

2019 东南赛

乙一

1 高一年级组

题 1. 求最大的实数 k , 使得对任意正数 a, b , 均有

$$(a+b)(ab+1)(b+1) \geq kab^2$$

答案 1. 原不等式

$$\Leftrightarrow (a^2b + (1+b^2)a + b)(b+1) \geq kab^2$$

$$\Leftrightarrow \left(ab + (1+b^2) + \frac{b}{a}\right)(b+1) \geq kb^2$$

单独考虑左边, 左边可以看成是一个 a 的函数, b 为参数, 那么关于 a 取最小值的时候有

$$\left(ab + (1+b^2) + \frac{b}{a}\right)(b+1) \geq \left(2\sqrt{ab \cdot \frac{b}{a}} + (1+b^2)\right)(b+1) = (b+1)^3$$

于是我们只需要取 $k \leq (b+1)^3b^{-2}$ 即可.

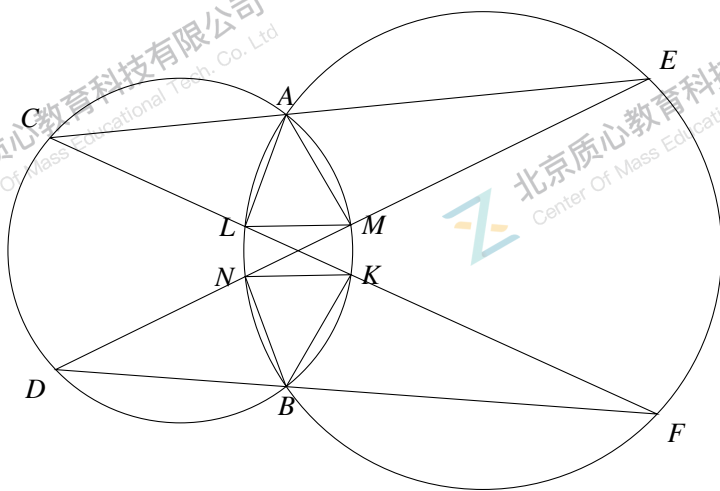
设 $f(b) = \frac{(b+1)^3}{b^2}$, 那么 $f'(b) = \frac{(b+1)^2(b-2)}{b^3}$, 演算可知 $b=2$ 是 f 的极小值点, 那么 $f_{\min} = f(2) = \frac{27}{4}$, 即 $k_{\max} = \frac{27}{4}$, 取极值时有 $a=1, b=2$.

评析 1. 不等式的左边和右边都不对称, 但是右边只是一个 kab^2 , 所以可以考虑一下类似于分离变量的方法把 a 或 b^2 挪到左边去. 本答案用的是把 a 挪到左边的方法, 把 b^2 挪到左边也有类似的做法, 但是会变得比较复杂, 有兴趣的同学不妨一试.

该题做法非常多，本篇答案给出的做法只是一种以高中课本知识即可解决的方法，但是如果不想用到函数求导这种比较偏流氓的方法的话，纯粹不等式的方法也是可行的。比如，

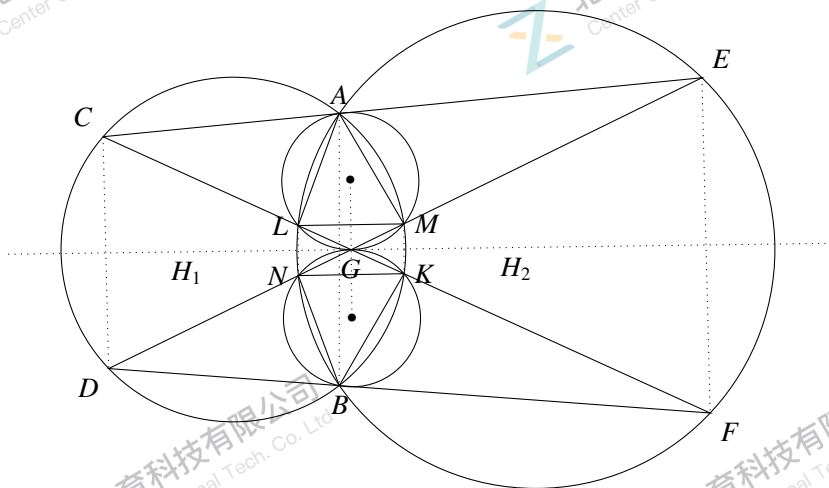
$$\begin{aligned}(a+b)(ab+1)(b+1) &= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2}\right) \left(\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + 1\right) \left(\frac{b}{2} + \frac{b}{2} + 1\right) \\ &\geq 3 \left(a \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2}\right)^{1/3} \cdot 3 \left(\frac{ab}{2} \cdot \frac{ab}{2} \cdot 1\right)^{1/3} \cdot 3 \left(\frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot 1\right)^{1/3} \\ &= \frac{27}{4} ab^2\end{aligned}$$

题 2. 如图，两圆 Γ_1, Γ_2 交于 A, B 两点， C, D 为 Γ_1 上两点， E, F 为 Γ_2 上两点，满足 A, B 分别在线段 CE, DF 内，且线段 CE, DF 不相交。设 CF 于 Γ_1, Γ_2 分别交于点 $K(\neq C), L(\neq F)$ ， DE 于 Γ_1, Γ_2 分别交于点 $M(\neq D), N(\neq E)$ ，



证明：若 $\triangle ALM$ 的外接圆与 $\triangle BKN$ 的外接圆相切，则这两个外接圆的半径相等。

答案 2. 如图, 记 G 为 CF, DE 的交点, $\triangle ALM$ 和 $\triangle BKN$ 的外接圆圆心为 O_A, O_B , 取两圆切线上任意一点为 H_1 , 切线另一边的任意一点为 H_2 , 连接 $CD, LN, AB, MK, EF, O_A O_B$,



由于 $\angle DCA + \angle DBA = \angle FBA + \angle FEA = 180^\circ$, 我们有 $\angle DCA + \angle FEA = 180^\circ$, 即 $CD \parallel EF$. 另外, 由圆幂定理我们有 $\triangle GLN \sim \triangle GEF$, $\triangle GKM \sim \triangle GDC$, 于是我们有 $\angle GLN = \angle GDC = \angle GEF = \angle GKM$, 即 $LN \parallel MK$.

另一方面, 那么因为 $CD \parallel EF$, 我们有 $\angle LGM = \angle CDG + \angle EFG = 180^\circ - \angle CAM + 180^\circ - \angle EAL = 180^\circ - \angle LAM$, 即 G 在 $\odot O_A$ 上. 同理 G 在 $\odot O_B$ 上. 由于 $\odot O_A$ 与 $\odot O_B$ 相切, 我们知道 G 在 $O_A O_B$ 上.

那这个时候 G 在 $LK, MN, O_A O_B$ 上, 我们知道 $\angle GKN = \angle NGH_1 = \angle MGH_2 = \angle GLM$, 故 $LM \parallel KN$. 由于 $LN \parallel KM$, 我们知道 $LMKN$ 是一个平行四边形, 那么 $\triangle LGM \cong \triangle KGN$, 那么两个三角形的外接圆半径相等, $\triangle ALM$ 和 $\triangle BKN$ 的外接圆半径相等.

