Math173 | The journey of mathematics

高中数学培优教程

第五版

兰 琦

2017 年 5 月 8 日

目录

第一章　函数与方程

1. 零点问题

   分离变量法：全分离，半分离与不分离；

   复合函数的零点问题，分段函数的零点问题．

2. 韦达定理

   n 次方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0\,(\,a_n\neq 0\,)$ 的 n 个根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足

$$\begin{aligned} x_1+x_2+\cdots+x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ &\cdots, \\ x_1x_2\cdots x_n &= (-1)^n\cdot\frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

3. 不动点与二阶不动点

   对于函数 $f(x)$，方程 $f(x)=x$ 的解称为不动点，方程 $f(f(x))=x$ 的解称为二阶不动点．不动点问题常常转化为函数 $y=f(x)$ 与直线 $y=x$ 的交点问题；二阶不动点问题常常转化为曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $x=f(y)$ 的交点问题．

1.1　函数的零点

例题 **1.1** **(2012 年山东高考)** 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$g(x)=ax^2+bx(a,b\in\mathbb{R},a\neq 0)$，若 $y=f(x)$ 的图象与 $y=g(x)$ 的图象有且仅有两个不同的公共点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则下列判断正确的是 (　　)

A. $a<0$ 时，$x_1+x_2<0$，$y_1+y_2>0$　　**B.** $a<0$ 时，$x_1+x_2>0$，$y_1+y_2<0$

C. $a>0$ 时，$x_1+x_2<0$，$y_1+y_2<0$　　**D.** $a>0$ 时，$x_1+x_2>0$，$y_1+y_2>0$

解　B.

不分离

将右边化为常数 (往往取 0)．注意利用一侧为 0 的特点对左边进行调整．对于本题，可以将问题转化为函数

$$h(x)=ax^3+bx^2-1$$

有两个零点，由于 $h(x)$ 的导函数

$$h'(x)=x(3ax+2b),$$

由 $h(x)$ 有且仅有两个零点知 $h(x)$ 的极值点中必有一个为零点，于是函数的两个极值点分别对应点 $(0,-1)$ 和 $\left(-\dfrac{2b}{3a},0\right)$，按 a 与 0 的关系分别画出对应的函数图象．由三次函数的切割线性质可得[1]结果．

全分离

让两边分别只含参数和变量．对于本题，考虑方程

$$a=\frac{1}{x^3}-\frac{b}{x},\ \text{即}\ h(t)=t^3-bt,$$

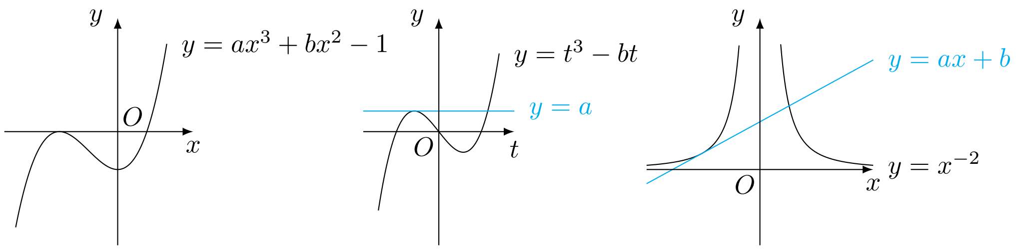
其中 $t=\dfrac{1}{x}$，并记右侧函数为 $h(t)$，因此画出对应的函数图象可得结果．

半分离

将一边化为含参直线，另一边化为不含参的函数．此时问题转化为直线与曲线的位置关系问题，因此往往对曲线的凹凸性[2]有要求．对于本题，考虑方程

$$ax+b=\frac{1}{x^2},$$

于是直线 $y=ax+b$ 与幂函数 $y=x^{-2}$ 的图象有两个公共点．由幂函数图象的对称性可得结果．



例题 1.2 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-1,x\leqslant -1,\\ x,-1<x<1,\\ 1,x\geqslant 1,\end{cases}$ 函数 $g(x)=ax^2-x+1$．若函数 $y=f(x)-g(x)$ 恰好有 2 个不同零点，则实数 a 的取值范围是________．

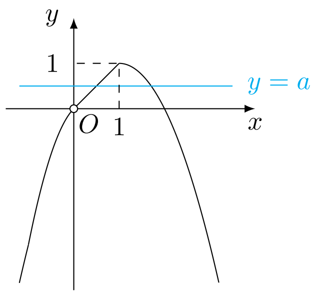
解 $(-\infty,0)\cup(0,1)$．问题即方程

$$a=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2},x\leqslant -1,\\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2},-1<x<0\ \text{或}\ 0<x<1,\\ \dfrac{1}{x},x\geqslant 1,\end{cases}\quad \text{即}\ g(t)=\begin{cases}t-2t^2,-1\leqslant t<0,\\ 2t-t^2,t<-1\ \text{或}\ t>1,\\ t,0<t\leqslant 1,\end{cases}$$

有两根，其中 $t=\dfrac{1}{x}$，换元后的方程的根的个数与换元前的方程的根的个数是一致的．

[1]也可以通过三次方程的韦达定理求解

[2]在高考范围内，只有基本初等函数和二次曲线的凹凸性可以直接使用



考虑函数 $y=g(t)$ 与直线 $y=a$ 的交点个数，于是 a 的取值范围是 $a<1$ 且 $a\neq 0$.

例题 1.3 (2012 年北大保送) 已知 $f(x)$ 是二次函数，且 $a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a)))$ 成正项等比数列，求证： $f(a)=a$.

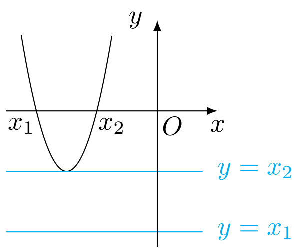
解　$a, f(a), f(f(a))$ 均为二次方程 $f(x)=qx$ 的解，其中 q 为等比数列的公比．于是必然存在重根，进而 $q=1$.

例题 1.4 设 $f(x)=x^2+ax+b$ ， $g(x)=x^2+cx+d$ ，如果方程 $f(g(x))=g(f(x))$ 没有实根，求证： $b\neq d$.

解　展开 $f(g(x))-g(f(x))$ 后没有 x^4 项， x^3 项的系数为 $2c-2a$ ．由于三次方程必然有实根，因此 $2c-2a=0$ ，从而 $a=c$ ．于是 $b\neq d$ ，否则 $f(x)=g(x)$ ，原方程有无数实根．

例题 1.5 (2010 年北大保送) 已知二次函数 $f(x)=x^2+px+q$ ，其中 $p,q\in\mathbb{R}$ ．方程 $f(f(x))=0$ 有且只有一解，求证： $p\geqslant 0$ ， $q\geqslant 0$.

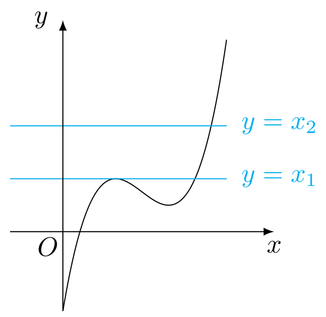
解　设 $f(x)$ 的两根为 x_1,x_2 且 $x_1\leqslant x_2$ ，则函数 $y=f(x)$ 的图象与两条平行直线 $y=x_1, y=x_2$ 有且只有一个公共点，如图．



因此函数 $y=f(x)$ 的最小值为 x_2 ，且 $x_2\leqslant 0$ ，因此 $x_1\leqslant x_2\leqslant 0$ ，由韦达定理即得．

例题 1.6 若函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有极值点 x_1,x_2 ，且 $f(x_1)=x_1$ ，则关于 x 的方程 $3(f(x))^2+2af(x)+b=0$ 的不同实根个数是________ .

解　注意到题中方程即 $f'(f(x))=0$ ，也即 $f(x)=x_1$ 或 $f(x)=x_2$ ，进而考虑函数 $y=f(x)$ 的图象与两平行直线 $y=x_1$ 及 $y=x_2$ 的公共点个数．根据已知条件 $f(x_1)=x_1$ ，因此无论 $x_1<x_2$ 还是 $x_1>x_2$ ，公共点个数均为 3 ，如图．



例题 1.7 **(2014 年北约)** 已知 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 都是二次函数，方程 $3f(x)+g(x)=0$ 和方程 $f(x)-g(x)=0$ 都只有一个重根，方程 $f(x)=0$ 有两个不等实根．证明：方程 $g(x)=0$ 没有实数根．

解 注意到

$$4f(x)=[3f(x)+g(x)]+[f(x)-g(x)],$$

于是 $y=3f(x)+g(x)$ 与 $y=f(x)-g(x)$ 的开口方向相反，而

$$4g(x)=[3f(x)+g(x)]-3[f(x)-g(x)],$$

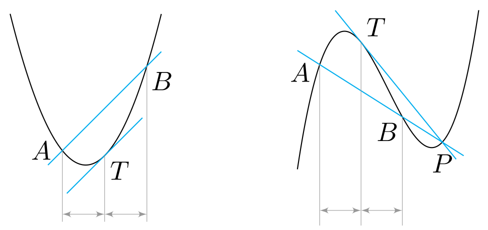
因此方程 $g(x)=0$ 没有实数根．

1.2 韦达定理

例题 1.8 证明：

(1) 若二次函数的图象某点处的切线与某条割线平行，则切点的横坐标为两个割点横坐标的等差中项；

(2) 从三次函数图象上任意点 P 作三次函数图象的切线（P 不为切点）和割线，切点的横坐标为割点横坐标的等差中项．



解 利用韦达定理易证明，由此可以推出牛顿对一般二次曲线的直径定义．

例题 1.9 **(2014 年吉林预赛)** 求方程组 $\begin{cases} a+b+c+d=-2, \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=-3, \\ bcd+acd+abd+abc=4, \\ abcd=3, \end{cases}$ 的一组实数解 (a,b,c,d)．

解　a,b,c,d 分别是方程 $x^4+2x^3-3x^2-4x+3=0$ 的四个实数根. 为了消去 x^3 项, 作换元 $t=x+\dfrac{1}{2}$, 整理得

$$16t^4-72t^2+65=0,\ \text{解得}\ t^2=\frac{5}{4}\ \text{或}\ t^2=\frac{13}{4},$$

进而即得原方程组的一组实数解为 $\left(\dfrac{-\sqrt{13}-1}{2},\dfrac{\sqrt{13}-1}{2},\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2},\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

例题 1.10 **(2014 年北大夏令营)** 设 a,b,c 是实数，方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 有 3 个正根，证明 $2a^3+9c\leqslant 7ab$，并且等号成立当且仅当这 3 个正根相等.

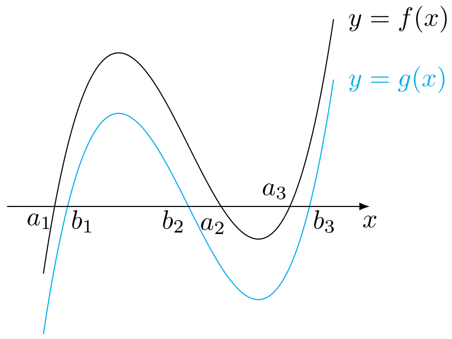
解　应用韦达定理用根表示系数. 设方程的根分别为 x_1,x_2,x_3，则

$$7ab-2a^3-9c=\sum_{cyc}(x_1+x_2)(x_1-x_2)^2\geqslant 0,$$

等号当且仅当 $x_1=x_2=x_3$ 时取得.

例题 1.11 **(2008 年北大)** 已知 $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$，$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1=b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1$，若 $\min(a_1,a_2,a_3)\leqslant\min(b_1,b_2,b_3)$，求证：$\max(a_1,a_2,a_3)\leqslant\max(b_1,b_2,b_3)$.

解　应用韦达定理构造三次函数.



令 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$, $g(x)=(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)$，且 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3$，$b_1\leqslant b_2\leqslant b_3$. 假设 $a_3>b_3$，则

$$f(a_1)-g(a_1)\geqslant 0,\ \text{且}\ f(a_3)-g(a_3)<0,$$

矛盾. 因此 $a_3\leqslant b_3$，原命题得证.

1.3 不动点

例题 1.12 **(2008 年交大)** 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$，且方程 $f(x)=x$ 没有实数根. 那么方程 $f(f(x))=x$ 是否有实数根? 并证明你的结论.

解　没有实数根. 由于方程 $f(x)=x$ 没有实数根，因此 $y=f(x)$ 的图象恒在直线 $y=x$ 上方，或恒在直线 $y=f(x)$ 下方. 于是或者对于任何实数 x 均有 $f(f(x))>f(x)>x$，或者对于任何实数 x 均有 $f(f(x))<f(x)<x$，因此方程 $f(f(x))=x$ 没有实数根[1].

