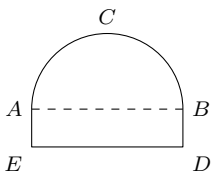
2019 年全国高中数学联赛浙江赛区初赛试题

(说明: 本试卷满分 150 分, 共 13 题,10 道填空题,3 道解答题. 填空题的答案和解答题的解答过程书写在答题纸上.)

一、 填空题 (每题 8 分, 共 80 分)

1. 如图, 将长度为 1 的线段分为 x, y 两段, 再将长度为 x 的线段弯成半圆周 ACB, 将长度为 y 的线段折成矩形 $ABDE$ 三条边 (BD, DE, EA), 构成闭 "曲边形"$ACBDEA$, 则该曲边形面积的最大值为_____.

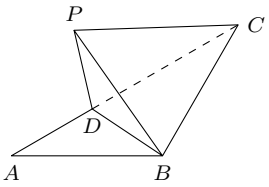


2. 已知集合 $A=\{k+1, k+2, \cdots, k+n\}, k, n$ 为正整数, 若集合 A 中所有元素之和为 2019, 则当 n 取最大值时, 集合 $A=$_____.

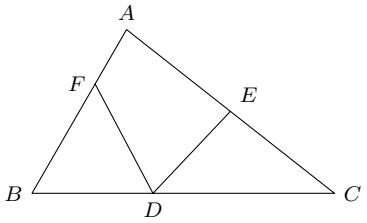
3. 设 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)}$ 的最大值为_____.

4. 设三条不同的直线:$l_1: ax+2by+3(a+b+1)=0, l_2: bx+2(a+b+1)y+3a=0, l_3: (a+b+1)x+2ay+3b=0$, 则它们相交于一点的充分必要条件为 _____.

5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ABC=120^\circ, AB=BC=2$. 在 AC 边上取一点 D(不含 A, C), 将 $\triangle ABD$ 沿线段 BD 折起, 得到 $\triangle PBD$. 当平面 PBD 垂直平面 ABC 时, 则 P 到平面 ABC 距离的最大值为_____.



6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中,D, E, F 分别为 BC, CA, AB 上的点, 且 $CD=\dfrac{3}{5}BC, EC=\dfrac{1}{2}AC, AF=\dfrac{1}{3}AB$. 设 P 为四边形 $AEDF$ 内一点 (P 点不在边界上). 若 $\overrightarrow{DP}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DC}+x\overrightarrow{DE}$, 则实数 x 的取值范围为_____.



7. 设 $f(x)=\dfrac{1010x+1009}{1009x+1010}$, 定义 $f^{(1)}(x)=f(x), f^{(i)}(x)=f(f^{(i-1)}(x)), i=2,3,\cdots$, 则 $f^{(n)}(x)=$_____.

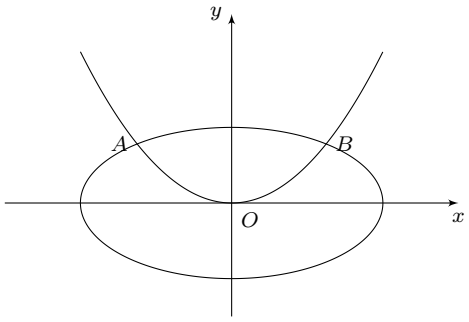
8. 设 z_1, z_2 为复数, 且满足 $|z_1|=5, \dfrac{z_1}{z_2}=2+\mathrm{i}$(其中 i 为虚数单位), 则 $|z_1-z_2|$ 取值为_____.

9. 设 $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n, n \geqslant 1$. 若 $1 \leqslant x_7 \leqslant 2$, 则 x_8 的取值范围为_____.

10. 在复平面上, 任取方程 $z^{100}-1=0$ 的三个不同的根为顶点组成三角形, 则不同的锐角三角形的数目为_____.

二、 解答题 (第 11 题 20 分, 第 12,13 题各 25 分)

11. 如图, 椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$, 抛物线 $C_2:x^2=2py(p>0)$, 设 C_1,C_2 相交于 A,B 两点,O 为坐标原点.
(1) 若 $\triangle ABO$ 的外心在椭圆上, 求实数 p 的值;
(2) 若 $\triangle ABO$ 的外接圆经过点 $N(0,\dfrac{13}{2})$, 求实数 p 的值.



12. 设 $a_i,b_i>0(1\leqslant i\leqslant n+1),b_{i+1}-b_i\geqslant\delta>0(\delta$ 为常数). 若 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$, 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i\sqrt[i]{a_1a_2\cdots a_ib_1b_2\cdots b_i}}{b_{i+1}b_i}<\frac{1}{\delta}.$$

13. 设 X 是有限集,t 为正整数,F 是包含 t 个子集的子集族:$F=\{A_1,A_2,\cdots,A_t\}$. 如果 F 中的部分子集构成的集族 S 满足: 对 S 中任意两个不相等的集合 A,B,$A\subset B,B\subset A$ 均不成立, 则称 S 为反链. 设 S_1 为包含集合最多的反链,S_2 是任意反链. 证明存在 S_2 到 S_1 的单射 f, 满足 $\forall A\in S_2,f(A)\subset A$ 或 $A\subset f(A)$ 成立.