评析 2. 熟悉平面几何的同学应该很快就可以凭经验知道 $CD \parallel EF$, $LN \parallel MK$, 且 G 在这两个外接圆上. 余下的部分, 多观察题图可以猜测 $LM \parallel NK$, 如果有这一条的话我们很容易推出两个外接圆的半径相等, 剩下就是一些比

较角度的工作. 总体来说本题偏简单.

题 3. 函数 $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ 满足: 对任意正整数 a, b , 均有 $f(ab)$ 整除 $\max\{f(a), b\}$, 是否一定存在无穷多个正整数 k , 使得 $f(k) = 1$? 证明你的结论.

答案 3. 一定存在无穷多个这样的 k , 使得 $f(k) = 1$.

若不然, 假设只有有限多个 k 使得 $f(k) = 1$, 我们分两种情况讨论.

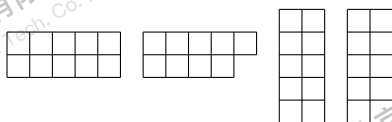
若这样的 k 不止一个, 那我们可以取到最大的一个, 还是记为 k , 那么对任意 $n > k$, 我们有 $f(n) > 1$. 对任意一个素数 p , 由于 $pk > k$, 我们有 $f(pk) > 1$. 但是由于 $f(pk)$ 整除 $\max\{f(k), p\} = \max\{1, p\} = p$, 我们知道 $f(pk) = p$. 对任意两个素数 p, q , 不妨 $p \leq q$, 那么 $f(pqk)$ 整除 $\max\{f(pk), q\} = \max\{p, q\} = q$.

那么我们现在考虑三个素数 p, q, r 满足 $p \leq q \leq r$, 但是 $pq > r$, (比如, $p = 2, q = 3, r = 5$). 那么一方面, $f(pqrk)$ 整除 $\max\{f(rk), pq\} = \max\{r, pq\} = pq$. 另一方面, $f(pqrk)$ 整除 $\max\{f(pqk), r\} = \max\{q, r\} = r$. 但是 $(pq, r) = 1$, 所以 $f(pqrk) \mid 1$, 即 $f(pqrk) = 1$. 但是 $pqrk > k$, 矛盾. 所以一定存在无穷多个 k , 使得 $f(k) = 1$.

评析 3. 欧几里德证明素数无限的方法是数论里面很典范的一种证明方式, 在证明某一类数字有无限多个的时候, 通过反证假设这一类数字只有有限个, 不妨设为 $k_1 < k_2 < \dots < k_n$, 套路上我们可以考虑 $k_n, k_n + 1, k_1 k_2 \dots k_n, k_1 k_2 \dots k_n + 1, [k_1, k_2, \dots, k_n]$ 等数字来找到矛盾, 本题也是如此.

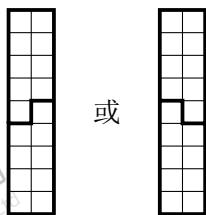
值得一说的是, 在这个题目中, 对于任何整数 n , 我们可以定义一个新的函数 $f_n(a) = f(an)$, 那么 $f_n(ab) = f(abn)$ 要整除 $\max\{f(an), b\} = \max\{f_n(a), b\}$. 也就是说 f_n 也是一个满足相同性质的函数, 那么实际上, 我们可以证明对任意一个 k 满足 $f(k) = 1$, 那么 $\{mk\}_{m=1}^{\infty}$ 中有无限多个 m 满足 $f(mk) = 1$. 更复杂的话, 有兴趣的同学可以自行尝试推导一下这个 $f(k) = 1$ 的解的密度.

题 4. 将一个 2×5 方格表按照水平方向或者竖直方向放置, 然后去掉其四个角上的任意一个小方格, 剩下由 9 个小方格组成的八种不同图形皆称为“五四旗”, 或“八一旗”, 简称为“旗旗”, 如图所示.



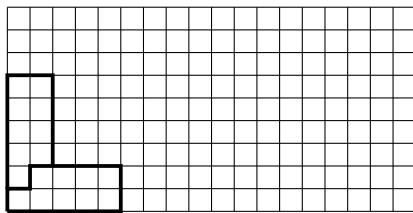
现在一个固定放置的 9×18 方格表. 若用 18 面上述旌旗将其完全覆盖, 问共有多少种不同的覆盖方案? 说明理由.

答案 4. 首先显然, 一个 9×2 的格子里面放置两面旌旗一共有两种方法, 如下图:



那么 9×18 的格子中可以放入 9 个 9×2 的格子, 所以每个 9×2 的格子里有两种可能, 一共 $2^9 = 512$ 种放法. 下面证明没有别的放法.

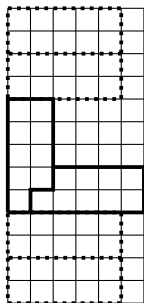
首先我们考察 9×18 的侧边, 即变成为 9 这条边. 若我们用 18 面旌旗把这些格子填满了, 那么我们考察这条边上放的旌旗. 旌旗的几条边长为 5, 4, 2, 1. 若旌旗边长为 1 的边靠着底边, 那么 1 的左右某一边的格子只能用另一面旌旗的边长为 5 的边来填, 如图:



那么这条边上剩下三个格子, 无法用 2 和 1 来填满 (因为 1 需要伴随 5).

若旌旗边长为 2 的边靠着底边, 那么这时侧边只能是 $9 = 5 + 2 + 2$ 用三条旌旗来覆盖, 这个时候两条旌旗横着用边长为 2 的底边来接触侧边. 同

时第二列只有一个空着的格子,若要填住这个格子只能用一条旌旗的旗头来填,所以只能是如图的填法:



其中虚线表示两面用边长为 2 的底边填充格子侧边的旌旗可以放在用边长为 5 的底边填充侧边的旌旗的上面或者下面. 于是无论如何第三列总会
出现三个连续的空格无法被旌旗填充,所以侧边只能用 $5+4$ 的填法,那么消
去这两列之后新的侧边也只能用 $5+4$ 的填法来填充,用这种归纳的想法可
知没有其他的填法.

评析 4. 本题的答案非常送分,证明的方法却变得非常朴素.一般遇到填格子的
题目的话很常规的一种套路就是用染色的方法,我们可以斑马条纹染色,
也可以国际象棋棋盘染色,但是这个题目似乎用染色的方法做不出来,反而
用这种硬讨论的朴素方法可以做,似乎有时也需要跳出套路来想问题.

题 5. 称集合 $S = \{1928, 1929, 1930, \dots, 1949\}$ 的一个子集 M 为”红色”的子
集,若 M 中任意两个不同的元素之和均不被 4 整除. 用 x, y 分别表示 S 的
红色的四元子集的个数,红色的五元子集的个数. 试比较 x, y 的大小,并说
明理由.