[1] 只要 $y=f(x)$ 是连续函数，此结论均成立

例题 1.13 **(2009 年交大)** 证明：若函数 $f(f(x))$ 有唯一不动点，则函数 $f(x)$ 也有唯一不动点.

解 用反证法. 由于函数 $f(x)$ 的不动点均为函数 $f(f(x))$ 的不动点，因此若命题不成立，则 $f(x)$ 必然没有不动点. 若 $f(x)$ 没有不动点，设函数 $f(f(x))$ 的不动点为 a，则 $f(f(a))=a$，于是 $f(f(f(a)))=f(a)$，这就意味着 $f(a)$（不等于 a）也是函数 $f(f(x))$ 的不动点，与已知矛盾. 因此命题得证.

例题 1.14 **(2013 年江西高考)** 已知函数 $f(x)=a\left(1-2\left|x-\dfrac{1}{2}\right|\right)$，$a$ 为常数且 $a>0$.

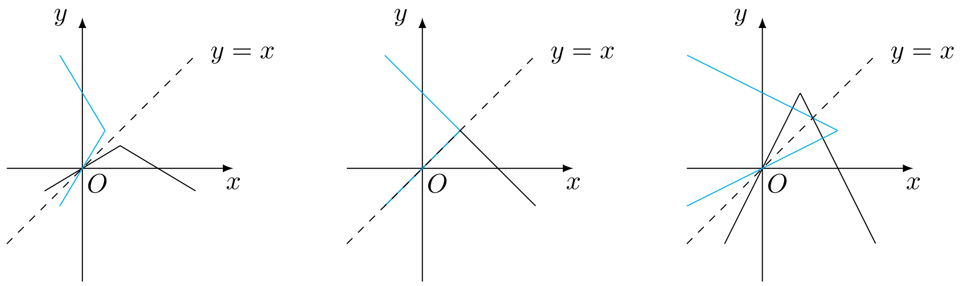
(1) 证明：$f(x)$ 关于 $x=\dfrac{1}{2}$ 对称；

(2) 若 $f(x)$ 有二阶不动点 x_1,x_2，且 x_1,x_2 均不为不动点，求 a 的范围；

(3) 对 **(2)** 中的 x_1,x_2,a，设 x_3 为 $f(f(x))$ 的最大值点，$A(x_1,f(f(x_1)))$，$B(x_2,f(f(x_2)))$，$C(x_3,0)$，求 $\triangle ABC$ 的面积关于 a 的函数，并讨论其单调性.

解 *(1)* 只需证明 $f(x)=f(1-x)$；

(2) 如图，考虑曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $x=f(y)$ 的公共点，可得 $a>\dfrac{1}{2}$；



(3) 当 $x_3=\dfrac{1}{4a}$ 时，有
$$S(a)=\frac{2a-1}{4(1+4a^2)},$$
此时 $a\in\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ 时单调递增，$a\in\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 时单调递减.

当 $x_3=1-\dfrac{1}{4a}$ 时，有
$$S(a)=\frac{8a^2-6a+1}{4(1+4a^2)},$$
此时 $a\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 时单调递增.

1.4　习题

习题 1.1 (2012 年清华夏令营) 当 $0<k<1$ 时, 关于 x 的方程 $\left|1-x^2\right|=kx+k$ 解的个数是________.

习题 1.2 (2011 年卓越联盟) 若关于 x 的方程 $\dfrac{|x|}{x+4}=kx^2$ 有 4 个不同的实数解，则实数 k 的取值范围为________.

习题 1.3 已知不等式 $x^2-2ax+2\geqslant a$ 对任意 $x\geqslant -1$ 都成立，则实数 a 的取值范围是________ .

习题 1.4 (2015 年天津高考) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2-|x|, & x\leqslant 2,\\ (x-2)^2, & x>2,\end{cases}$ 函数 $g(x)=b-f(2-x)$，其中 $b\in\mathbb{R}$．若函数 $y=f(x)-g(x)$ 恰有 4 个零点，则 b 的取值范围是________.

习题 1.5 (2015 年北京高考) 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-a, & x<1,\\ 4(x-a)(x-2a), & x\geqslant 1.\end{cases}$.

(1) 若 $a=1$，则 $f(x)$ 的最小值为________;

(2) 若 $f(x)$ 恰有 2 个零点，则实数 a 的取值范围是________.

习题 1.6 已知函数 $f(x)=\left(1-x^2\right)\left(x^2+ax+b\right)$ 关于 $x=-2$ 对称，则 $f(x)$ 的最大值为________.

习题 1.7 已知 n 次多项式函数 $f(x)$ 满足 $f(k)=\dfrac{k}{k+1}$ ($k=0,1,2,\cdots,n$)，则 $f(n+1)=$________ .

习题 1.8 已知 $\dfrac{a}{k^2+1}+\dfrac{b}{k^2+2}+\dfrac{c}{k^2+3}+\dfrac{d}{k^2+4}+\dfrac{e}{k^2+5}+\dfrac{f}{k^2+6}=\dfrac{1}{k^2}$ 对 $k=1,2,3,4,5,6$ 均成立，则 $a+b+c+d+e+f=$________ .

习题 1.9 (2011 年复旦) 设 $a,b\in\mathbb{R}$，$b\neq 0$，α,β,γ 是三次方程 $x^3+ax+b=0$ 的 3 个根，则总以 $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta},\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma},\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\alpha}$ 为根的三次方程是________.

习题 1.10 设 $f(x)=x^2+ax+b, g(x)=x^2+cx+d$，如果方程 $f(g(x))=0$ 和 $g(f(x))=0$ 都没有实数根，求证：方程 $f(f(x))=0$ 和 $g(g(x))=0$ 中至少有一个没有实数根.

习题 1.11 (2013 年卓越联盟) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $0<a_n\leqslant 1$，$n\in\mathbb{N}^*$，定义函数 $f_n(x)=x+a_1x^2+a_2x^3+\cdots+a_nx^{n+1}$，$n\in\mathbb{N}^*$.

(1) 对于每一个 $n\in\mathbb{N}^*$，证明方程 $f_n(x)=1$ 在区间内有唯一解 x_n；

(2) 对于 (1) 中的数列 $\{x_n\}$，证明 $x_n>x_{n+1}>\dfrac{1}{2}$ ($n\in\mathbb{N}^*$).

习题 1.12 是否存在二次函数 $f(x)$，使得对给定的 a,b,c，有 $f(a)=bc$，$f(b)=ca$，$f(c)=ab$ 同时成立? 若存在，请给出一个符合要求的 $f(x)$；若不存在，请说明理由.

习题 1.13 (2014 年山东省预赛) 已知函数 $f_1(x)=f(x)=x(x-1)$，$f_n(x)=f\left(f_{n-1}(x)\right)$，其中 $n\geqslant 2$. 求证:

(1) 当 $x>2$ 时，$f_n(x)$ 没有零点;

(2) 当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f_n(x)$ 至少有 n 个零点.

习题 1.14 (2011 年北大夏令营) 已知 $\sin x,\sin y,\sin z$ 为递增等差数列，求证：$\cos x,\cos y,\cos z$ 不是等差数列.

习题 1.15 已知 x 为实数，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如 $[1.2]=1$ ，$[-1.2]=-2$ ，$[1]=1$. 对于函数 $f(x)$ ，若存在 $m\in\mathbb{R}$ 且 $m\notin\mathbb{Z}$ ，使得 $f(m)=f([m])$ ，则称函数 $f(x)$ 是 Ω 函数.
(1) 判断函数 $f(x)=x^2-\dfrac{1}{3}x$ ，$g(x)=\sin\pi x$ 是否是 Ω 函数；(只需写出结论)
(2) 设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期函数，其最小正周期是 T ，若 $f(x)$ 不是 Ω 函数，求 T 的最小值；
(3) 若函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}$ 是 Ω 函数，求 a 的取值范围.

习题 1.16 (2010 年浙大改) 已知方程 $f(x)=x$ 的根叫做函数 $f(x)$ 的不动点，求证：
(1) 若 x_0 是 $f(x)$ 的不动点，则 x_0 也是 $f(f(x))$ 的不动点；
(2) 若 $f(x)$ 没有不动点，则 $f(f(x))$ 若存在不动点，必然为偶数个；
(3) 若 $f(x)$ 单调递增，则 $f(f(x))$ 的不动点组成的集合与 $f(x)$ 的不动点组成的集合相等.

习题 1.17 给定函数 $f(x)=\big|4-4|x|\big|-2$ ，试问方程 $f(x)=x$ 和方程 $f(f(x))=x$ 分别有多少个不同的实数解?

习题 1.18 若映射 $f:[a,b]\to[c,d]$ 是一个连续的映射，且满足 $[c,d]\subseteq[a,b]$ ，求证：存在 $x_0\in[a,b]$ ，使得 $f(x_0)=x_0$.

习题 1.19 (2015 年华中科大) 已知三次方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 有三个实根.
(1) 若三个实根为 x_1,x_2,x_3 ，且 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3$. 若 a,b 为常数，求 c 变化时 x_3-x_1 的取值范围；
(2) 若三个实根为 a,b,c ，求 a,b,c .

习题 1.20 (2013 年安徽高考) 设函数 $f_n(x)=-1+x+\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{x^3}{3^2}+\cdots+\dfrac{x^n}{n^2}\,(n=1,2,\cdots)$，证明：
(1) 对每个 $n\in\mathbb{N}^*$ ，存在唯一的 x_n ，满足 $f_n(x_n)=0$ ；
(2) 对任意 $p\in\mathbb{N}^*$ ，由 (1) 中 x_n 构成的数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_n-x_{n+p}<\dfrac{1}{n}$.

1.5 习题参考答案及提示

习题 1.1 3． 提示：分离变量．

习题 1.2 $\left(\dfrac{1}{4},+\infty\right)$． 提示：分离变量．

习题 1.3 $[-3,1]$． 提示：分离变量．

习题 1.4 $\left[\dfrac{7}{4},2\right]$． 提示：利用函数 $y=f(x)+f(2-x)$ 的图象，注意该函数关于直线 $x=1$ 对称．

习题 1.5 (1) -1；(2) $\left[\dfrac{1}{2},1\right)\cup[2,+\infty)$． 提示：注意按 $f(x)$ 的两段分别讨论．

习题 1.6 16． 提示：$f(x)=(1-x^2)\cdot[(-4-x)^2-1]$．

习题 1.7 $(-1)^{n+1}$． 提示：令 $f(x)=\dfrac{x+g(x)}{x+1}$，其中 $g(x)=0$（$x=0,1,2,\cdots,n$）且 $-1+g(-1)=0$．

习题 1.8 $\dfrac{719}{720}$． 提示：令 $x=k^2$，通分，有

$$ax(x+2)(x+3)\cdots(x+6)+bx(x+1)(x+3)\cdot(x+6)+\cdots=(x+1)(x+2)\cdots(x+6),$$

即

$$(a+b+c+d+e+f-1)x^6+(\cdots)x^5+\cdots-6!=0.$$

这个六次方程的根分别为 $1^2,2^2,\cdots,6^2$，于是由韦达定理

$$1^2\cdot 2^2\cdots 6^2=\frac{-6!}{a+b+c+d+e+f-1},$$

进而解得

$$a+b+c+d+e+f=\frac{719}{720}.$$

习题 1.9 $b^2x^3+2abx^2+ax-b=0$． 提示：利用三次方程的韦达定理构造．

习题 1.10 略． 提示：若方程 $f(x)=0$ 与方程 $g(x)=0$ 均没有实数根，那么命题显然成立．假设方程 $f(x)=0$ 与方程 $g(x)=0$ 的实根分别是 x_1,x_2（$x_1\leqslant x_2$）和 x_3,x_4（$x_3\leqslant x_4$），那么根据题意，有

$$x_1\leqslant x_2<\min g(x),\ 且\ x_3\leqslant x_4<\min f(x),$$

因此必然有 $x_2<\min f(x)$ 或 $x_4<\min g(x)$，因此原命题得证．

习题 1.11 (1) 考虑 $F_n(x)=f_n(x)-1$ 满足 $F_n(0)\cdot F_n(1)<0$ 且在 $(0,1)$ 上单调递增；

(2) 考虑

$$f_n(x_n)-f_n(x_{n+1})=1-f_{n+1}(x_{n+1})+a_{n+1}x_{n+1}^{n+2}>0,$$

又 $f_n(x_n)-f_n\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$，于是命题得证．

习题 1.12 $f(x)=x^2-(a+b+c)x+(ab+bc+ca)$． 提示：利用 $xf(x)=(x-a)(x-b)(x-c)+abc$ 构造．

习题 1.13 *(1)* 由于当 $x>2$ 时，$f(x)>2$，因此可以递推至 $f_n(x)>2$．
(2) 用数学归纳法证明．
当 $n=1$ 时，$f(x)=x(x-1)$ 在 $[1,2]$ 上有零点为 1；
假设命题对 n 成立，即 $f_n(x)$ 至少有 n 个零点，从小到大设为 x_i，$i=1,2,\cdots,n$．考虑函数 $f_{n+1}(x)=f\left(f_{n-1}(x)\right)$ 的零点，即

$$f_n(x)=0 \text{ 或 } f_n(x)=1,$$

第一个方程根据归纳假设有根 $x=x_i$，$i=1,2,\cdots,n$．而另一方面，根据

$$\begin{cases} f_n\left(x_n\right)-1=-1<0, \\ f_n(2)-1=1>0, \end{cases}$$

因此由零点的存在性定理可得方程 $f_n(x)=1$ 至少有一个在 $(x_n,2)$ 上的根．于是函数 $f_{n+1}(x)$ 至少有 $n+1$ 个零点，命题对 $n+1$ 也成立．
综上，命题得证．

