

2019 年北京大学自主招生试题解析

福建省厦门市 叶超杰

1. 若 $a, b \in R^+$, 求满足不等式 $\sqrt{x^2 - \sqrt{2}ax + a^2} + \sqrt{x^2 - \sqrt{2}bx + b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ 的 x 取值范围

解: 因为

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{x^2 - \sqrt{2}ax + a^2} + \sqrt{x^2 - \sqrt{2}bx + b^2} \\ &= \sqrt{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + \left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} + \sqrt{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2 + \left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2} \end{aligned}$$

上式的几何意义为, 平面直角坐标系 xOy 中, x 轴上一动点到两个动点 $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$

$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}b, \frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$ 的距离之和, 设 B 关于 x 轴的对称点为 B' , 则

$$P \geq \sqrt{a^2 + b^2}$$

而 $P \leq \sqrt{a^2 + b^2}$, 所以此时 x 为直线 $B'A$ 与 x 轴交点的横坐标, 则

$$l_{B'A}: y = \frac{b+a}{b-a} \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}b\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}b$$

令 $y=0$, 解得

$$x = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$$

所以 x 取值范围为 $x = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$

2. 复数 z_1, z_2 满足 $|z_1 - 3i| = 2, |z_2 - 8| = 1$, 则由复数 $z_1 - z_2$ 围成的面积是 ()

- A. 4π B. 8π C. 10π D. 以上全错

解: 设 $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i$, 由题意可知

$$x_1^2 + (y_1 - 3)^2 = 4, (x_2 - 8)^2 + y_2^2 = 1$$

令

$$\begin{cases} x_1 = 2\cos\alpha \\ y_1 = 2\sin\alpha + 3 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = \cos\beta + 8 \\ y_2 = \sin\beta \end{cases}, \begin{cases} x = x_1 - x_2 \\ y = y_1 - y_2 \end{cases}$$

则

$$(x + 8)^2 + (y - 3)^2 = 5 - 4\cos(\alpha - \beta)$$

所以复数 $z_1 - z_2$ 围成的面积为一个圆环的面积

$$S = (9 - 1)\pi = 8\pi$$

故选B

3. 从1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9取出4个不同的数, 分别记为 a, b, c, d , 求 $a + b$ 和 $c + d$ 奇偶性相同的概率

$$\text{解: } P = \frac{A_4^4 + 2A_4^2A_5^2 + A_5^4 + 4C_5^1C_4^1C_4^1C_3^1}{A_9^4} = \frac{11}{21}$$

4. 正方形 $ABCD$, k 为 $\triangle BCD$ 内一点, 满足 $\angle KDB = \angle KBC = 10^\circ$, 则 $\angle KAD =$ _____

- A. 45° B. 60° C. 70° D. 以上错误

解: 设正方形边长为1, 在 $\triangle BKD$ 中, 由正弦定理可知

$$\frac{DK}{\sin 35^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}$$

则

$$DK = 2\sin 35^\circ$$

在 $\triangle ADK$ 中, 由余弦定理可知

$$AK^2 = 1 + 4\sin^2 35^\circ - 4\sin 35^\circ \cos 55^\circ = 1$$

则 $\triangle DAK$ 为等腰三角形, 所以 $\angle KAD = 70^\circ$, 故选C

5. 设 $x, y \in Z$, 若 $(x^2 + x + 1)^2 + (y^2 + y + 1)^2$ 为完全平方数, 则数对 (x, y) 有 () 组

- A. 0 B. 1 C. 无穷多 D. 以上全错

解: 令 $A = x^2 + x + 1, B = y^2 + y + 1$

情形一: 当 x 为奇数时, 则

A 为奇数

情形二: 当 x 为偶数时, 则

A 也为奇数

同理可得 B 也为奇数, 而两个奇数的平方和一定不会是完全平方数

综上所述: 选 A

6. 方程 $\sin x = \frac{x}{13}$ 的根的个数为 ()

- A. 3 个 B. 7 个 C. 1 个 D. 以上全错

解: 令 $f(x) = \sin x, g(x) = \frac{x}{13}$ 的图像可知, 只有 7 个根, 故选 B

7. 设 P 为椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 上一点, F_1, F_2 为椭圆的左、右焦点, I 为 $\triangle PF_1F_2$ 的内心, 若内切圆半径为 1, 求 IP 的长度

解: 设内切圆半径为 r , $\triangle PF_1F_2$ 面积为 S , $\angle F_1PF_2 = \alpha$, 因为 $r = \frac{2S}{2a + 2c}$, 解得

$$S = 8$$

又 $S = b^2 \tan \frac{\alpha}{2}$, 解得

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

则

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

所以

$$IP = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{5}$$

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{k+1} + a_k = 4k + 3 (k=1, 2, \dots)$, 求 $a_2 + a_{2020}$

解: 因为 $a_{k+1} + a_k = 4k + 3$, 则

$$a_{n+2} - a_n = 4$$

情形一: 当 n 为偶数时, 则

$$a_n = a_2 + 4\left(\frac{n}{2} - 1\right) = 2n + a_2 - 4$$

情形二: 当 n 为奇数时, 则

$$a_n = a_1 + 4\left(\frac{n+1}{2} - 1\right) = 2n + a_1 - 2$$

所以 $a_2 + a_{2020} = 4036 + 2a_2$, 因为 a_2 不确定, 所以 $a_2 + a_{2020}$ 也不确定