答案 5. 显然,若 $m \in M$ 满足 $m \equiv i \pmod{4}$, 那么任何 n 满足 $n \equiv 4 - i$

(mod 4) 都不能在 4 里面. 所以将 S 按照模 4 的余数分为 4 种:

$$S_0 = \{1928, 1932, 1936, 1940, 1944, 1948\}$$

$$S_1 = \{1929, 1933, 1937, 1941, 1945, 1949\}$$

$$S_2 = \{1930, 1934, 1938, 1942, 1946\}$$

$$S_3 = \{1931, 1935, 1939, 1943, 1947\}$$

那么 $|S_0| = |S_1| = 6$, $|S_2| = |S_3| = 5$. 那么入前所述, S_0, S_2 的元素顶多有一个在 M 中, S_1, S_3 的元素不能同时在 M 中, 所以四元红色子集有四种情况:

四个元素都属于 S_1 或 S_3 ;

一个元素属于 S_0 , 剩下三个元素都属于 S_1 或 S_3 ;

一个元素属于 S_2 , 剩下三个元素都属于 S_1 或 S_3 ;

一个元素属于 S_0 , 一个元素属于 S_2 , 剩下两个元素都属于 S_1 或 S_3 .

$$\text{所以 } x = C_6^4 + C_5^4 + 6 \times C_6^3 + 6 \times C_5^3 + 5 \times C_6^3 + 5 \times C_5^3 + 6 \times 5 \times C_6^2 + 6 \times 5 \times C_5^2 = 1100.$$

$$\text{同理, } y = C_6^5 + C_5^5 + 6 \times C_6^4 + 6 \times C_5^4 + 5 \times C_6^4 + 5 \times C_5^4 + 6 \times 5 \times C_6^3 + 6 \times 5 \times C_5^3 = 1127.$$

所以 $x < y$.

评析 5. 这个题目就算是出自高考全国卷都不会让人感觉到任何奇怪...

题 6. 设 a, b, c 为给定的三角形的三边长. 若正实数 x, y, z 满足 $x + y + z = 1$, 求 $axy + byz + czx$ 的最大值.

答案 6. 考虑拉格朗日乘子 $\mathcal{L} = axy + byz + czx - \lambda \cdot (x + y + z - 1)$, 那么

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\lambda + ay + cz$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -\lambda + ax + bz$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -\lambda + cx + by$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 1 - x - y - z$$

那么 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$ 的解为:

$$\begin{aligned} x &= \frac{b(c+a-b)}{2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2}, & y &= \frac{c(a+b-c)}{2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2} \\ z &= \frac{a(b+c-a)}{2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2}, & \lambda &= \frac{-2abc}{2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2} \end{aligned}$$

于是

$$(axy + byz + czx)_{\max} = \frac{abc}{2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2}$$

评析 6. 三元二次极值问题用拉格朗日乘子比较容易解决, 因为拉格朗日量的各种偏导数都是线性的, 最终我们只需要解决一个线性方程即可, 所以这篇答案中用了最简单暴力的方法. 事实上, 这个题目可以用几何不等式的方法来做, 或者直接用嵌入不等式来做, 但是我不会.

题 7. 设 $ABCD$ 为平面内给定的凸四边形. 证明: 存在一条直线上的四个不同的点 P, Q, R, S 和一个正方形 $A'B'C'D'$, 使得 P 在直线 AB 和 $A'B'$ 上, 使得 Q 在直线 BC 和 $B'C'$ 上, 使得 R 在直线 CD 和 $C'D'$ 上, 使得 S 在直线 DA 和 $D'A'$ 上.

答案 7. 对于任意的四边形 $ABCD$ (甚至不要求凸), 我们都可以找一条直线 l 使得 l 不在任何一条边上, 也不与任何一条边平行, 并且 AB, BC, CD, DA 分别与 l 交于四个不同的点 P, Q, R, S . 我们将证明一个更强的结论: 若 P, Q, R, S 是一条直线 l 上的四个不同的点, 那么我们可以找到一个正方形 $A'B'C'D'$, 使得 $A'B', B'C', C'D', D'A'$ 分别过 P, Q, R, S 点.

我们不妨设 l 就是 y 轴 (不然通过旋转即可), P, Q, R, S 的纵坐标为 p, q, r, s . 那么考虑一个斜率参数 k , 过 P, R 做斜率为 k 的直线 $y = kx + p$ 和 $y = kx + r$, 过 Q, S 做斜率为 $-\frac{1}{k}$ 的直线 $y = -\frac{1}{k}x + q$ 和 $y = -\frac{1}{k}x + s$. 那么设这四条直线就是 $A'B', C'D', B'C', D'A'$, 于是我们可以解得

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{k}{1+k^2}(s-p), \frac{1}{1+k^2}(k^2s+p) \right), & B &= \left(\frac{k}{1+k^2}(q-p), \frac{1}{1+k^2}(k^2q+p) \right) \\ C &= \left(\frac{k}{1+k^2}(q-r), \frac{1}{1+k^2}(k^2q+r) \right), & D &= \left(\frac{k}{1+k^2}(s-r), \frac{1}{1+k^2}(k^2s+r) \right) \end{aligned}$$

于是

$$1 = \frac{|AB|^2}{|AD|^2} = \frac{k^2(q-s)^2}{(p-r)^2}$$

即

$$k = \pm \frac{p-r}{q-s}$$

那么由于 p, q, r, s 互不相同可知存在这样的斜率, 使得 $A'B'C'D'$ 是正方形.

评析 7. 这道平面几何的题目非常的非主流, 同学们如果直接从平几方法来构造的话可能会被卡很久, 这里给了一种解析的方法. 实际上这个题目也可以用复数做, 假设 $A'B'C'D'$ 的中心所对应的复数为 z , 那么正方形的四个点可以设为 $z+t, z+it, z+i^2t, z+i^3t$, 这种做法也一样可行.

题 8. 对于正整数 $x > 1$, 定义集合

$$S_x = \{p^\alpha \mid p \text{ 为 } x \text{ 的素因子}, \alpha \text{ 为非负整数}, p^\alpha \mid x, \text{ 且 } \alpha \equiv v_p(x) \pmod{2}\}$$

其中 $v_p(x)$ 表示 x 的标准分解式中素因子 p 的次数, 并记 $f(x)$ 为 S_x 中所有元素之和. 约定 $f(1) = 1$.

今给定正整数 m . 设正整数数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 满足: 对任意整数 $n > m$, $a_{n+1} = \max\{f(a_n), f(a_{n-1} + 1), \dots, f(a_{n-m} + m)\}$.

(1) 证明: 存在常数 A, B ($0 < A < 1$), 使得当正整数有至少两个不同的素因子时, 必有 $f(x) < A(x) + B$;

(2) 证明: 存在正整数 Q , 使得对所有 $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n < Q$.