习题 1.14 略． 提示：利用圆的弦中点不可能仍然在圆上证明．

习题 1.15 *(1)* 函数 $f(x)=x^2-\dfrac{1}{3}x$ 是 Ω 函数，因为 $f(1/3)=f([1/3])=0$．函数 $g(x)=\sin\pi x$，不是 Ω 函数．
(2) T 的最小值为 1，证明如下．
$T=1$ 的例子为 $f(x)=|\sin\pi x|$，因此只需要证明当 $0<T<1$ 时，函数 $f(x)$ 必然为 Ω 函数．事实上，一方面 $[T]=0$，于是 $f([T])=f(0)$；另一方面函数 $f(x)$ 以 T 为周期，于是 $f(T)=f(0)$．因此 $f([T])=f(T)$，函数 $f(x)$ 为 Ω 函数．
(3) 第一种情况，当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 与 $(0,+\infty)$ 上分别单调递增．因为 x 与 $[x]$ 必在同一个单调区间上，所以对任意的 $x\in\mathbb{R}$ 且 $x\notin Z$ 且 $x\notin(0,1)$，都有 $x>[x]$，因此 $f(x)>f([x])$，函数 $f(x)$ 不是 Ω 函数．
第二种情况，当 $a>0$ 且 $\sqrt{a}$ 为正整数时，那么由于在每个取样区间 $[n,n+1)$ *(* $n\in\mathbb{Z}$ *)* 上，函数 $f(x)$ 均为单调函数，因此函数 $f(x)$ 不是 Ω 函数．
第三种情况，当 $a>0$ 且 $\sqrt{a}$ 不为正整数时，设 $k^2<a<(k+1)^2$ *(* $k\in\mathbb{N}^*$ *)*．因此

$$f(-k)<f(-k-1) \text{ 或 } f\left(k+1\right)>f\left(k\right),$$

即

$$-k+\frac{a}{-k}<-k-1+\frac{a}{-k-1} \text{ 或 } k+1+\frac{a}{k+1}>k+\frac{a}{k},$$

也即

$$k+\frac{a}{k}\neq k+1+\frac{a}{k+1},$$

整理得

$$a \neq k(k+1),$$

因此函数 $f(x)$ 当 $a \neq k(k+1)$ ($k \in \mathbb{N}^*$) 时是 Ω 函数.

综上，当 a 的取值范围是 $\left\{a \,\middle|\, a \neq n^2 \text{ 且 } a \neq n(n+1), a \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

第三种情况的另法

当 $a>0$ 时，考虑 $x \in \mathbb{R}$ 且 $x \notin Z$ 且 $x \notin (0,1)$ 的条件下 $f(x)=f([x])$ 即

$$x+\frac{a}{x}=[x]+\frac{a}{[x]},\text{ 也即 } x-[x]-\frac{a\,(x-[x])}{x\cdot[x]}=0,$$

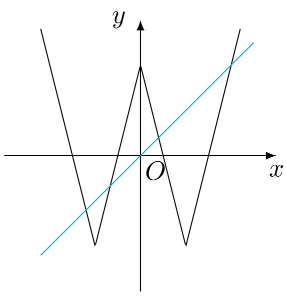
两边约去正数 $x-[x]$，得 $a=x\cdot[x]$. 接下来只需要求出 $h(x)=x\cdot[x]$，其中 $x \in \mathbb{R}$ 且 $x \notin Z$ 的值域，即为 a 的取值范围，也即

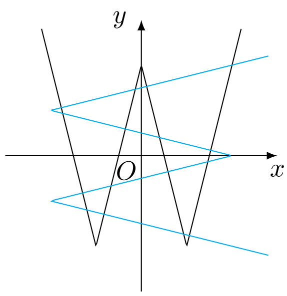
$$\left\{a \,\middle|\, a \neq n^2 \text{ 且 } a \neq n(n+1), a \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{Z}\right\},$$

即不为整数的平方以及相邻两个整数的乘积的所有正实数.

习题 1.16 略. 提示：利用不动点的定义证明.

习题 1.17 4 个，16 个. 提示：如图.





习题 1.18 略. 提示：曲线 f 恒在直线 $y=x$ 的某一侧.

习题 1.19 *(1)* $\left[\sqrt{3b-a^2}, 2\sqrt{b-\frac{a^2}{3}}\right]$；

(2) 有理解为

$$(a,b,c)=(0,0,0),(1,-1,-1),(1,-2,0),$$

无理解为 $\left(-\frac{1}{b}, b, \frac{2}{b}-b\right)$，其中 $b=t+\frac{2}{3t}$，而 $t=\sqrt[3]{-1+\sqrt{\frac{19}{27}}}$.

习题 1.20 *(1)* $f_n(x)$ 单调递增；

当 $n=1$ 时，$f_n\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{3}<0$；

当 $n \geqslant 2$ 时，根据题意

$$\begin{aligned}f_n\left(\frac{2}{3}\right) &= -1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2^2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3^2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+\frac{1}{n^2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\\ &< -1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2^2}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]\\ &< -\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1-\frac{2}{3}}=0,\end{aligned}$$

又 $f_n(1)\geqslant 0$，综上所述，原命题得证.

(2) 根据题意 $f_n(x_n)=0$， $f_{n+p}(x_{n+p})=0$， 而

$$\forall p\in\mathbb{N}^*, f_{n+p}(x_n)=-1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x_n^k}{k^2}+\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{x_n^k}{k^2}=f_n(x_n)+\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{x_n^k}{k^2}>f_n(x_n)=0,$$

于是 $\forall p\in\mathbb{N}^*, x_{n+p}<x_n$， 即

$$\forall p\in\mathbb{N}^*, x_n-x_{n+p}>0.$$

由 $f_n(x_n)=0$ 得

$$x_n=1-\sum_{k=2}^{n}\frac{x_n^k}{k^2},$$

由 $f_{n+p}(x_{n+p})=0$ 得

$$x_{n+p}=1-\sum_{k=2}^{n+p}\frac{x_{n+p}^k}{k^2},$$

两式相减，有

$$x_n-x_{n+p}=\sum_{k=2}^{n}\frac{x_{n+p}^k-x_n^k}{k^2}+\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{x_{n+p}^k}{k^2}<\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n},$$

综上所述，原命题得证.

第二章　函数与导数

1. 函数的有界性

   函数 $f(x)$ 的上确界 $\sup f(x)$ 和下确界 $\inf f(x)$，有界函数的定义以及在放缩法中的应用；确界原理，函数的确界与最值之间的关系．

2. 导数原型

   $a\cdot f(x)+f'(x)$ 型：$(\mathrm{e}^{ax}\cdot f(x))'=\mathrm{e}^{ax}\cdot(a\cdot f(x)+f'(x))$；

   $b\cdot f(x)+xf'(x)$ 型：$\left(x^b\cdot f(x)\right)'=x^{b-1}\cdot(b\cdot f(x)+xf'(x))$；

   $(ax+b)f(x)+xf'(x)$ 型：$\left(\mathrm{e}^{ax}\cdot x^b\cdot f(x)\right)'=\mathrm{e}^{ax}\cdot x^{b-1}\cdot((ax+b)f(x)+xf'(x))$．

3. 对数均值不等式 (A-L-G Inequlity)

   若 a,b 是两个不相等的正实数，则有

$$\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}.$$

2.1　函数性质

例题 2.1 **(2012 年卓越联盟)** 设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$，其中 $\omega>0$，$\varphi\in\mathbb{R}$，若存在常数 $T\,(T<0)$，使对任意 $x\in\mathbb{R}$ 有 $f(x+T)=T\cdot f(x)$，则 ω 可取到的最小值是多少?

解　由 $f(x)$ 的有界性，可得 $T=-1$，进而可以求得 ω 的最小值为 π．

例题 2.2 **(2005 年清华)** 已知函数 $f(x)$ 满足 $\forall x\in\mathbb{R},|f(x)|\leqslant 1$，且 $\forall a,b\in\mathbb{R},f(ab)=af(b)+bf(a)$．求证：$f(x)\equiv 0$．

解　显然 $f(0)=0$．若存在 $f(m)\neq 0$ 且 $m\neq 0$，则 $f\left(m^2\right)=2mf(m)$，进而可以由 $f(x)$ 的有界性推出矛盾．

例题 2.3 **(2015 年北大夏令营)** 已知 a,b,c 是三角形的三条边之长，$a^k+b^k=c^k$，求证：$k<0$ 或 $k>1$．

解　显然 $k\neq 0$ 且 $k\neq 1$．假设 $0<k<1$，则 c 为最大边，构造函数 $f(k)=\left(\frac{a}{c}\right)^k+\left(\frac{b}{c}\right)^k$，有函数 $f(k)$ 为单调递减函数，从而 $f(k)>f(1)>1$，矛盾．

2.2 导数原型

例题 2.4 **(2012 年清华夏令营)** 设 $f(x)+f'(x)>0$，当 $x>0$ 时，一定有 (　　)

A. $f(x)<f(0)$　**B.** $f(x)>f(0)$　**C.** $\mathrm{e}^x f(x)<f(0)$　**D.** $\mathrm{e}^x f(x)>f(0)$

解　D. 函数 $\mathrm{e}^x\cdot f(x)$ 单调递增，且在 $x=0$ 处的函数值为 $f(0)$，于是 $\mathrm{e}^x f(x)>f(0)$.

例题 2.5 **(2013 年卓越)** 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在导数 $f'(x)$，对任意的 $x\in\mathbb{R}$ 有 $f(-x)+f(x)=x^2$，且在 $\mathbb{R}$ 上 $f'(x)>x$. 若 $f(2-a)-f(a)\geqslant 2-2a$，则实数 a 的取值范围为________.

解　$a\leqslant 1$. 令 $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}x^3$，则 $g(x)$ 是单调递增的奇函数，且 $g(2-a)\geqslant g(a)$，于是 $a\leqslant 1$.

例题 2.6 已知函数 $f(x)$ 满足 $x^2f'(x)+2xf(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$，且 $f(2)=\dfrac{\mathrm{e}^2}{8}$，则 $x>0$ 时，$f(x)$ (　　)

A. 有极大值，无极小值　**B.** 有极小值，无极大值

C. 既有极大值，又有极小值　**D.** 既无极大值，又无极小值

解　D. 注意到 $\left(x^2f(x)\right)'=x^2f'(x)+2xf(x)$，于是由题中条件，有 $x^2f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-2xf(x)$，于是

$$x^3f'(x)=\mathrm{e}^x-2x^2f(x),$$

两边求导可得

$$\left(x^3f'(x)\right)'=\mathrm{e}^x-2\cdot\frac{\mathrm{e}^x}{x}=\mathrm{e}^x\cdot\frac{x-2}{x}.$$

又在 $x^2f'(x)+2xf(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}$ 中令 $x=2$，可得 $f'(2)=0$. 根据之前的结果，函数 $y=x^3f'(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增. 结合该函数在 $x=2$ 处的函数值为 0，可得 $y=x^3f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上没有变号零点，于是 $y=f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上也没有变号零点，进而 $y=f(x)$ 在 $x>0$ 时既无极大值，又无极小值.

例题 2.7 定义在 $\mathbb{R}$ 上的可导函数 $f(x)$ 满足 $(x-314)f(2x)-2xf'(2x)>0$ 恒成立，求证：对任何实数 x，函数 $f(x)$ 的函数值均取负值.

解　变形为 $\left(-\dfrac{1}{2}x+314\right)f(x)+xf'(x)<0$，取函数 $F(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cdot x^{314}\cdot f(x)$，则其导函数

$$F'(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cdot x^{313}\cdot\left[\left(-\frac{1}{2}x+314\right)f(x)+xf'(x)\right].$$

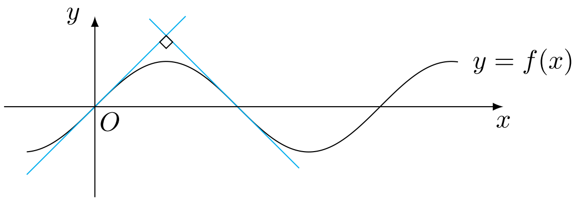
根据题意

$$\forall x\in\mathbb{R},\left(-\frac{1}{2}x+314\right)f(x)+xf'(x)<0,$$

因此 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 而 $F(0)=0$，于是 $\forall x\in\mathbb{R}^*,F(x)<0$，即 $\forall x\in\mathbb{R}^*,f(x)<0$. 又令 $x=0$ 可得 $f(0)<0$，补充上述结论可得 $\forall x\in\mathbb{R},f(x)<0$.

