2020年全国高中数学联赛浙江赛区初赛试题

（说明：本试卷满分200分，共10道填空题，5道解答题。题目的答案请写在答题纸上。）

一、填空题（每题8分，共80分）

1. 设r为方程$x^3-x+3=0$的解，则以r^2为其解的首项系数为1的整系数一元三次方程为

____________.

2. 已知$f(a)=\min\limits_{x\in[a,a+1]}\{x^2-2x-1\}$，则$f(a)$在$[-1,1]$ 上的最大值为____________.

3. 某竹竿长为24米，一端靠在墙上，另一端落在地面上。若竹竿上某一节点到墙的垂直距离和到地面的垂直距离都是 7 米，则此时竹竿靠在墙上的端点到地面的垂直距离为

________米，或________米.

4. 设$x\in\mathbb{R}$,则$y=\dfrac{\sin x}{2-\cos x}$的最大值为____________.

5. 在四面体$P-ABC$中，棱PA,AB,AC两两垂直，且$PA=AB=AC$，E,F分别为线段AB,PC的中点，则直线EF与平面PBC所成角的正弦值为____________.

6. 设平面上不共线的三个单位向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，满足$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$。若$0\le t\le 1$，则

$\left|-2\vec{a}+t\vec{b}+(1-t)\vec{c}\right|$的取值范围为____________.

7. 设z为复数，且$|z|=1$。当$|1+z+3z^2+z^3+z^4|$取得最小值时，则此时复数

$z=$________，或________.

8. 已知由6个正整数组成的六位十进制数中，其个位上的数字是4的倍数，十位和百位上的数字都是 3 的倍数，且六位数的数码和为 21，则满足上述条件的六位数的个数为

________.

9. 一个正整数若能写成$20a+8b+27c$(a,b,c为非负整数）形式，则称它为“好数”。则集合$\{1,2,\cdots,200\}$中好数的个数为____________.

10. 设$i_1,i_2,\cdots,i_n$是集合$\{1,2,\cdots,n\}$的一个排列。如果存在$k<l$且$i_k>i_l$，则称数对（i_k,i_l）为一个逆序，排列中所有逆序数对的数目称为此排列的逆序数。比如，排列1432的逆序为43,42,32，此排列的逆序数就是 3。则当$n=6$时，且$i_3=4$的所有排列的逆序数的和为

____________.

二、解答题（11-13题，每题20分；14，15题，每题30分，合计120分）

11. 已知数列$\{a_n\}$，且$a_1=\sqrt{2}+1$，$\dfrac{a_n-\sqrt{n}}{a_{n-1}-\sqrt{n-1}}=\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}(n=2,3,\cdots)$，令$b_n=\dfrac{1}{a_n}$，记数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$S_n$。

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若对任意的$n\in N^*$，$\sqrt{n+2}\le\lambda(S_n+1)\le n+101$恒成立，求实数$\lambda$的取值范围。

12. 已知椭圆C的中心在原点，焦点在x轴上，离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且椭圆C的任意三个顶点构成的三角形面积为$\dfrac{1}{2}$。

（1）求椭圆C的方程；

（2）若过$P(\lambda,0)$的直线l与椭圆交于相异两点A,B，且$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$，求实数$\lambda$的范围。

13. 已知函数$f(x)=|x+1|e^{-\frac{1}{x}}-a$。

（1）若$f(x)=0$恰有三个根，求实数a的取值范围；

（2）在（1）的情形下，设$f(x)=0$的三根为x_1,x_2,x_3，且$x_1<x_2<x_3$，证明$x_2-x_1<a$。

14. 设正整数$n\ge 3$， 已知n个数$a_1,a_2,\cdots,a_n$，记两两之和为$b_{ij}=a_i+a_j(i>j)$，得到如下表格：

$$\begin{array}{c}
b_{21}\\
b_{31},\quad b_{32}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
b_{n1},\quad b_{n2},\cdots\cdots\cdots,b_{n,n-1}
\end{array}$$

若在上述表格中任意取定k个数，可以唯一确定出n个数$a_1,a_2,\cdots,a_n$，请求k的最小值。

15. 设$\{a_m\},\{b_n\}$为实数列，证明

$$\sum_{m,n=1}^{2020}\frac{a_mb_n}{\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)^2}\le 2\left(\sum_{m=1}^{2020}a_m^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{2020}b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$