答案 8. (1) 设 $x = p_1^{s_1} \cdots p_k^{s_k}$ ($k \geq 2$), 直接计算可以有

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{s_i}{2} \rfloor} p_i^{s_i-2j} = \sum_{i=1}^k p_i^{s_i} \cdot \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{s_i}{2} \rfloor} p_i^{-2j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^k p_i^{s_i} \cdot \frac{1 - \frac{1}{p_i^{2 \lfloor \frac{s_i}{2} \rfloor + 2}}}{1 - \frac{1}{p_i^2}} < \sum_{i=1}^k p_i^{s_i} \cdot \frac{1}{1 - p_i^{-2}} \\ &< \sum_{i=1}^k p_i^{s_i} \cdot \frac{1}{1 - 2^{-2}} = \sum_{i=1}^k \frac{4}{3} p_i^{s_i} \end{aligned} \quad (\text{因为 } p_i \text{ 最小为 } 2)$$

记录 $a_i = p_i^{s_i}$, 那么 $a_i \geq 2$, 我们重点考虑 $\sum a_i$ 和 $\prod a_i$ 之间的大小关系.

令 $f(a_1, \dots, a_k) = \lambda \cdot \sum a_i - \prod a_i$. 那么 $\frac{\partial f}{\partial a_i} = \lambda - \prod_{j \neq i} a_j$, 所以事实上若 $\lambda \leq \prod_{j \neq i} a_j$ 对任意 i 都成立, 那么在 a_i 变小的时候 f 变大, 则 $f(a_1, \dots, a_k) \leq f(2, \dots, 2) = 2\lambda k - 2^k$. 用求导的方法很容易知道 $2\lambda k - 2^k$ 会在 $k = \ln(2\lambda \cdot \ln^{-1}(2)) \cdot \ln^{-1}(2) \leq \ln(2 \times 2 \times \ln^{-1}(2)) \cdot \ln^{-1}(2) < 3$ 的时候取到, 那么在整数的取值上, 我们取 $k = 2, 3$, 得到,

$$2\lambda \times 2 - 2^2 = 4\lambda - 4$$

$$2\lambda \times 3 - 2^3 = 6\lambda - 8$$

由于 $\lambda \leq 2$, 我们知道 $2\lambda k - 2^k \leq 4\lambda - 4$. 于是

$$\begin{aligned} f(x) &< \sum_{i=1}^k \frac{4}{3} a_i \leq \frac{4}{3\lambda} \cdot \left(2\lambda k - 2^k + \prod_{i=1}^k a_i \right) \\ &\leq \frac{4}{3\lambda} \cdot \left(4\lambda - 4 + \prod_{i=1}^k a_i \right) = \frac{4}{3\lambda} \cdot x + \frac{16}{3} \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda} \end{aligned}$$

那么我们只需要取一个 λ 使得 $\frac{4}{3} < \lambda \leq 2$ 即可, 比如我们取 $\lambda = 2$ 就会得到 $f(x) < \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$.

(2) 若不存在这样的 Q , 那么存在 a_n 使得 $a_n > 2m+8$, 不妨设 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-m}$ 中最大的是 a , 那么显然 $a > 2m+8$. 于是

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \max\{f(a_n), f(a_{n-1} + 1), \dots, f(a_{n-m} + m)\} \\ &< \max\left\{\frac{2}{3}a_n + \frac{8}{3}, \dots, \frac{2}{3}(a_{n-m} + m) + \frac{8}{3}\right\} \\ &\leq \max\left\{\frac{2}{3}(a_n + m) + \frac{8}{3}, \dots, \frac{2}{3}(a_{n-m} + m) + \frac{8}{3}\right\} \\ &= \frac{2}{3} \max\{a_n, \dots, a_{n-m}\} + \frac{2}{3}m + \frac{8}{3} \\ &\leq \frac{2}{3}a + \frac{2m+8}{3} < a \end{aligned}$$

所以归纳可证明 $a_{n+k} < a$, 这与无上界是矛盾的. 所以一定存在这么一个 Q , 使得 $a_n < Q$ 对所有 $n \in \mathbb{N}^*$ 都成立.

评析 8. 数论中出现素因子的加法一般都会变得很难, 但是这个题目主要通过估计就可以达到要求, 所有同学做题的时候一定要注意看题目, 不要看一眼觉得很复杂就马上放弃, 这个题还是可做的. 从答案上看这个估计并不太难, 只要敢拆敢放就能做出来, 实际上这种估计也的确没有用到任何解析数论的方法, 所有的步骤都是高中生都可以做出来的, 但是我还是建议各位同学在学习潘承洞, 潘承彪两位先生的《初等数论》的时候把后面章节的内容也看一看, 素数定理和 Eratosthenes 筛法的基础知识并不会太难, 了解一下并没有什么坏处.

另外, 这篇答案的放缩放得非常狠, 比如公式第二行的不等号基本上是 s_i 直接放到无穷, 第三行的不等号就直接把所有 p_i 都放成 2, 之后讨论函数的时候又把所有 $p_i^{s_i}$ 当 2 来做, 可以说 $\frac{2}{3}$ 是一个非常粗略的答案. 有兴趣的同学可以算算 $k=2$ 的情况玩玩, 看看自己能把这个不等号放到多小.

2 高二年级组

题 1. 对任意实数 a , 用 $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数, 记 $\{a\} = a - [a]$.

是否存在正整数 m, n 及 $n+1$ 个实数 $x_0, x_1, \dots, x_n$, 使得

$$x_n = 428, x_n = 1928, \frac{x_{k+1}}{10} = \left[\frac{x_k}{10} \right] + m + \left\{ \frac{x_k}{5} \right\} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

成立? 证明你的结论.

答案 1. 显然我们有 $\left[\frac{x_{k+1}}{10} \right] = \left[\frac{x_k}{10} \right] + m, \left\{ \frac{x_{k+1}}{10} \right\} = \left\{ \frac{x_k}{5} \right\}$. 那么我们来考察 $\left\{ \frac{x_{k+1}}{10} \right\}$ 的小数部分, 即 $\frac{x_{k+1}}{10}$ 的个位数.

显然无论 m 是多少, 我们都有:

$$10 \times \left\{ \frac{x_0}{10} \right\} = 8$$

$$10 \times \left\{ \frac{x_1}{10} \right\} = 10 \times \left\{ \frac{8}{5} \right\} = 6$$

$$10 \times \left\{ \frac{x_2}{10} \right\} = 10 \times \left\{ \frac{6}{5} \right\} = 2$$

$$10 \times \left\{ \frac{x_3}{10} \right\} = 10 \times \left\{ \frac{2}{5} \right\} = 4$$

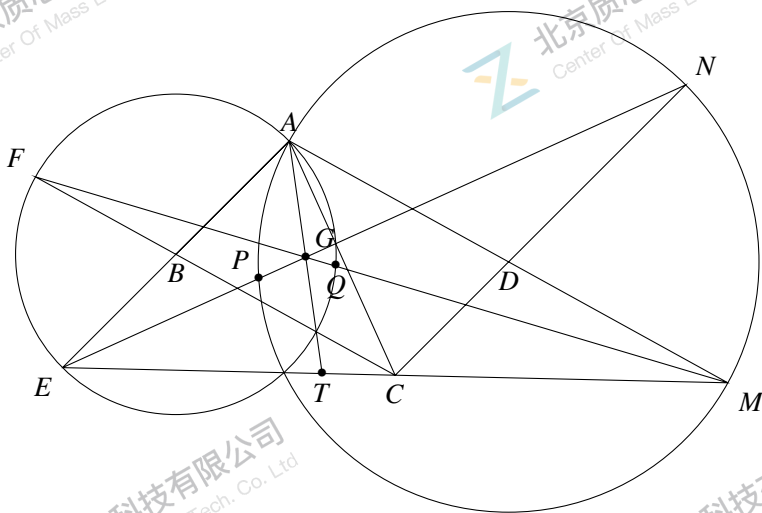
$$10 \times \left\{ \frac{x_4}{10} \right\} = 10 \times \left\{ \frac{4}{5} \right\} = 8$$

很明显, x_k 的个位数为 8 当且仅当 $4 \mid k$. 也就是说 $4 \mid n$.

