2020年全国高中数学联赛浙江赛区初赛试题答案

一、**填空题（每题8分，共80分**）

**1.** 

**2.**  

**3.**  （每个答案给4分，满分8分）

**4.**  

**5.** 

**6.** 

**7**. $z=-\frac{1}{4}\pm \frac{\sqrt{15}}{4}i$ （每个答案给4分，满分8分）

**8.** 

**9.**  

**10**. 

二、解答题（共五题，11-13各20分，14、15各30分，合计120分）

（解答题严格按照上述标准给分，分数整5整10，不给其他过度分数。）

**11**. 已知数列，且，，令，记数列的前项和为。

（1）求数列的通项公式；

（2）若对任意的，恒成立，求实数的取值范围。

**解答** （1）由数学归纳法证明得。 （**5分**）

（2）由于，得

, （**10分**）

由得到

，

上式对任意的正整数成立，则，**（15分）**

即。 （**20分**）

**12**. 已知椭圆的中心在原点，焦点在轴上，离心率为，且椭圆的任意三个顶点构成的三角形面积为。

（1）求椭圆的方程；

（2）若过的直线与椭圆交于相异两点，且，求实数的范围。

**解答 （1）**设椭圆的长半轴长为短半轴长为则有，解得，，所以椭圆的方程为。 **（5分）**

（2）设直线的方程为设两个交点坐标为，。

由，得到。………………………………① （**10分**）

联立方程组 得到……②

显然，为方程②的两个相异的实根，则有

…………③

由韦达定理得，联立①得到

………………④ **（15分）**

又，不符合题意。

把④代入③得到 。（**20分**）

**13**. 已知函数。

（1）若恰有三个根，求实数的取值范围；

（2）在（1）的情形下，设的三根为，且，证明。

**解答**：

（1）时，，

时，，

所以函数在，

且

故 （**5分**）

（2）设，下证在上恒成立.

即证，变形得到，在上，显然成立. （**10分**）

设在上有两解，且.

可得：，

注意到的单调性，有. （**15分**）

通过解二次方程可以解得，

则有. （**20分**）

**14**. 设正整数， 已知个数，记两两之和为，得到如下表格：

 

  

 ………………………

  …………………

若在上述表格中任意取定个数，可以唯一确定出个数，求的最小值。

**解答** （1）当时，显然由才能唯一确定出，此时。 （**5分**）

（2）当时。显然由，否则取某三个数的两两之和不能确定出第四个数。

当时，如果这4个值，也无法确定出。

当时，若已知 中任意五个数的值。不妨设的值未知，则由可以确定，从而唯一确定出。（**10分**）

（3）当时，显然由当，下面证明最小值取到等号。

（a）当时，，即如果知道7个，则一定存在一个下标s，（或）最多出现2次，至少出现1次。事实上，7个共有14个下标，而1,2,3,4,5每个下标出现3次及以上，就共出现15个下标，这是不可能的。因此根据（2），由至少5个的值可唯一确定出，再由至少出现一次的（或）唯一确定出。 （**20分**）

（b）当时，用数学归纳法证明。当取k个时，一定存在一个下标s，（或）最多出现次（因为），则至少有



由归纳可知，这些可唯一确定出，然后再有（或）确定出。

 （**30分**）

**15**. 设为实数列，证明 。

**证明**： 不等式的左边=，由Cauchy不等式得

， （**10分**）

由等式

以及，从而只需证明

 （1）以及  （2）。 （**20分**）

这两个不等式是一样的(m,n对调).

下面证明：.（3）

该不等式等价于



而由，

可知最后的不等式成立。对(3)求和即得(1)式，得证。 （**30分**）