2.3 微积分初步

例题 2.8 **(2011 年北大保送)** 已知函数 $f(x)=ax+\sin x$ 的图象上有两条切线相互垂直，求 a 的值.

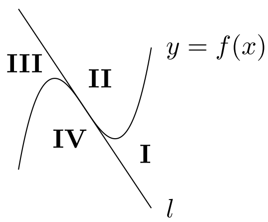


解 $f'(x)=a+\cos x$，于是切线斜率的取值范围为 $[a-1,a+1]$．根据题意，显然 $-1<a<1$，于是切线斜率的负倒数的取值范围为

$$\left(-\infty,-\frac{1}{a+1}\right]\cup\left[-\frac{1}{a-1},+\infty\right),$$

这两个范围有公共部分，于是 $-\dfrac{1}{a+1}\geqslant a-1$ 或 $-\dfrac{1}{a-1}\leqslant a+1$，结合 $-1<a<1$，因此 $a=0$．

例题 2.9 如图，过三次函数 $f(x)$ 图象的对称中心作切线 l，则坐标平面被切线 l 和函数 $f(x)$ 的图象分割为四个区域，证明以下结论：



(1) 过区域 **I**、**III** 内的点作 $y=f(x)$ 的切线，有且仅有 3 条；

(2) 过区域 **II**、**IV** 内的点以及对称中心作 $y=f(x)$ 的切线，有且仅有 1 条；

(3) 过切线 l 或函数 $f(x)$ 图象 (除去对称中心) 上的点作 $y=f(x)$ 的切线，有且仅有 2 条.

解 略．*2007* 年全国 *II* 卷，*2010* 年湖北卷文科，*2014* 年北京卷文科均以此性质为背景.

例题 2.10 **(2013 年华约)** 已知函数 $f(x)=(1-x)\mathrm{e}^x-1$．

(1) 证明：当 $x>0$ 时，$f(x)<0$．

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1$ 且 $x_1=1$．证明：$\{x_n\}$ 单调递减且 $x_{n+1}>\dfrac{1}{2^n}\,(n\in\mathbb{N}^*)$．

解 *(1)* 因为 $f'(x)=-x\mathrm{e}^x$，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减．因此当 $x>0$ 时，$f(x)<f(0)=0$．

(2) 显然 $x_n>0$．

先证明 $\{x_n\}$ 单调递减，即 $x_{n+1}<x_n$．

由于

$$x_{n+1}<x_n\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x_{n+1}}<\mathrm{e}^{x_n}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n}<\mathrm{e}^{x_n}\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x_n}(1-x_n)-1<0,$$

根据第 (1) 小题，命题得证.

再证明 $x_n > \dfrac{1}{2^n}$ ，只需要证明 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} > \dfrac{1}{2}$. 用分析法

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n}\right)}{x_n} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n} > \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x_n} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x_n} - x_n\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x_n} - 1 > 0,$$

令 $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 1$ ，则

$$g'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 1 - \frac{1}{2}x\right),$$

而当 $x > 0$ 时 $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} > \dfrac{1}{2}x+1$ ，于是当 $x \in (0,+\infty)$ 时，$g'(x) > 0$. 因此当 $x > 0$ 时，$g(x) > g(0) = 0$ ，命题得证.

综上，原命题得证.

例题 2.11 (2013 年卓越联盟) 设 $x > 0$.

(1) 证明：$\mathrm{e}^x > 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$;

(2) 若 $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^y$ ，证明 $0 < y < x$.

解 (1) 略;

(2) 只需要证明 $1 < \mathrm{e}^y < \mathrm{e}^x$ ，左边即 (1)，右边即 $\mathrm{e}^x - (1+x) < \dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x$. 令 $h(x) = \mathrm{e}^x - (1+x) - \dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x$ ，则

$$h'(x) = \mathrm{e}^x - \left(1 + x\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x\right),$$

进而

$$h''(x) = -2x\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x,$$

因此可得 $h'(x)$ 单调递减，从而 $h'(x) < h(0) = 0$ ，进而 $h(x)$ 单调递减，原命题得证.

例题 2.12 (2011 年卓越联盟)

(1) 设 $f(x) = x\ln x$ ，求 $f'(x)$.

(2) 设 $0 < a < b$ ，求常数 C ，使得 $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b |\ln x - C|\,\mathrm{d}x$ 取得最小值;

(3) 记 **(2)** 中的最小值为 $m(a,b)$ ，证明 $m(a,b) < \ln 2$.

解 (1) $f'(x) = 1 + \ln x$;

(2) 显然 $\ln a \leqslant C \leqslant \ln b$ ，由 (1)，有

$$\int \ln x\mathrm{d}x = x(\ln x - 1),$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b|\ln x-C|\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{b-1}\left[\int_a^{\mathrm{e}^C}(C-\ln x)\mathrm{d}x-\int_{\mathrm{e}^C}^b(\ln x-C)\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{b-a}\cdot\left[C(\mathrm{e}^C-a)-\int_a^{\mathrm{e}^C}\ln x\mathrm{d}x+\int_{\mathrm{e}^C}^b\ln x\mathrm{d}x-C(b-\mathrm{e}^C)\right]\\&=\frac{a\ln a+b\ln b-(a+b)(C+1)+2\mathrm{e}^C}{b-a},\end{aligned}$$

令 $g(C)=2\mathrm{e}^C-(a+b)(C+1)$，则

$$g'(C)=2\mathrm{e}^C-(a+b),$$

于是当 $C=\ln\dfrac{a+b}{2}$ 时原式取得最小值；

(3) $m(a,b)<\ln 2$ 即 $\ln\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{b}{a}\ln\dfrac{a+b}{b}>2\ln 2$，于是设

$$h(x)=\ln(1+x)+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right),x>1,$$

则

$$h'(x)=\frac{1}{1+x}+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>0,$$

因此 $h(x)$ 在 $x>1$ 上是单调递减函数，因此 $h\left(\dfrac{b}{a}\right)>h(1)$，原命题得证.

例题 2.13 **(2011 年华约)** 已知函数 $f(x)=\dfrac{2x}{ax+b}$ 满足 $f(1)=1$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{3}$. 令 $x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_{n+1}=f(x_n)$，其中 $n=1,2,\cdots$.

(1) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式；**(2)** 证明：$x_1x_2\cdots x_{n+1}>\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

解 (1) $a=1$，$b=1$；$x_n=\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$.

(2) 欲证不等式即

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\mathrm{e},$$

也即

$$\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<1,$$

由于当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)<x$，于是

$$\text{左边}<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}<1=\text{右边},$$

因此原不等式得证[1].

[1]根据均值不等式有 $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，而 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 单调递增极限为 e，所以原不等式成立.

2.4 习题

习题 2.1 (2009 年天津高考) 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的导函数为 $f'(x)$，且 $2f(x)+xf'(x)>x^2$．下面的不等式在 $\mathbb{R}$ 上恒成立的是 ( )

A. $f(x)>0$　B. $f(x)<0$　C. $f(x)>x$　D. $f(x)<x$

习题 2.2 已知函数 $f(x)$ 满足 $(xf(x))'=\ln x$，$f(1)=0$，则 $f(x)$ ( )

A. 有极大值，无极小值　B. 有极小值，无极大值

C. 既有极大值，又有极小值　D. 既无极大值，又无极小值

习题 2.3 已知 $f(x)$ 为可导函数，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln 2-\dfrac{1}{2}$，且

$$xf'(x)-f(x)=\frac{4x^2\ln x}{4x+\frac{1}{2\ln 2-1}-1},$$

则 $f(x)$ ( )

A. 有极大值，无极小值　B. 有极小值，无极大值

C. 既有极大值，又有极小值　D. 既无极大值，又无极小值

习题 2.4 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax$ 有两个零点 $x_1<x_2$，则下列说法错误的是 ( )

A. $a>\mathrm{e}$　B. $x_1+x_2>2$

C. $x_1x_2>1$　D. 有极小值点 x_0，且 $x_1+x_2<2x_0$

习题 2.5 (2010 年 AAA 测试) 设 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}\,(a>0)$．过点 $P(a,0)$ 且平行于 y 轴的直线与曲线 $C:y=f(x)$ 的交点为 Q，曲线 C 在点 Q 处的切线交 x 轴于点 R，则 $\triangle PQR$ 的面积的最小值是________．

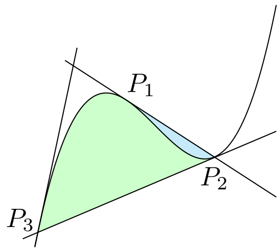
习题 2.6 若函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有两个极值点 $x_1,x_2\,(x_1\neq x_2)$ 且 $f(x_1)=x_1$，则方程 $3(f(x))^2+2af(x)+b=0$ 有________ 个根．

习题 2.7 已知函数 $f(x)=x(\ln x-ax)$ 有两个极值点 $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$，试比较大小：$f(x_1)$____ 0，$f(x_2)$____ $-\dfrac{1}{2}$ (填“$>$”或“$<$”)．

习题 2.8 已知 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$，求证：$\dfrac{a}{f'(a)}+\dfrac{b}{f'(b)}+\dfrac{c}{f'(c)}=0$．

习题 2.9 (2013 年湖南高考) 已知 $a>0$，函数 $f(x)=\left|\dfrac{x-a}{x+2a}\right|$，是否存在 a，使得函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,4)$ 内的图象上存在两点，在该两点处的切线相互垂直? 若存在，求出 a 的取值范围；若不存在，请说明理由．

习题 2.10 (2010 年福建高考) 如图，记三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(\,a\neq 0\,)$ 的图象为 C，若对于任意非零实数 x_1，曲线 C 与其在点 $P_1\,(x_1,f(x_1))$ 处的切线交于另一点 $P_2\,(x_2,f(x_2))$，曲线 C 与其在点 P_2 处的切线交于另一点 $P_3\,(x_3,f(x_3))$，线段 P_1P_2,P_2P_3 与曲线 C 所围成的封闭图形的面积分别记为 S_1,S_2．求证：$\dfrac{S_1}{S_2}$ 是定值．



习题 2.11 (2012 年清华保送) $f\,(x)=\ln\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$，$a_1=1$，$a_{n+1}=f\,(a_n)$．

(1) 求证：$\mathrm{e}^x x-\mathrm{e}^x+1\geqslant 0$ 恒成立；

(2) 试求 $f\,(x)$ 的单调区间；

(3) 求证：$\{a_n\}$ 为递减数列，且 $a_n>0$ 恒成立．

习题 2.12 (2012 年清华夏令营) 设 $0<a<b$，$f(x)=\dfrac{1}{x}$，过 $(a,f(a))$，$(b,f(b))$ 两点的直线方程为 $y=cx+d$．

(1) 求证：当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，$cx+d\geqslant\dfrac{1}{x}$；

(2) 求证：$\ln(n+1)+\dfrac{n}{2(n+1)}\leqslant 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$．

习题 2.13 (2010 年北大) A,B 为 $y=1-x^2$ 上在 y 轴两侧的点，求过 A,B 的切线与 x 轴围成面积的最小值．

2.5 习题参考答案及提示

习题 2.1 A.

习题 2.2 B.

习题 2.3 D. 提示：记 $\dfrac{1}{2\ln 2-1}-1=m$，则 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2(m+1)}$，而

$$x'f(x)-f(x)=\frac{4x^2\ln x}{4x+m}.$$

两边同时除以 x^2，有

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{4\ln x}{4x+m}$$

移项整理得

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x}+\frac{4x\ln x}{4x+m},$$

两边求导，可得

$$f''(x)=\left(\frac{f(x)}{x}\right)'+\frac{16x+4m(1+\ln x)}{(4x+m)^2},$$

将 (1) 代入，有

$$f''(x)=\frac{4\ln x}{4x+m}+\frac{16x+4m(1+\ln x)}{(4x+m)^2},$$

整理得

$$f''(x)=4(4x+2m)\cdot\frac{\ln x+1-\frac{m}{4x+2m}}{(4x+m)^2},$$

设其中分子部分为 $\varphi(x)$，注意到 $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ 且 $\varphi(x)$ 单调递增. 由 $\varphi(x)$ 的性质可得 $f''(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上小于零，在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上大于零；$f'(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，又 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，于是 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上非负；进而可得函数 $f(x)$ 无极值点，答案 D 正确.

习题 2.4 C.