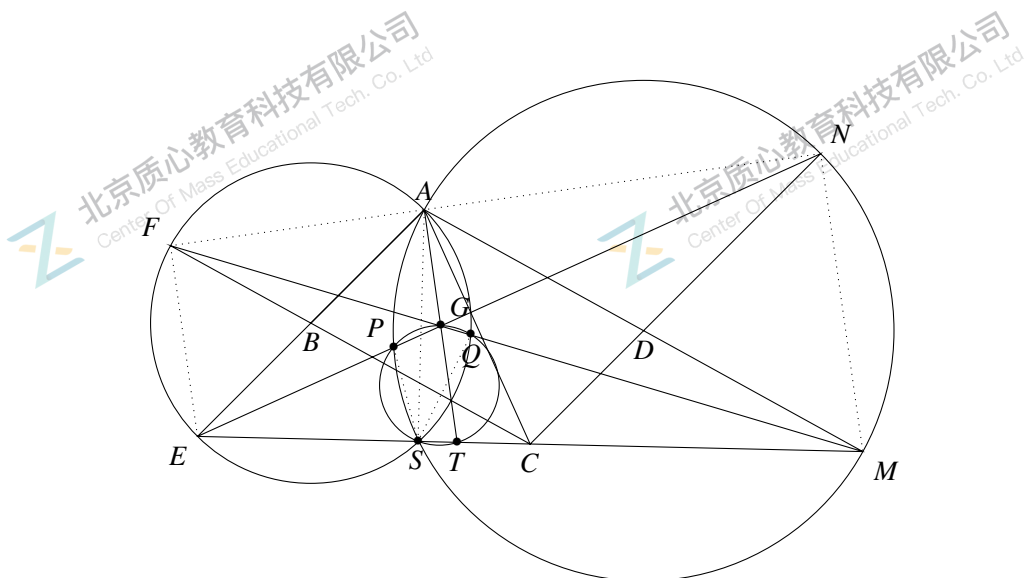
那么对于 $\left[\frac{x_k}{10} \right]$, 我们有 $\left[\frac{x_k}{10} \right] = \left[\frac{x_0}{10} \right] + km$, 及 $192 = 42 + mn$, 但是 $192 - 42 = 150$, 然而 $4 \nmid 150$, 所以不存在这样的 m 和 n .

评析 1. 这个题目很发现的就是递推公式中的分母只有 10 和 5, 进而发现在 10 进制下, 所有数字去掉个位之后应该是一个等差数列的. 那么问题就只剩下个位数的规律, 实在想不到的话随便写几个数就可以发现了. 本题偏简单.

题 2. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD \neq 90^\circ$, 以 B 为圆心, BA 为半径的圆与 AB, CB 的延长线分别交于点 E, F , 以 D 为圆心, DA 为半径的圆与 AD, CD 的延长线分别相交于点 M, N , 直线 EN, FM 相交于点 G , 直线 AG, ME 相交于点 T , 直线 EN 与圆 D 相交于点 $P(\neq N)$, 直线 MF 与圆 B 相交于点 $Q(\neq F)$. 证明: G, P, T, Q 四点共圆.



答案 2. 如图, 设两圆的另一个交点为 S , 该连线的都连一连.



那么 $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle EBF = \frac{1}{2}\angle ABC$, 同理 $\angle MAN = \frac{1}{2}\angle ADC = \frac{1}{2}\angle ABC$, 所以 $\angle EAF + \angle BAD + \angle MAN = \angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$, 即 F, A, N 共线. 同时 $\angle EAF = \angle MAN$, $\angle AFE = \angle ANM = 90^\circ$, 那么 $\triangle AEF \sim \triangle AMN$, 并且 $\angle AFE + \angle ANM = 180^\circ$, 有 $EF \parallel MN$. 那么我们有 $FG : GM = EF : MN = AF : AN$, 则 $EF \parallel AG \parallel MN$.

由于 S 在两个圆上, 我们有 $\angle ASE + \angle ASM = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, 即 E, S, M 共线. 于是 $\angle GTS = \angle ATE = 180^\circ - \angle FEM = \angle FAS = \angle FQS = \angle GQS$, 即 T, S, G, Q 共圆. 由对称性我们同理也有 T, S, G, P 共圆, 所以 G, P, Q, S, T 五点共圆.

评析 2. 这个题目条件太强了, 证明并不难, 特别只要发现 S 点之后就很容易证明, 所以我们考试做题一定要好好画图, 从图上看 E, S, M 共线并且 G, P, Q, S, T 五点共圆.

题 3. 今有 n 人排成一行, 自左至右按 $1, 2, \dots, n$ 的顺序报数, 凡序号为平方数者退出队伍; 剩下的人自左至右再次按 $1, 2, 3, \dots$ 的顺序重新报数, 凡序号为平方数者退出队伍; 如此继续, 在此过程中, 每个人都将先后从队伍中退出.

用 $f(n)$ 表示最后一个退出队伍的人在最初报数时的序号. 求 $f(n)$ 的表达式 (用 n 表示); 特别地, 给出 $f(2019)$ 的值.

答案 3. 我们重点考虑 n 个人的时候第二次踢人的情况. 在第一次踢人的时候, 原本 n 个人被踢掉了 $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ 个, 原来的 $f(n)$ 号之前有 $\lfloor \sqrt{f(n)} \rfloor$ 个人被踢掉了, 那么他将变成第 $f(n) - \lfloor \sqrt{f(n)} \rfloor$ 号. 于是问题被划归到了 $n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ 个人时候的问题, 并且我们有

$$f(n) - \lfloor \sqrt{f(n)} \rfloor = f(n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor)$$

现在我们来推通项公式. 这个式子非常复杂, 我们先写出前面 20 项:

1, 2, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 7, 10, 10, 10, 13, 13, 13, 13, 17, 17, 17, 17, ...

根据规律我们可以猜测:

$$f(n) = \begin{cases} \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor^2 + 1, & \text{若 } \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor^2 + 1 \leq n \leq \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor^2 + \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor \\ \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor^2 + \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor + 1, & \text{若 } \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor^2 + \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor + 1 \leq n \leq (\lfloor \sqrt{n-1} \rfloor + 1)^2 \end{cases}$$

接下来我们归纳验证这个表达式, 并证明这个那个递推式中的 $f(n)$ 只有这么一个解.

