-1}$$

则

$$a_{2019} - 2a_{2018} = 2^{2019}$$

13. 定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$, 求 $f\left(\frac{121}{2}\right)$

解: 因为 $f(x+1) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$, 则

$$f^2(x+1) - f(x+1) + f^2(x) - f(x) = -\frac{1}{4}$$

令 $g(x) = f^2(x) - f(x)$, 则

$$g(x+1) + g(x) = -\frac{1}{4}$$

由上式可知 $g(x)$ 具有周期性, 周期为 2, 而 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $g(x)$ 也为偶函数, 则

$$g\left(\frac{121}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right), g\left(-\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

解得

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

此时

$$f^2\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}, \text{ 且 } f(x) \geq \frac{1}{2}$$

解得

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

所以 $f\left(\frac{121}{2}\right)$ 的值为 $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

14. 若 p, q 是方程 $x^2 + 6x + 5a - a^2 = 0$ 的两根, 且满足 $q + 8p = p^3$, 则 a 的可能取值有多少个?

解: 由韦达定理可知

$$\begin{cases} p + q = -6 \\ pq = 5a - a^2 \\ \Delta = 36 - 4(5a - a^2) \end{cases}$$

又 $q + 8p = p^3$, 则

$$(p-1)(p-2)(p+3) = 0$$

情形一: 当 $p=1$ 时, $q=-7$, 则

$$a^2 - 5a - 7 = 0, \text{ 且 } \Delta > 0$$

所以此时 a 的值有两个

情形二: 当 $p=2$ 时, $q=-8$, 则

$$a^2 - 5a - 16 = 0, \text{ 且 } \Delta > 0$$

所以此时 a 的值有两个

情形三: 当 $p=-3$, $q=-3$, 则

$$a^2 - 5a + 9 = 0, \text{ 易知此时 } a \text{ 无解}$$

综上所述: a 的可能值有 4 个

15. $\triangle ABC$ 的顶点 $A(-p, 0)$, $B(p, 0)$, 其内心在直线 $x=q$ 上, 且 $p > q > 0$, 则顶点 C 的轨迹方程为_____

解: 易知 C 点的轨迹为双曲线, 且 $c=p$, $a=q$, 所以顶点 C 的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{q^2} - \frac{y^2}{p^2 - q^2} = 1 (x > q)$$