习题 2.5 $\dfrac{\sqrt{2\mathrm{e}}}{2}$.

习题 2.6 3.

习题 2.7 $f\left(x_1\right)<0$，$f\left(x_2\right)>-\dfrac{1}{2}$.

习题 2.8 略.

习题 2.9 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

习题 2.10 任意三次函数 $f(x)$ 都可以通过平移变换变成

$$g(x)=px^3+qx,$$

然后可以作伸缩变换变成
$$h(x)=x^3+rx,$$
而无论平移还是伸缩，题中的 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 均保持不变，因此只需要证明命题对三次函数 $h(x)=x^3+rx$ 成立即可．根据题意，联立函数 $h(x)=x^3+rx$ 与函数 $h(x)$ 在 P_1 处的切线方程得
$$(x-x_1)^2\cdot(x-x_2)=0,$$
于是
$$2x_1+x_2=0,\ 即\ x_2=-2x_1.$$
又由性质三的推论 *1*，可得
$$2x_1=x_2+x_3,\ 即\ x_3=4x_1.$$
于是，线段 P_1P_2 与曲线 C 所围成的封闭图形的面积
$$\begin{aligned}S_1&=\left|\int_{x_1}^{x_2}(x-x_1)^2\cdot(x-x_2)\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\int_{x_1}^{-2x_1}(x^3-3x_1^2x+2x_1^3)\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\left(\frac14x^4-\frac32x_1^2x^2+2x_1^3x\right)\Bigg|_{x_1}^{-2x_1}\right|\\&=\frac{27}{4}x_1^4,\end{aligned}$$
类似地，线段 P_2P_3 与曲线 C 所围成图形的面积 $S_2=\dfrac{27}{4}x_2^4$，于是所求的面积之比为
$$\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^4=\frac{1}{16}.$$

习题 2.11 *(1)* 令 $g(x)=\mathrm{e}^x(x-1)+1$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x\cdot x$．于是 $\min\limits_{x\in\mathbb{R}}g(x)=g(0)=0$，因此原不等式得证，等号当且仅当 $x=0$ 时取得．

(2) $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}^*$，其导函数
$$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x(x-1)+1}{x\cdot(\mathrm{e}^x-1)},$$
于是 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增[1]．

(3) 用数学归纳法证明 $a_n>f(a_n)$ 且 $a_n>0$ 即得．

习题 2.12 *(1)* 记 $x=\lambda a+(1-\lambda)b$，则
$$cx+d=\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b),$$

[1] $f(x)$ 在定义域上单调递增

于是只需要证明
$$\frac{\lambda}{a}+\frac{1-\lambda}{b}\geqslant\frac{1}{\lambda a+(1-\lambda)b},$$
应用柯西不等式即得.

(2) 利用积分放缩即可证明.

习题 2.13 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$，则 $y_1=1-{x_1}^2$，$y_2=1-{x_2}^2$．直线 AB 的方程为
$$\frac{y+y_0}{2}=1-x_0x,\text{ 即 } y=-2x_0x+2-y_0,$$
类似的，直线 PA 和直线 PB 的方程为
$$y=-2x_1x+2-y_1,y=-2x_2x+2-y_2,$$
于是 M,N 的横坐标分别为 $\dfrac{2-y_1}{2x_1}$ 和 $\dfrac{2-y_2}{2x_2}$．

因此所围成的面积
$$S=\frac12\cdot\left|\frac{2-y_2}{2x_2}-\frac{2-y_1}{2x_1}\right|\cdot y_0=\frac12\left|\frac{1+{x_2}^2}{2x_2}-\frac{1+{x_1}^2}{2x_1}\right|\cdot y_0=\left|\frac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{x_1x_2}\right|\cdot\frac{y_0}{4},$$
将直线 AB 与抛物线联立，有
$$-2x_0x+2-y_0=1-x^2\text{ 即 } x^2-2x_0x+1-y_0=0,$$
所以 $x_1x_2=1-y_0$，$x_1+x_2=2x_0$，进而 $|x_1-x_2|=2\sqrt{{x_0}^2+y_0-1}$，于是
$$S=\left|\frac{2\sqrt{{x_0}^2+y_0-1}\cdot y_0}{1-y_0}\right|\cdot\frac{y_0}{4}=\frac{{y_0}^2}{2}\cdot\left|\frac{\sqrt{{x_0}^2+y_0-1}}{1-y_0}\right|,$$
由于 x_1,x_2 异号，于是 $x_1x_2<0$，$y_0-1>0$，于是
$$S=\frac{{y_0}^2}{2(y_0-1)}\cdot\sqrt{{x_0}^2+(y_0-1)}\geqslant\frac{{y_0}^2}{2\sqrt{y_0-1}},$$
当且仅当 $x_0=0$ 时取等号.

设 $\sqrt{y_0-1}=t$，$t>0$ 则
$$S\geqslant\frac{\left(t^2+1\right)^2}{2t}.$$
令 $f(t)=\dfrac{\left(t^2+1\right)^2}{t}$，则
$$f'(t)=\frac{2\left(t^2+1\right)\cdot 2t\cdot t-\left(t^2+1\right)^2}{t^2}=\frac{\left(t^2+1\right)\left(3t^2-1\right)}{t^2},$$
所以当 $t=\dfrac{1}{\sqrt3}$ 时，$f(t)$ 取得最小值 $\dfrac{16\sqrt3}{9}$，于是 S 的最小值为 $\dfrac{8\sqrt3}{9}$．

第三章　三角恒等变形与三角函数

1. 积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)] \qquad \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] \qquad \sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

2. 和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

3. 三倍角公式 (一)

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \qquad \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \qquad \tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

4. 三倍角公式 (二)

$$\sin 3\theta = 4\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\cdot\sin\theta\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$$

$$\cos 3\theta = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\cdot\cos\theta\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$$

$$\tan 3\theta = \tan\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\cdot\tan\theta\cdot\tan\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$$

5. 正 (余) 弦平方差公式

$$\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \cos^2 x$$

$$\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y$$

6. 三角函数的图象与性质

三角函数的有界性，简单的三角不等式与三角方程.

3.1 和差角公式

例题 3.1 设角 α,β,γ 满足不等式 $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\geqslant 2$. 证明: $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leqslant\sqrt{5}$.

解 两个不等式左边平方相加可得

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2+(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2=3+2\cos(\alpha-\beta)+2\cos(\beta-\gamma)+2\cos(\gamma-\alpha)\leqslant 9.$$

例题 3.2 **(2012 年复旦)** $\arctan\dfrac{1}{3}+\arctan\dfrac{1}{5}+\arctan\dfrac{1}{7}+\arctan\dfrac{1}{8}=$________.

解 $\dfrac{\pi}{4}$. 可以用正切的和角公式，也可以利用复数的三角形式求解.

例题 3.3 **(2008 年南大)** 求 $(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 2^\circ)\cdots(1+\tan 44^\circ)(1+\tan 45^\circ)$.

解 2^{23} . 先证明 $(1+\tan\theta)(1+\tan(45^\circ-\theta))=2$.

例题 3.4 **(2011 年卓越联盟)** 已知 $\sin 2(\alpha+\gamma)=n\sin 2\beta$ ，则 $\dfrac{\tan(\alpha+\beta+\gamma)}{\tan(\alpha-\beta+\gamma)}$ 的值是________.

解 $\dfrac{n+1}{n-1}$. 分别记 $x=\alpha+\beta+\gamma$ ， $y=\alpha-\beta+\gamma$ 即得.

例题 3.5 在三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$ ，M 是边 BC 的中点，且 $\sin\angle BAM=\dfrac{1}{3}$ ，则 $\sin\angle BAC=$________ .

解 恰当的将条件 $MB=MC$ 转化是解决问题的关键. 考虑到 C 为直角，因此

$$\tan\angle BAC=2\tan\angle MAC,$$

即

$$\tan\angle BAC=2\tan(\angle BAC-\angle BAM).$$

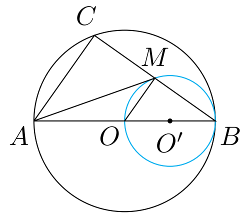
由 $\sin\angle BAM=\dfrac{1}{3}$ ，得 $\tan\angle BAM=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ，代入上式中，得

$$\tan\angle BAC=2\cdot\frac{\tan\angle BAC-\frac{\sqrt{2}}{4}}{1+\tan\angle BAC\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}},$$

解得

$$\tan\angle BAC=\sqrt{2},\ \text{即}\ \sin\angle BAC=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

在解方程的时候注意到方程关于 $\tan\angle BAC$ 有重根. 这就意味着如果随着条件 $\angle BAM$ 的改变，那么 $\tan\angle BAC$ 可能无解，可能有一解，也可能有两解. 这样一来，就有对几何图形作进一步探索的必要了. 为了方便探索，可以将问题转化为当 $\angle BAC$ 变化时，$\angle MAB$ 的取值范围. 固定三角形 ABC 的斜边 AB ，使直角顶点 C 在圆上运动，此时 BC 边的中点 M 运动的轨迹也为圆 (M 的轨迹以 B 为中心缩小到 $\dfrac{1}{2}$ 的结果).



易得当直线 AM 与点 M 的轨迹相切时 $\angle MAB$ 最大，其最大值恰为 $\arcsin\dfrac{1}{3}$，即本文题中所给出的条件．这样，我们就得到了当 $\sin\angle MAB > \dfrac{1}{3}$ 时，无解；当 $\sin\angle MAB = \dfrac{1}{3}$ 时，一解；当 $0 < \sin\angle MAB < \dfrac{1}{3}$ 时，两解．

3.2 倍角公式

例题 3.6 **(2013 年北约)** 对任意 θ，求 $32\cos^6\theta - \cos 6\theta - 6\cos 4\theta - 15\cos 2\theta$ 的值．

解 10．应用三倍角公式和二倍角公式即得．

例题 3.7 求 $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$ 的值．

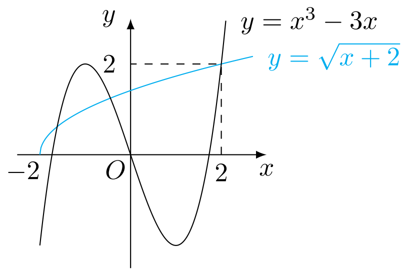
解 $\dfrac{1}{2}$．直接利用三倍角公式即得．

例题 3.8 求 $\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}$ 与 $\sin\dfrac{\pi}{5}\sin\dfrac{2\pi}{5}$ 的值．

解 乘以 $\sin\dfrac{\pi}{5}$ 可得 $\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{1}{4}$．进而
$$\left(\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} + \frac{1}{4}\right)\left(\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4},$$
于是解得 $\sin\dfrac{\pi}{5}\sin\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$．

例题 3.9 解方程 $x^3 - 3x = \sqrt{x+2}$．

解 画函数的草图，可得方程的解都在区间 $[-2, 2]$ 上，如图．



将方程整理为
$$4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^3 - 3\cdot\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\frac{x}{2}+1}{2}},$$
令 $\dfrac{x}{2} = \cos\theta$，得 $\cos 3\theta = \cos\dfrac{\theta}{2}$，解得 $x = 2, 2\cos\dfrac{4\pi}{7}, 2\cos\dfrac{4\pi}{5}$．

例题 3.10 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 且满足 $a_n=\dfrac{1}{2}\left(S_n+\dfrac{1}{S_n}\right)$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

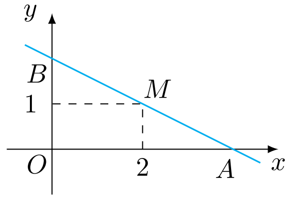
解 根据题意，有

$$\frac{1}{S_{n-1}}=\frac{\frac{2}{S_n}}{1-\frac{1}{S_n^2}},$$

于是 $\dfrac{1}{S_n}=\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$，进而 $a_n=\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{2^n}}$.

3.3 万能公式

例题 3.11 已知直线过点 $M(2,1)$ 且与 x,y 轴正半轴分别交于 A,B 两点，O 为坐标原点，求：



(1) $\triangle OAB$ 面积的最小值；

(2) $\triangle OAB$ 周长的最小值.

解 第 *(1)* 小题很简单，问题的关键在于如何处理第 *(2)* 小题中的根号.

三角方法

设 $\angle BAO=x$，则

(1) 三角形 OAB 的面积

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{\tan x}\right)(1+2\tan x)=2+2\tan x+\frac{1}{2\tan x}\geqslant 4,$$

等号当且仅当 $\tan x=\dfrac{1}{2}$ 时取得，因此三角形 AOB 面积的最小值为 4 .