若 $n = 2, 3, 4$ 时, 显然 $f(2) = 2 = \lfloor \sqrt{1} \rfloor^2 + 1$, $f(3) = 3 = \lfloor \sqrt{2} \rfloor^2 + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + 1$, $f(4) = 3 = \lfloor \sqrt{3} \rfloor^2 + \lfloor \sqrt{3} \rfloor + 1$. 注意, 这个 $f(4) = 3$ 并不是由递推公式推出来的.

若 $n = 2, \dots, k-1$ 时这个表达式都成立且唯一, 在 $n = k \geq 5$ 时候, 分两种情况:

(i) $\lfloor \sqrt{k-1} \rfloor^2 + 1 \leq k \leq \lfloor \sqrt{k-1} \rfloor^2 + \lfloor \sqrt{k-1} \rfloor$. 这个时候 $\lfloor \sqrt{k-1} \rfloor^2 - \lfloor \sqrt{k-1} \rfloor + 1 \leq k - \lfloor \sqrt{k} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{k-1} \rfloor^2$, 那么 $\lfloor \sqrt{k - \lfloor \sqrt{k} \rfloor - 1} \rfloor = \lfloor \sqrt{k} \rfloor - 1 =$

$\lfloor \sqrt{k-1} \rfloor - 1$. 且 $k - \lfloor \sqrt{k} \rfloor \geq (\lfloor \sqrt{k-1} \rfloor - 1)^2 + (\lfloor \sqrt{k-1} \rfloor - 1) + 1$, 于是

$$\begin{aligned} f(k) - \lfloor \sqrt{f(k)} \rfloor &= \lfloor \sqrt{k-1} \rfloor^2 + 1 - \left\lfloor \sqrt{\lfloor \sqrt{k-1} \rfloor^2 + 1} \right\rfloor \\ &= \lfloor \sqrt{k-1} \rfloor^2 + 1 - \lfloor \sqrt{k-1} \rfloor \\ &= (\lfloor \sqrt{k-1} \rfloor - 1)^2 + (\lfloor \sqrt{k-1} \rfloor - 1) + 1 \\ &= f(k - \lfloor \sqrt{k} \rfloor) \end{aligned}$$

(ii) $\lfloor \sqrt{k-1} \rfloor^2 + \lfloor \sqrt{k-1} \rfloor + 1 \leq k \leq (\lfloor \sqrt{k-1} \rfloor + 1)^2$. 这个时候 $\lfloor \sqrt{k-1} \rfloor^2 + 1 \leq k - \lfloor \sqrt{k} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{k-1} \rfloor^2 + \lfloor \sqrt{k-1} \rfloor$. 那么 $\lfloor \sqrt{k - \lfloor \sqrt{k} \rfloor - 1} \rfloor = \lfloor \sqrt{k-1} \rfloor$. 于是

$$\begin{aligned} f(k) - \lfloor \sqrt{f(k)} \rfloor &= \lfloor \sqrt{k-1} \rfloor^2 + \lfloor \sqrt{k-1} \rfloor + 1 - \left\lfloor \sqrt{\lfloor \sqrt{k-1} \rfloor^2 + \lfloor \sqrt{k-1} \rfloor + 1} \right\rfloor \\ &= \lfloor \sqrt{k-1} \rfloor^2 + 1 \\ &= f(k - \lfloor \sqrt{k} \rfloor) \end{aligned}$$

接着我们需要证明这个 $f(n)$ 是满足递推公式的唯一整数 $f(n)$ ($n \geq 5$). 事实上对于任意 $a \geq 1$,

$$(a - \lfloor \sqrt{a} \rfloor) - (a - 1 - \lfloor \sqrt{a-1} \rfloor) = 1 - (\sqrt{a-1} - \sqrt{a}) \geq 0$$

但是由于 $f(n) = \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor^2 + 1$ 或 $\lfloor \sqrt{n-1} \rfloor^2 + \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor + 1$, 经演算, 在 $n \geq 5$ 的时候都可以得到

$$\begin{aligned} \left\lfloor \sqrt{\lfloor \sqrt{n-1} \rfloor^2} \right\rfloor &= \left\lfloor \sqrt{\lfloor \sqrt{n-1} \rfloor^2 + 1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{\lfloor \sqrt{n-1} \rfloor^2 + 2} \right\rfloor \\ \left\lfloor \sqrt{\lfloor \sqrt{n-1} \rfloor^2 + \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor} \right\rfloor &= \left\lfloor \sqrt{\lfloor \sqrt{n-1} \rfloor^2 + \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor + 1} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \sqrt{\lfloor \sqrt{n-1} \rfloor^2 + \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor + 2} \right\rfloor \end{aligned}$$

即 $(f(n)-1) - [\sqrt{f(n)-1}] < f(n) - [\sqrt{f(n)}] < (f(n)+1) - [\sqrt{f(n)+1}]$. 所以递推公式只能得到唯一的 $f(n)$.

综上所述, 这个表达式是正确的. 并且由于 $[\sqrt{2019}] = 44$, 且 $44^2 + 44 + 1 = 1981 < 2019 < 2025 = 45^2$, 我们有 $f(2019) = 44^2 + 44 + 1 = 1981$.

评析 3. 本题的难点主要在于如何从递推公式推导出通项公式, 这个递推公式同时包含取整和开根, 并且不是线性的递推, 我们唯一能做的似乎就只能是先写出一些 $f(n)$ 来找找规律. 但是比较基本的还是能够看出来, 最后的通项公式可能会与 $[\sqrt{n}]$ 或 $[\sqrt{n \pm 1}]$ 有关.

另外, 可能不少同学猜出通项公式之后就只证明了通项公式满足递推关系, 但是事实上唯一性也很重要. 举个例子, $a - [\sqrt{a}] = 2$ 就会有 $a = 3, 4$ 两个解. 但是很明显我们的 $f(n)$ 是由 n 唯一确定的, 那么这个时候我们需要验证这个递推关系可以唯一地确定绝大多数 $f(n)$, 如果没有这一步的话, 就算考试没被扣分, 这个证明也不能算完整.

题 4. 在 5×5 矩阵 X 中, 每个元素为 0 或 1. 用 $x_{i,j}$ 表示 X 中第 i 行第 j 列的元素 ($i, j = 1, 2, \dots, 5$). 考虑 X 的所有行, 列及对角线上的 5 元有序数组 (共 24 个数组):

$$\begin{aligned} & (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,5}), (x_{i,5}, x_{i,4}, \dots, x_{i,1}) \quad (i = 1, 2, \dots, 5), \\ & (x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{5,i}), (x_{5,i}, x_{4,i}, \dots, x_{1,i}) \quad (i = 1, 2, \dots, 5), \\ & (x_{1,1}, x_{2,2}, \dots, x_{5,5}), (x_{5,5}, x_{4,4}, \dots, x_{1,1}), \\ & (x_{1,5}, x_{2,4}, \dots, x_{5,1}), (x_{5,1}, x_{4,2}, \dots, x_{1,5}), \end{aligned}$$

若这些数组两两不同, 求矩阵 X 中所有元素之和的可能值.