(2) 三角形 OAB 的周长

$$c_{\triangle OAB}=3+\frac{1}{\sin x}+\frac{2}{\cos x}+\frac{1}{\tan x}+2\tan x,$$

令 $\tan\dfrac{x}{2}=t$，$t\in(0,1)$，则[1]

$$c_{\triangle OAB}=3+\frac{1+t^2}{2t}+2\frac{2\left(1+t^2\right)}{1-t^2}+\frac{1-t^2}{2t}+\frac{4t}{1-t^2}=1+\frac{1}{t}+\frac{4}{1-t}\geqslant 10,$$

这里用到了柯西不等式，取得等号的条件是 $t=\dfrac{1}{3}$，因此三角形 AOB 周长的最小值为 10 .

代数方法

设直线的横截距和纵截距分别为 $\dfrac{1}{a}$ 和 $\dfrac{1}{b}$，则 $2a+b=1\ (a,b>0)$.

[1]可以看出，万能公式是三角代数式通往多项式的桥梁，因此是“万不得已才能用的公式”

(1) 由于 $1=2a+b\geqslant\sqrt{2ab}$，于是三角形 AOB 的面积 $\dfrac{1}{2ab}$ 的最小值为 4．

(2) 三角形 AOB 的周长为

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{ab}=\frac{2}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}},$$

而根据柯西不等式[1]

$$(3a+4b)^2\leqslant 25(a^2+b^2),$$

于是

$$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{3}{5}a+\frac{4}{5}b,$$

因此

$$a+b-\sqrt{a^2+b^2}\leqslant\frac{2a+b}{5}=\frac{1}{5},$$

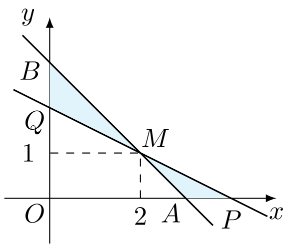
从而三角形 AOB 的周长

$$\frac{2}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}\geqslant 10,$$

等号当且仅当 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{4}$ 时取得，因此三角形 AOB 周长的最小值为 10．

调整法

(1) 如图，设直线在第一象限内的线段被 M 平分时与 x,y 轴的交点分别为 P,Q．接下来证明此时三角形 AOB 的面积最小．



若不然，假设 $AM<BM$，则

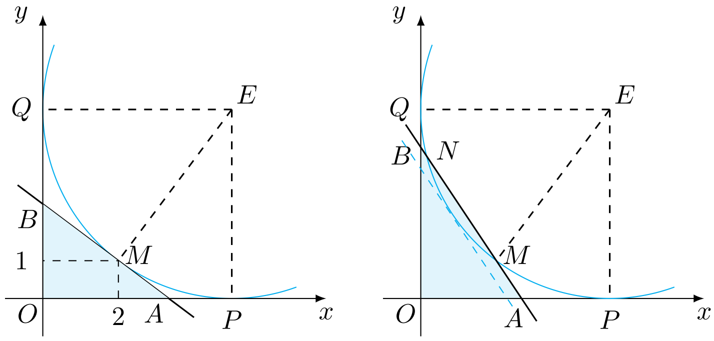
$$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle POQ}-S_{\triangle MAP}+S_{\triangle MBQ}=S_{\triangle POQ}-\frac{1}{2}MP\cdot(AM-BM)>S_{\triangle POQ},$$

因此当 M 平分 AB 时三角形 AOB 的面积最小[2]，最小值为 4．

(2) 过 M 作圆 E 与 x,y 轴均相切，作圆 E 在 M 处的切线，此时三角形 AOB 的周长最小，如左图．若不然，AB 为圆 E 的割线，此时可以作与该割线平行的切线，则显然有三角形 AOB 的周长小于切线与两坐标轴围成的三角形的周长（大小为 $OP+OQ$），如右图．

[1] 其中的系数是需要通过待定系数法配凑的

[2] 该结论与 $\angle AOB$ 是否是直角无关



经计算可得圆 $E:(x-5)^2+(y-5)^2=25$，$OP+OQ=10$，于是三角形 AOB 周长的最大值为 10．

3.4 积化和差与和差化积

例题 3.12 (2013 年华约) 已知 x,y 满足 $\begin{cases}\sin x+\sin y=\dfrac{1}{3},\\ \cos x-\cos y=\dfrac{1}{5},\end{cases}$ 求 $\cos(x+y)$ 与 $\sin(x-y)$ 的值.

解 $\cos(x+y)=\dfrac{208}{225}$，$\sin(x-y)=-\dfrac{15}{17}$．

例题 3.13 (2001 年复旦) 已知 $\begin{cases}\sin\alpha+\sin\beta=a,\\ \cos\alpha+\cos\beta=a+1,\end{cases}$ 求 $\sin(\alpha+\beta)$ 及 $\cos(\alpha+\beta)$．

解 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{2a^2+2a}{2a^2+2a+1}$，$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{2a+1}{2a^2+2a+1}$．

例题 3.14 已知 $\sin A+\sin B=\sin C$，$\cos A+\cos B=\cos C$，求 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C$．

解 由已知可以求得 $\cos(A-B)=-\dfrac{1}{2}$，$\cos(A+B)=\cos C$，于是

$$\text{原式}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)=\frac{3}{2}-\cos(A+B)\cos(A-B)-\frac{1}{2}\cos 2C=\frac{3}{2}.$$

3.5 简单三角不等式与方程

例题 3.15 若 $0<x,y<\dfrac{\pi}{2}$，且 $\sin x=x\cos y$，则 (　　)

A. $y<\dfrac{x}{4}$　　**B.** $\dfrac{x}{4}<y<\dfrac{x}{2}$　　**C.** $\dfrac{x}{2}<y<x$　　**D.** $x<y$

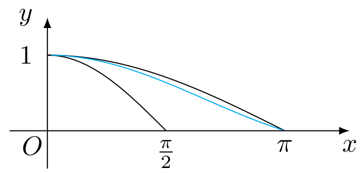
解 由题意知 $\dfrac{\sin x}{x}=\cos y=t$，分别作出两个函数 $t=\dfrac{\sin x}{x}$ 与 $t=\cos x$ 的草图．因为 $t=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，且 $\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$，所以

$$\cos y=\frac{\sin x}{x}>\cos x,$$

从而有 $y<x$．又因为

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{x}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{x}{2}<\cos\frac{x}{2},$$

从而有 $y>\frac{x}{2}$．综上有 $\frac{x}{2}<y<x$．



例题 3.16 **(2005 年交大)** $\sin^8x+\cos^8x=\frac{41}{128}$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $x=$________.

解 $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{3}$．

例题 3.17 **(2002 年复旦)** 解方程 $\cos 3x\cdot\tan 5x=\sin 7x$．

解 原方程等价于

$$\begin{cases}\sin 5x\cdot\cos 3x=\sin 7x\cdot\cos 5x,\\ \cos 5x\neq 0,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}2\cos 10x\cdot\sin 2x=0,\\ \cos 5x\neq 0,\end{cases}$$

解得 $x=k\pi$ 或 $x=\frac{k\pi}{10}+\frac{\pi}{20}$，其中 $k\in\mathbb{Z}$．

例题 3.18 **(2009 年复旦)** 已知关于 x 的方程 $\sqrt{3}\sin x+2\cos^2\frac{x}{2}=a$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内有两个不同的根，则常数 a 的取值范围是________.

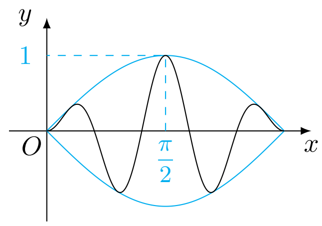
解 $(-1,2)\cup(2,3)$．记方程左侧为函数 $f(x)$，则 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$，于是 a 的取值范围是 $-1<a<3$ 且 $a\neq 2$ (由于区间 $(0,2\pi)$ 并不是一个完整的周期).

例题 3.19 **(2012 年北约)** 关于 x 的方程 $\sin 2x\cdot\sin 4x-\sin x\cdot\sin 3x=a$ 在 $x\in[0,\pi)$ 时有唯一解，求实数 a 的值.

解 设左侧函数为 $f(x)$，则

$$f(x)=-\frac{1}{2}(\cos 6x-\cos 2x)+\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 2x)=\frac{\cos 4x-\cos 6x}{2}=\sin x\cdot\sin 5x.$$

如图，于是 $a=1$．



3.6 习题

习题 3.1 $4\cos 10^\circ - \dfrac{1}{\tan 10^\circ} =$ ________ .

习题 3.2 (2003 年复旦) 已知 $\sin\alpha + \cos\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\cos\alpha + \sin\beta = \sqrt{2}$ ，则 $\tan\alpha \cdot \cot\beta =$ ________ .

习题 3.3 已知函数 $f(x) = \cos^2\omega x \sin\varphi + \sin\omega x \cos\omega x \cos\varphi$ ($\varphi \in \mathbb{N}^*$ 且 $|\varphi| < \dfrac{\pi}{4}$)， $f(0) = f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$. 若函数 $f(x)$ 的图象在 $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$ 内有且仅有一条对称轴，但没有对称中心，则 $\omega + \varphi =$ ________ .

习题 3.4 (2012 年清华保送生考试) 函数 $f(x) = 2\left(\sin 2x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos x - \sin 3x$ ，且 $x \in [0, 2\pi]$.

(1) 求函数的最大值和最小值；

(2) 求方程 $f(x) = \sqrt{3}$ 的解.

习题 3.5 证明： $2\sin^4 x + \dfrac{3}{4}\sin^2 2x + 5\cos^4 x - \cos 3x \cos x - 2\cos^2 x = 2$.

习题 3.6 (2012 年浙大) 若 $\sin(x + 20^\circ) = \cos(x + 10^\circ) + \cos(x - 10^\circ)$ ，求 $\tan x$.

习题 3.7 求证： $\cos\dfrac{\pi}{2n+1} + \cos\dfrac{3\pi}{2n+1} + \cdots + \cos\dfrac{(2n-1)\pi}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$.

习题 3.8 已知 $\sin x + \sin y + \sin z = 0$, $\cos x + \cos y + \cos z = 0$,求证： $\tan(x+y+z) + \tan x \tan y \tan z = 0$.

习题 3.9 解方程 $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

习题 3.10 已知关于 x 的方程 $(2a-1)\sin x + (2-a)\sin 2x = \sin 3x$ 的非负实数解从小到大排列构成一个无穷等差数列，求实数 a 的取值范围.

习题 3.11 (2012 年南开) 已知 $A + B + C = \pi$ ， $\sum\limits_{cyc} \cos A = 1$ ，求证： $\prod\limits_{cyc} (1 - \cos A) = 0$.

习题 3.12 证明：若 $\triangle ABC$ 中， $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C < 2$ ，则 $\triangle ABC$ 为钝角三角形.

习题 3.13 已知 $\dfrac{\sin A}{\cos B} + \dfrac{\sin B}{\cos A} = 2$ ，求证： $A + B = \dfrac{\pi}{2}$.

习题 3.14 已知在 $\triangle ABC$ 中， A, B 均为锐角， $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin C$ ，求证： $\triangle ABC$ 为直角三角形.

3.7 习题参考答案及提示

习题 3.1 $-\sqrt{3}$. 提示：原式 $=\dfrac{4\cos 10^\circ\sin 10^\circ-\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}=\dfrac{2\sin(30^\circ-10^\circ)-\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}=-\sqrt{3}$.

习题 3.2 $-\dfrac{7}{73}$.

习题 3.3 3 . 提示：注意区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$ 的长度不超过 $f(x)$ 的半周期.

习题 3.4 *(1)* 2 ， -2 ； *(2)* $0,\dfrac{\pi}{3},2\pi$.

习题 3.5 略.

习题 3.6 $\sqrt{3}$. 提示：方程可以转化为 $\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{2\cos 10^\circ-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$.

习题 3.7 略. 提示：乘以 $\sin\dfrac{\pi}{2n+1}$ 后利用积化和差进行裂项.

习题 3.8 略.

习题 3.9 $x=\varphi+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$ ，其中 $\varphi=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4},\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{4\pi}{3},\dfrac{11\pi}{6}$.

习题 3.10 $(-\infty,-2]\cup\{0\}\cup[2,+\infty)$. 提示： $2\sin x(1-\cos x)(a+2\cos x)=0$.

习题 3.11 根据已知有

$$\begin{aligned}&(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)\\=&1-(\cos A+\cos B+\cos C+(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)-\cos A\cos B\cos C\\=&(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)-\cos A\cos B\cos C\\=&\frac{1}{2}\left[1-\left(\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C\right)\right]-\cos A\cos B\cos C,\end{aligned}$$

我们熟知 $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-2\cos A\cos B\cos C$. 于是原命题得证.

习题 3.12 根据已知有

$$\begin{aligned}\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C<2&\Leftrightarrow\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{1-\cos 2C}{2}<2\\&\Leftrightarrow\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C>-1,\end{aligned}$$

我们熟知

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C,$$

于是 $\cos A\cos B\cos C<0$ ，这就证明了 $\triangle ABC$ 必然为钝角三角形.

习题 3.13 根据已知

$$\begin{aligned}\frac{\sin A}{\cos B}+\frac{\sin B}{\cos A}=2 &\Leftrightarrow \sin A\cos A+\sin B\cos B=2\cos A\cos B\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2A+\frac{1}{2}\sin 2B=\cos(A+B)+\cos(A-B)\\ &\Leftrightarrow \sin(A+B)\cos(A-B)=\cos(A+B)+\cos(A-B)\\ &\Leftrightarrow [1-\sin(A+B)]\cos(A-B)=-\cos(A+B)\\ &\Leftrightarrow [1-\sin(A+B)]^2\cos^2(A-B)=1-\sin^2(A+B),\end{aligned}$$

而 $[1-\sin(A+B)]^2\leqslant 1-\sin^2(A+B)$，等号当且仅当 $\sin(A+B)=1$ 时取得．于是 $A+B=\dfrac{\pi}{2}$．

习题 3.14 根据已知

$$\begin{aligned}\sin^2 A+\sin^2 B=\sin C &\Leftrightarrow \frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}=\sin(A+B)\\ &\Leftrightarrow 1-\cos(A+B)\cos(A-B)=\sin(A+B),\end{aligned}$$

第一种情况，若 $\cos(A+B)=0$，则 $A+B=\dfrac{\pi}{2}$，于是三角形为直角三角形；
第二种情况，若 $\cos(A+B)\neq 0$，不妨设 $A-B\geqslant 0$，则

$$\cos(A-B)=\frac{1-\sin(A+B)}{\cos(A+B)},$$

又 $0\leqslant A-B<A+B<\pi$，$\cos(A-B)>\cos(A+B)$，即 $1-\sin(A+B)>\cos^2(A+B)$，也即

$$\sin(A+B)<1-\cos^2(A+B)=\sin^2(A+B),$$

矛盾．
综上，原命题得证．

第四章　解三角形

1. 模尔外德公式

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}},\ \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}.$$

2. 半角公式

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

3. 三角和的正余弦公式

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sum_{cyc}(\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma)-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sum_{cyc}(\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma)$$

4. 三角形内角恒等式

$$\sum\sin^2 A=2+2\prod\cos A,\sum\sin A=4\prod\cos\frac{A}{2},$$
$$\sum\cos^2 A=1-2\prod\cos A,\sum\cos A=4\prod\sin\frac{A}{2}+1,$$
$$\sum\tan A=\prod\tan A,\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1.$$

4.1　常规的解三角形

例题 4.1 在 $\triangle ABC$ 中， A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $b^2=a^2+bc$， $A=\dfrac{\pi}{6}$，求 C.

解 $\dfrac{\pi}{4}$. 注意应用正弦平方差公式.

例题 4.2 已知 D 为 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的一点，$BD:DC=1:2$， $AB:AD:AC=3:k:1$，求 k 的取值范围.

解 $\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{7}{3}\right)$. 注意利用余弦定理以及三角形的三边关系.

例题 4.3 **(2008 年浙大)** 在 $\triangle ABC$ 中，A,B,C 为三个内角，求证：$\cos B+\cos C+\dfrac{2a}{b+c}\geqslant 4\sin\dfrac{A}{2}$.

解 利用正弦定理化边为角后和差化积，再利用均值不等式即得.

例题 4.4 **(2013 年卓越联盟)** 在 $\triangle ABC$ 中，A,B,C 的对边分别为 a,b,c . 已知 $2\sin^2\dfrac{A+B}{2}=1+\cos 2C$.

(1) 求 C 的大小；

(2) 若 $c^2=2b^2-2a^2$ ，求 $\cos 2A-\cos 2B$ 的值.

解 *(1)* $\dfrac{2\pi}{3}$ ；*(2)* $\cos 2A-\cos 2B=-2\sin^2 A+2\sin^2 B=\sin^2 C=\dfrac{3}{4}$.

例题 4.5 **(2011 年华约)** A,B,C 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 a,b,c 所对的角，$\triangle ABC$ 不是直角三角形.

(1) 求证：$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

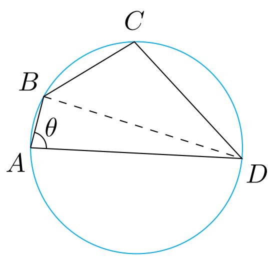
(2) 当 $\sqrt{3}\tan C-1=\dfrac{\tan B+\tan C}{\tan A}$ ，且 $\dfrac{1}{\sin 2A},\dfrac{1}{\sin 2B},\dfrac{1}{\sin 2C}$ 成等差数列时，求 $\cos\dfrac{C-A}{2}$ 的值.

解 *(1)* 略；*(2)* $1,\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

4.2 解三角形在平面几何中的应用

例题 4.6 **(2009 年北大)** 一个圆的内接四边形边长依次为 $1,2,3,4$ ，求这个圆的半径及内接四边形的面积. 如果去掉“圆内接”的限制条件，四边形的面积的最大值是多少?

解 如图，连接 BD ，设 $\angle BAD=\theta$ ，则 $\angle BCD=\pi-\theta$.



在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 中分别应用余弦定理，得

$$BD^2=17-8\cos\theta=13+12\cos\theta,$$

于是 $\cos\theta=\dfrac{1}{5}$ ，因此 $BD^2=\dfrac{77}{5}$ ，$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ ，根据正弦定理，其外接圆半径为 $\dfrac{\sqrt{2310}}{24}$ ，面积为 $2\sqrt{6}$ [1]. 四边形 $ABCD$ 的面积 $S_{ABCD}=2\sin A+3\sin C$ ，而 $2\cos A-3\cos C=1$ ，于是

$$S_{ABCD}^2=12-12\cos(A+C),$$

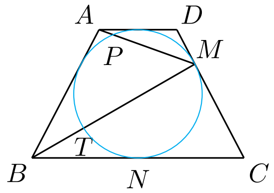
因此面积的最大值[2]也为 $2\sqrt{6}$.

[1] 圆内接四边形的面积公式 (海伦公式) 为 $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

[2] 该命题可以推广位四边长给定的四边形中圆内接四边形的面积最大

例题 **4.7** (**2010** 年北大夏令营) 等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AB=CD$，$ABCD$ 的内切圆与腰 CD 切于点 M，AM, BM 分别与内切圆交于点 P,T，求 $\dfrac{AM}{AP}+\dfrac{BM}{BT}$．

解 设 BC 与内切圆切于点 N，如图.

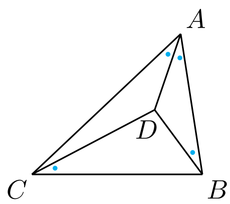


由切割线定理 $BT \cdot BM = BN^2$，又

$$BM^2 = BC^2 + MC^2 - 2BC \cdot CM \cdot \cos C = 4BN^2 + BN^2 - 2 \cdot 2BN \cdot BN \cdot \cos C = BN^2 \cdot (5 - 4\cos C),$$

两式相比即得 $\dfrac{BM}{BT} = 5 - 4\cos C$，类似的，$\dfrac{AM}{AP} = 5 - 4\cos D$，于是所求值为 10．

例题 **4.8** (**2011** 年北大保送) 如图所示，$\angle CAD = \angle BAD = \angle ABD = \angle BCD$，求证：$\triangle ABC$ 的三边长成等比数列.



解 根据题意有

$$\angle ADB = B + C, \angle ADC = B + A, \angle BDC = A + C,$$

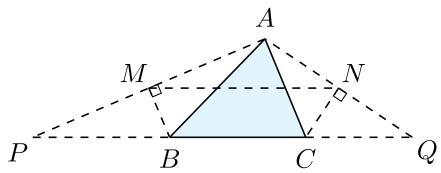
从而

$$\frac{AB}{\sin\angle ADB} = \frac{BD}{\sin\angle DAB} = \frac{BD}{\sin\angle BCD} = \frac{BC}{\sin\angle BDC},$$

因此 $\dfrac{AB}{\sin\angle DAB} = \dfrac{BC}{\sin\angle BDC}$，即 $\dfrac{AB}{\sin A} = \dfrac{BC}{\sin(A+C)}$，也即 $AB \cdot AC = BC^2$ [1]．

例题 **4.9** 已知 $\triangle ABC$ 中 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $a+b+c=10$，求 $b^2\cos^2\dfrac{C}{2}+c^2\cos^2\dfrac{B}{2}+2bc\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A}{2}$ 的值.

解 如图，过 A 分别作 B,C 的外角平分线的垂线，垂足分别为 M,N，与直线 BC 分别交于 P,Q．所求代数式即 $MN^2 = \dfrac{1}{4}PQ^2 = 25$ (也可以直接利用半角公式计算).



[1]平面几何作法：延长 BA 至 E，使得 $DE=DC$ (本质即旋转 $\triangle ADC$ 至 $\triangle BDE$)，证明 $\angle BAC = \angle BCE$ 即可

4.3 习题

习题 4.1 (2013 年浙江高考) 在空间中，过点 A 作平面 π 的垂线，垂足为 B，记 $B=f_\pi(A)$，设 α，β 是两个不同的平面，对空间任意一点 P，$Q_1=f_\beta\left[f_\alpha(P)\right]$，$Q_2=f_\alpha\left[f_\beta(P)\right]$，恒有 $PQ_1=PQ_2$，则 (　　)

A. 平面 α 与平面 β 垂直

B. 平面 α 与平面 β 所成的（锐）二面角为 45°

C. 平面 α 与平面 β 平行

D. 平面 α 与平面 β 所成的 (锐) 二面角为 60°

习题 4.2 (2015 年北大博雅) 在直角三角形 ABC 中，$B=90^\circ$，$A=60^\circ$，三角形 ABC 的内切圆半径 $r=1$，BC 边上的切点为 D，则 $AD=$________.

习题 4.3 (2012 年北约) 锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心到 a,b,c 三边的距离的比为________(用 A,B,C 表示).

习题 4.4 (2010 年 AAA 测试) $\triangle ABC$ 中，三边长 a,b,c 满足 $a+c=3b$，则 $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}$ 的值为________.

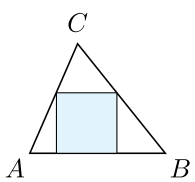
习题 4.5 在 $\triangle ABC$ 中，若 $9a^2+9b^2-19c^2=0$，则 $\dfrac{\cot C}{\cot A+\cot B}=$________.

习题 4.6 (2011 年北约) 已知平行四边形的两条邻边长分别是 3 和 5，一条对角线长是 6，则另一条对角线的长为________.

习题 4.7 已知 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，且 $AG\perp BG$，则 $\dfrac{\tan C}{\tan A}+\dfrac{\tan C}{\tan B}=$ ________ .

习题 4.8 (2012 年北大夏令营) 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别是 $2,3,4$，分别求 $\triangle ABC$ 的内切圆半径与外接圆半径.

习题 4.9 (2012 年北大保送) 如图，称四个顶点都落在三角形三边上的正方形叫三角形的内接正方形. 若锐角三角形 ABC 的三边满足 $a>b>c$，证明：这个三角形的内接正方形边长的最小值为 $\dfrac{ac\sin B}{a+c\sin B}$.



习题 4.10 已知向量 $\vec{p}=(\sin A,\cos A)$，$\vec{q}=(\cos B,\sin B)$，且 $\vec{p}\cdot\vec{q}=\sin 2C$，其中 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c.

(1) 求 C 的大小；

(2) 证明：$\vec{p}\cdot\vec{q}=\sin 2C$ 的充分必要条件是 $\sec 2C+\tan 2C=-\sqrt{3}-2$；

(3) 已知 $A=75^\circ$，$c=\sqrt{3}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

习题 4.11 (2011 年卓越联盟) 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2AC$，AD 是 A 的角平分线，且 $AD=kAC$.

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 若 $S_{\triangle ABC}=1$，则 k 为何值时 BC 最短?

习题 4.12 (2010 年 AAA 测试) 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $2\sin^2\dfrac{A+B}{2}-\cos 2C=1$，外接圆半径 $R=2$.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

习题 4.13 (2005 年交大) 是否存在三边为连续自然数的三角形，分别使得

(1) 最大角是最小角的两倍;

(2) 最大角是最小角的三倍;

若存在，求出该三角形；若不存在，请说明理由.

习题 4.14 (2009 年南大) 求所有满足 $\tan A+\tan B+\tan C\leqslant[\tan A]+[\tan B]+[\tan C]$ 的非直角三角形.

习题 4.15 (2012 年清华夏令营) 是否存在一个非等腰三角形 ABC，使得 $\cos A+\cos B=\cos C$?

4.4 习题参考答案及提示

习题 4.1 A.

习题 4.2 $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$.

习题 4.3 $\cos A:\cos B:\cos C$.

习题 4.4 $\dfrac{1}{2}$.

习题 4.5 $\dfrac{5}{9}$.