答案 4. 记这 24 个数组的集合为 M . 那么对于任意 $S(x_1, \dots, x_5) \in M$, 我们有 $(x_5, \dots, x_1) \in M$, 所以按照题目条件, 所有 M 中的五元数组都应该是不对称的. 由于有 $\{0, 1\}$ 组成的五元数组一共 $2^5 = 32$ 种, 但是对称的有 $2^3 = 8$ 种, 也就是说不对称的有 24 种. 所以 M 即是这 24 种不对称五元数组的集

合. 这 24 种数组为:

一个 1: $(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0),$

两个 1: $(1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0),$

三个 1: $(1, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 1, 0),$

四个 1: $(1, 1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0, 1).$

及它们的对称. 所以 M 中所有数组元素之和为 60. M 中删掉对角线的四个数组之后剩下的 20 个数组刚好是矩阵所有元素重复四次, 所以矩阵所有元素之和 $S \leq \frac{60-1-1-1-1}{4} = 14$.

我们先讨论 S 可不可以等于 14. 按照我们的放缩, 这种情况只能是两条对角线上都只有一个 1 才可能出现的情况. 由对称性, 我们不妨先填成这样:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 0 & & 1 & \\ & & 0 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

那么看第二列, 第五列, 第四行和第五行, 如果 $(*, 0, *, 0, *)$ 或者 $(0, *, *, *, 0)$ 的中间被填入了 0, 那么由于 M 中的数组都不能是对称的, 剩下两个位置只能是一个 0 一个 1, 那么就会与对角线上的数组相等, 矛盾, 所以这个矩阵会被填成这样:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 0 & & 1 & \\ & 1 & 0 & & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & & 1 & & 0 \end{bmatrix}$$

于是我们分析那些行或列可以入四个 1. 首先第三行如果被填入四个 1 就会变成 $(1, 1, 0, 1, 1)$, 对称, 所以不可以. 第三列同理不可以. 第四行, 第五行,

第二列和第五列因为已经有两个 0 了所以也不可以. 于是能填入四个 1 的只能有第一行, 第二行, 第一列和第四列. 并且, 如果第一行和第一列都是四个 1, 或者第二行和第四列都是四个 1, 这行列的数组相等, 所以不可以这样填. 下面分类讨论.

如果第一行和第二行都是四个 1, 剩下的行列都不能有四个 1. 那么第五列变成 (0, 1, 1, *, 0), 剩余的位置只能是 0, 否则对称. 这时第五行变成 (0, *, 1, *, 0), 为了不对称, 只能填成 (0, 1, 1, 0, 0) 或 (0, 0, 1, 1, 0), 都会与第五列一样, 矛盾.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & & 0 \end{bmatrix}$$

如果第一行和第四列都是四个 1, 剩下的行列都不能有四个 1. 那么第二列变成 (1, 0, 1, 0, *), 第三列变成 (1, *, 0, 1, 1), 第三行变成 (*, 1, 0, 1, 1), 剩余的位置都只能是 0, 否则对称. 于是现在第五列是 (0, *, 1, *, 0), 为了不对称, 只能填成 (0, 1, 1, 0, 0) 或 (0, 0, 1, 1, 0), 都会与第五行一样, 矛盾.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

如果第一列和第二行都是四个 1, 剩下的行列都不能有四个 1. 那么第三列变成 (*, 1, 0, 1, 1), 第五列变成 (0, 1, 1, *, 0), 第三行变成 (1, 1, 0, *, 1), 剩余的位置都只能是 0, 否则对称. 于是现在第五行是 (0, *, 1, *, 0), 为了不对

称, 只能填成 $(0, 1, 1, 0, 0)$ 或 $(0, 0, 1, 1, 0)$, 都会与第五列一样, 矛盾.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

如果第一列和第四列都是四个 1, 剩下的行列都不能有四个 1. 那么第五行变成 $(0, *, 1, 1, 0)$, 剩余的位置只能是 0, 否则对称. 于是这个时候第五列是 $(0, *, 1, *, 0)$, 为了不对称, 只能填成 $(0, 1, 1, 0, 0)$ 或 $(0, 0, 1, 1, 0)$, 都会与第五行一样, 矛盾.

$$\begin{bmatrix} 1 & & 1 & 0 \\ 1 & 0 & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

所以综上所述, S 不可能等于 14, 即 $S \leq 13$.

考虑一个满足题意的矩阵, 如果将这个矩阵的 1 全部变成 0, 0 全部变成 1, 这样得到的矩阵还是满足题意, 但是所有元素之和变成了 $25 - S$, 所以我们一样有 $25 - S \leq 13$, 即 $S \geq 12$. 所以 S 只能等于 12 或 13. 下给出构造:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

评析 4. 本题的难点在于构造. 注意到 1 和 0 的对偶, 其实我们只需要构造一个既可. 注意到这个时候只相差 1, 根据我们的证明这个 1 只能差在对

角线的交点上. 另外一方面, $S \leq 13$, 那么 $S = 13$ 只能是 $\frac{60-2-2-2}{4}$ 或者 $\frac{60-1-1-3-3}{4}$, 所以按照对角线上有几个 1 的想法很快就可以完成构造.

题 5. 对任意正整数 n , 用 a_n 表示三边长均为整数且最长边的长为 $2n$ 的三角形的个数.

(1) 求 a_n 关于 n 的表达式;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足: $\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_n^k b_k = a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). 求使 $b_n \leq 2019a_n$ 成立的正整数 n 的个数.

答案 5. (1) 显然三角形的另外两边的情况为

$$(2n, 1), \dots, (2n, 2n), (2n-1, 2), \dots, (2n-1, 2n-1), \dots \\ (n+1, n), (n+1, n+1)$$

所以 $a_n = 2n + (2n-2) + \dots + 2 = n(n+1)$.

(2) 我们考虑

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n C_n^k a_k &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} C_n^k C_k^i b_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n (-1)^{k-i} C_n^k C_k^i b_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n (-1)^{k-i} C_n^i C_{n-i}^{n-k} b_i = \sum_{i=1}^n C_n^i b_i \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k C_{n-i}^{n-i-k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n C_n^i b_i \cdot (1-1)^{n-i} = b_n \end{aligned}$$

所以我们得到反演公式 $b_n = \sum_{k=1}^n C_n^k a_k$, 那么

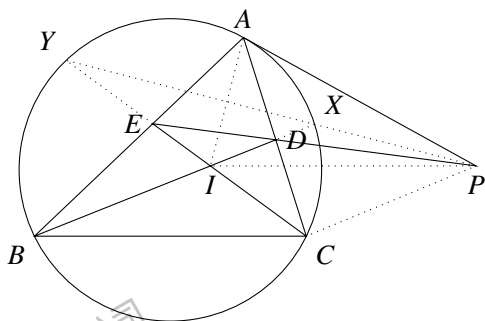
$$b_n = \sum_{k=1}^n C_n^k k^2 + \sum_{k=1}^n C_n^k k = 2^{n-2} \cdot n(n+3)$$

于是 $b_n \leq 2019a_n$ 等价于 $2^{n-2} \cdot n(n+3) \leq 2019n(n+1)$, 解得 $n \leq 12$. 所以一共有 12 个正整数满足条件.

评析 5. 本题唯一难点就在于这个组合的反演公式, 平时做题多的同学应该不难见到.

题 6. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D , $\angle ACB$ 的平分线交 AB 于点 E , 过 A 作 $\triangle ABC$ 外接圆的切线, 交 ED 的延长线于点 P , 已知 $AP = BC$. 证明: $BD \parallel CP$.

答案 6. 如图, 延长 BD, CE 交外接圆于 X, Y , 记 I 为三角形 ABC 的内心.



对于三角形 EDI 我们考虑

$$\begin{aligned} \frac{EP}{PD} \cdot \frac{DX}{XI} \cdot \frac{IY}{YE} &= \frac{AE \sin \angle EAP}{AD \sin \angle DAP} \cdot \frac{AD \sin \angle ADX}{AI \sin \angle AID} \cdot \frac{AI \sin \angle AIE}{AE \sin \angle AEY} \\ &= \frac{\sin \angle BAP}{\sin \angle ADB} \cdot \frac{\sin \angle ADB}{\sin \angle AID} \cdot \frac{\sin \angle AIE}{\sin \angle AEC} \\ &= \frac{\sin \angle C}{\sin \angle B} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \angle B}{\sin \frac{1}{2} (\angle B + \angle A)} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} (\angle C + \angle A)}{\sin \frac{1}{2} \angle C} \\ &= \frac{\sin \angle C}{\sin \angle B} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \angle B}{\cos \frac{1}{2} \angle C} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} \angle B}{\sin \frac{1}{2} \angle C} = 1 \end{aligned}$$

所以由梅涅劳斯定理, 我们有 P, X, Y 共线. 那么由于 XY 垂直平分 AI , 所以 $BC = AP = IP$. 另外, $\angle XIP = \angle XAP = \angle XBA = \angle IBC$, 故四边形 $BCPI$ 是一个平行四边形. 所以 $BI \parallel PC$.

评析 6. 本题解法很多, 光是用梅涅劳斯塞瓦组合连续击的方法都有很多. 我的解法是将 ED 延长与 BC 交于 X , 在 $\triangle XBD$ 中找一些梅涅劳斯塞瓦的比例式乘一起找到 $BD : CP$ 的比值来说明平行关系. 这种做法比较自然

但是显得有点冗长且笨拙,所以在答案中选取了群内同学提供的这种很巧妙的解法.

题 7. 甲、乙两人从 $0, 1, 2, \dots, 81$ 中轮流挑选互不重复的数, 甲先选, 每次每人从剩下的数中选 1 个数. 当这 82 个数被选完之后, 记 A 为甲选择的所有数之和, B 为乙选择的所有数之和. 在挑选数的过程中, 甲希望 A, B 的最大公约数越大越好, 乙希望 A, B 的最小公约数越小越好, 在甲、乙各自的最佳策略下, 求挑选完毕之后 A, B 的最大公约数.

答案 7. 这 82 个数的和为 $3321 = 3^4 \times 41$. 那么 $(A, B) \mid A + B = 3^4 \times 41$. 我们分两步证明甲可以保证 $41 \mid (A, B)$, 而乙可以保证 $3 \nmid (A, B)$.

先证明甲可以保证 $41 \mid (A, B)$. 我们先将这 82 个数配对如下:

$$(0, 41), (1, 42), (2, 43), \dots, (40, 81)$$

甲先任意选一对中的任意一个数, 乙如果选了甲已经选过的数对, 那么甲下一步还是任选, 但是如果乙选了甲没选过的数对中的数, 那么甲下一步就要马上把另一个数抢走. 于是 $A \equiv 0 + 1 + \dots + 40 \equiv 0 \pmod{41}$, 所以 $B \equiv 0 \pmod{41}$, 即 $41 \mid (A, B)$.

再证明乙可以保证 $3 \nmid (A, B)$. 还是配对

$$(0, 3), (1, 4), (2, 5), (6, 9), (7, 10), (8, 11), \dots, (78, 81), (79, 80)$$

也就是说, 除了 $(79, 80)$ 这一对之外, 剩下的每一对的两个数都模 3 同余. 那么乙只需要在甲选数之后马上拿走同一对中的另一个数, 那么这个时候 $A - B \equiv \pm(80 - 79) = \pm 1 \pmod{3}$, 即 $3 \nmid (A, B)$.

所以在甲乙的最佳策略下, 最后 $(A, B) = 41$.

评析 7. 这个题目也比较非主流, 一般的策略类问题都是问谁有必胜策略之类的, 但是这个要求两个人都用最佳策略. 这种时候要思考的就变成了谁能保证某一部分的必赢策略. 这个题目问的比较简单一点, 毕竟两个数的和 $= 3^4 \times 41$, 我们只用讨论两个素数即可, 于是就当成要求使得 $41 \mid (A, B)$ 和 $3 \nmid (A, B)$ 的两道必胜策略题做就好了.

题 8. 对于正整数 $x > 1$, 定义集合

$$S_x = \{p^\alpha \mid p \text{ 为 } x \text{ 的素因子, } \alpha \text{ 为非负整数, } p^\alpha \mid x, \text{ 且 } \alpha \equiv v_p(x) \pmod{2}\}$$

其中 $v_p(x)$ 表示 x 的标准分解式中素因子 p 的次数, 并记 $f(x)$ 为 S_x 中所有元素之和. 约定 $f(1) = 1$.

今给定正整数 m . 设正整数数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 满足: 对任意整数 $n > m$, $a_{n+1} = \max\{f(a_n), f(a_{n-1} + 1), \dots, f(a_{n-m} + m)\}$.

(1) 证明: 存在常数 A, B ($0 < A < 1$), 使得当正整数有至少两个不同的素因子时, 必有 $f(x) < A(x) + B$;

(2) 证明: 存在正整数 N, l , 使得对所有 $n \geq N$, $a_{n+l} = a_n$ 成立.

答案 8. (1) 同高一.

(2) 同高一, 先证明存在 Q 使得 $a_n < Q$ 对所有 $n \in \mathbb{N}^*$ 都成立. 那么考虑 $\{a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-m}\}$, 这样的数组的数量不会超过 Q^{m+1} 个. 那么在 a_{m+1} 到 $a_{m+1+Q^{m+1}}$ 之间一定存在某两个数 $N < N'$, 使得 $\{a_N, a_{N-1}, \dots, a_{N-m}\} = \{a_{N'}, a_{N'-1}, \dots, a_{N'-m}\}$. 那么由 $\{a_i\}$ 的定义, 我们可以很容易地归纳证明 $a_{N+k} = a_{N'+k}$, 即对任意 $n \geq N$, 取 $l = N' - N$, 我们都有 $a_{n+l} = a_n$.

评析 8. 本题想得到 a_n 有上界就不会太难, 但是上界的题目在高一年级组的卷子上, 不过因为第一问都是相同的, 高二的同学做卷子的时候应该注意到 (1) 给的放缩, 注意到 $f(x)$ 会被 x 控制住应该可以发现 a_{n+1} 的定义试其实是被某些常数控制住的, 于是就会想到高一年级题目上的结论.