习题 4.6 $4\sqrt{2}$.

习题 4.7 $\dfrac{1}{2}$. 提示：记 $\overrightarrow{CA}=\vec{m}$ ，$\overrightarrow{CB}=\vec{n}$ ，则 $\overrightarrow{CG}=\dfrac{1}{3}\vec{m}+\dfrac{1}{3}\vec{n}$ ，于是

$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BG}=\left(-\frac{2}{3}\vec{m}+\frac{1}{3}\vec{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{m}-\frac{2}{3}\vec{n}\right)=-\frac{1}{9}\left(2a^2+2b^2-5ab\cos C\right),$$

于是
$$\frac{\tan C}{\tan A}+\frac{\tan C}{\tan B}=\frac{a^2+b^2-2ab\cos C}{ab\cos C}=\frac{1}{2}.$$

习题 4.8 内切圆半径为 $\dfrac{\sqrt{15}}{6}$ ，外接圆半径为 $\dfrac{8\sqrt{15}}{15}$.

习题 4.9 略. 提示：正方形的两个顶点落在 BC 上时，边长为 $\dfrac{abc}{2Ra+bc}$ ，再比较大小即可.

习题 4.10 (1) $C=\dfrac{\pi}{3}$ ；(2) 略；(3) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$.

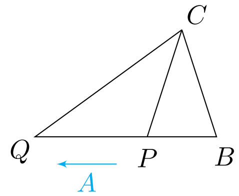
习题 4.11 (1) $\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$ ；(2) 当 $k=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ 时，BC 最短为 $\sqrt{3}$.

习题 4.12 (1) $C=\dfrac{2\pi}{3}$ ；(2) $\sqrt{3}$.

习题 4.13 (1) 存在，三边长分别是 $4,5,6$ ；(2) 不存在.

习题 4.14 三个内角分别为 $\dfrac{\pi}{4}$ ，$\arctan 2$ ，$\arctan 3$.

习题 4.15 如图，取顶角为 36° 的等腰三角形 QBC ，在 BQ 上选取点 P 使得 $\angle CPB=72^\circ$ (过 C 作腰 BQ 的高，垂足为 P).



当 A 位于 P 点位置时，$\cos A+\cos B-\cos C<0$ ；当 A 位于 Q 点位置时，$\cos A+\cos B-\cos C>0$. 于是在 A 从 P 点运动到 Q 点的过程中，必然存在某个位置使得 $\cos A+\cos B-\cos C=0$ ，且容易证明此时 $\triangle ABC$ 不是等腰三角形.

第五章　复数

1. 共轭复数与复数的模

复数 $z=a+b\mathrm{i}\,(a,b\in\mathbb{R})$ 的共轭复数 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$. 由于复数的共轭运算和四则运算可以任意交换顺序，因此 $|f(z)|$ (其中 f 为多项式) 总可以利用 $|f(z)\cdot f(\overline{z})|$ 的方式用 $|z|$ 和 $z+\overline{z}$ 表示. 这是计算复数的模的重要方式.

2. 复数的三角形式

$z=a+b\mathrm{i}=r\,(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\,(r\geqslant 0)$ ，其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$ ，$\cos\theta=\dfrac{a}{r}$ ，$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$ ；

3. 复数的三角形式的乘法

若 $z_1=r_1\,(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$ ，$z_2=r_2\,(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$ ，则

$$z_1z_2=r_1r_2\left[\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+\mathrm{i}\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right].$$

4. 复数的三角形式的除法

若 $z_1=r_1\,(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$ ，$z_2=r_2\,(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$ ，则

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)+\mathrm{i}\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)\right].$$

5. 复数的三角形式的乘方 (棣美弗定理)

若 $z=a+b\mathrm{i}=r\,(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ ，则 $z^n=r^n\,(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$ 复数 $z=r\,(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的 n 次方根为:

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right),(k=0,1,\cdots,n-1).$$

6. 复数及其四则运算的几何意义

复数所在的象限，复数的辐角和模；

复数向量形式下的加减法的几何意义与应用；

复数三角形式下的乘除法的几何意义与应用.

7. 复数的指数形式

定义[1] $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ ，任何一个复数 $z=r\,(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 都可以表示成 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 的形式，这种形式即复数的指数形式.

[1] 即欧拉公式

5.1 共轭复数

例题 5.1 (2012 年清华夏令营) 复数 z 满足 $|z|-\bar{z}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，则 $\frac{1}{z}=$________.

解 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

例题 5.2 (2011 年华约) 设复数 z 满足 $|z|<1$，且 $\left|\bar{z}+\frac{1}{z}\right|=\frac{5}{2}$，则 $|z|=$________.

解 $\frac{1}{2}$. 利用共轭法求复数的模或者两边同乘以 $|z|$ 均可.

例题 5.3 (2013 年北约) 已知复数 A,B,C 满足 $|A|=|B|=|C|=1$，且 $A+B+C\neq 0$，则 $\left|\frac{AB+BC+CA}{A+B+C}\right|=$________.

解 1 . 利用共轭法求复数的模.

5.2 复数的几何意义与三角形式

例题 5.4 (2011 年卓越) i 为虚数单位，设复数 z 满足 $|z|=1$，则 $\left|\frac{z^2-2z+2}{z-1+\mathrm{i}}\right|$ 的最大值为________.

解 $\sqrt{2}+1$. 注意原式等于 $|z-1-\mathrm{i}|$.

例题 5.5 求 $\tan 20^\circ+4\sin 20^\circ$ 的值.

解 设 $x=\cos 20^\circ+\mathrm{i}\sin 20^\circ$ ，则

$$\cos 20^\circ=\frac{x+\bar{x}}{2}=\frac{x^2+1}{2x},\sin 20^\circ=\frac{x-\bar{x}}{2\mathrm{i}}=\frac{x^2-1}{2x\mathrm{i}},$$

且满足 $x^3=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，代入计算可得.

例题 5.6 求证: $\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}=\tan 3x$.

解 设 $z=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ ，则

$$z+z^3+z^5=z^3\left(z^{-2}+1+z^2\right)=z^3\left(1+2\cos 2x\right),$$

从辐角的角度，原命题得证.

5.3 单位根

例题 5.7 利用方程 $z^n=1$ 的复数根的特点，证明:

$$\cos\theta_0+\cos\left(\theta_0+\frac{2\pi}{n}\right)+\cos\left(\theta_0+\frac{4\pi}{n}\right)+\cdots+\cos\left(\theta_0+\frac{2\left(n-1\right)\pi}{n}\right)=0,$$

$$\sin\theta_0+\sin\left(\theta_0+\frac{2\pi}{n}\right)+\sin\left(\theta_0+\frac{4\pi}{n}\right)+\cdots+\sin\left(\theta_0+\frac{2\left(n-1\right)\pi}{n}\right)=0.$$

解　记 $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}$ ，$z_k=\varepsilon^k z_0$ ，于是

$$z_0+z_1+\cdots+z_{n-1}=z_0\left(1+\varepsilon+\cdots+\varepsilon^{n-1}\right)=z_0\cdot\frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon}=0.$$

例题 5.8 (2010 年北大保送) 圆 $x^2+y^2=1$ 上有三点，坐标分别为 (x_1,y_1) ，(x_2,y_2) ，(x_3,y_3) ，且 $x_1+x_2+x_3=y_1+y_2+y_3=0$ ，求证：$x_1^2+x_2^2+x_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2=\dfrac{3}{2}$.

解　先证明这三点构成等边三角形，于是三点的坐标分别为

$$(\cos x,\sin x),\left(\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right),\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\right),\left(\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right),\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)\right),$$

然后半角公式降次即得.

例题 5.9 (2008 年清华) 求 $\sin^4 10^\circ+\sin^4 50^\circ+\sin^4 70^\circ$.

解　两次利用半角公式降次即得.

例题 5.10 求证：$\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdots\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$.

解　设 $x^n-1=0$ 的一个虚根为 ε ，则

$$x^n-1=(x-1)(x-\varepsilon)\left(x-\varepsilon^2\right)\cdots\left(x-\varepsilon^{n-1}\right),$$

于是

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=(x-\varepsilon)\left(x-\varepsilon^2\right)\cdots\left(x-\varepsilon^{n-1}\right).$$

分别令 $x=1$ 和 $x=-1$ 得

$$(1-\varepsilon)\left(1-\varepsilon^2\right)\cdots\left(1-\varepsilon^{n-1}\right)=n,\ (1+\varepsilon)\left(1+\varepsilon^2\right)\cdots\left(1+\varepsilon^{n-1}\right)=\frac{1-(-1)^n}{2},$$

两边取模，利用倍角公式升次去根号即得.

5.4 习题

习题 5.1 $z=-\dfrac{2}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}$，则 $1+z+z^2+\cdots+z^{2014}=$________.

习题 5.2 若 $\left|\dfrac{z^2-2\mathrm{i}}{z-1-\mathrm{i}}\right|=1$，则 $|z-1|$ 的最大值为________.

习题 5.3 (2006 年交大) 已知 $|z|=1$，k 是实数，z 是复数，则 $\left|z^2+kz+1\right|$ 的最大值为________.

习题 5.4 已知 $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^m=(1+\mathrm{i})^n\ (m,n\in\mathbb{N}^*)$，则 mn 的最小值为________.

习题 5.5 (2000 年复旦) $\sin^2\alpha+\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=$________.

习题 5.6 (2015 年江苏高考) 设向量

$$\vec{a}_k=\left(\cos\frac{k\pi}{6},\sin\frac{k\pi}{6}+\cos\frac{k\pi}{6}\right),k=0,1,2,\cdots,12,$$

则 $\sum\limits_{k=0}^{11}(\vec{a}_k\cdot\vec{a}_{k+1})=$________ .

习题 5.7 求下列三角代数式的值：

(1) $\cot 10^\circ-4\cos 10^\circ$；

(2) $\cot 20^\circ-\sec 10^\circ$；

(3) $\csc 40^\circ+\tan 10^\circ$；

(4) $4\sin 40^\circ-\tan 40^\circ$.

习题 5.8 (2015 年北大化学营) 求证：

(1) $\cos\dfrac{2\pi}{11}+\cos\dfrac{4\pi}{11}+\cos\dfrac{6\pi}{11}+\cos\dfrac{8\pi}{11}+\cos\dfrac{10\pi}{11}=-\dfrac{1}{2}$；(2) $\tan\dfrac{3\pi}{11}+4\sin\dfrac{2\pi}{11}=\sqrt{11}$.

习题 5.9 求 $\sin\dfrac{\pi}{7}\sin\dfrac{2\pi}{7}\sin\dfrac{4\pi}{7}$ 的值.

习题 5.10 (2015 年华中科大) 若复数 z 满足 $|z|=1$，求 $\left|z^3-z+2\right|^2$ 的最小值.

习题 5.11 已知 $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$，$a,b,c\in\mathbb{R}$，满足 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，且 $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_3}+\dfrac{z_3}{z_1}=1$，求 $|az_1+bz_2+cz_3|$ 的所有可能取值.

习题 5.12 (2009 年清华) 求复数 $2+2\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\pi\mathrm{i}}+\mathrm{e}^{\frac{6}{5}\pi\mathrm{i}}$ 的模，其中 $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$.

习题 5.13 已知 $\{z_n\}$ 为等比数列，$z_1=1$，$z_2=a+b\mathrm{i}$，$z_3=b+a\mathrm{i}$，其中 $a>0$，$b\in\mathbb{R}$. 求使得其前 n 项和 $S_n=0$ 的最小的 n .

5.5 习题参考答案及提示

习题 5.1 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

习题 5.2 $1+\sqrt{5}$. 提示：条件即 $|z-(-1-\mathrm{i})|=1$.

习题 5.3 $2+|k|$. 提示：可以利用共轭法求复数的模，也可以利用

$$\left|z^2+kz+1\right|=\left|z^2+kz+1\right|\cdot|\overline{z}|=|z+\overline{z}+k|\leqslant|z+\overline{z}|+|k|\leqslant 2+|k|.$$

习题 5.4 72 . 提示：利用棣莫弗定理.

习题 5.5 $\dfrac{3}{2}$.

习题 5.6 $9\sqrt{3}$.

习题 5.7 *(1)* $\sqrt{3}$; *(2)* $\sqrt{3}$; *(3)* $\sqrt{3}$; *(4)* $\sqrt{3}$.

习题 5.8 略. 提示：*(1)* 由 $\sum\limits_{k=0}^{10}\cos\dfrac{2k\pi}{11}=0$ 即得.
(2) 证明

$$\left(\sin\frac{3\pi}{11}+4\sin\frac{2\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}\right)^2-11\cos^2\frac{3\pi}{11}=0$$

即可.

习题 5.9 $\dfrac{\sqrt{7}}{8}$. 提示：平方后和差化积.

习题 5.10 $\dfrac{8}{27}$. 提示：利用共轭法求复数的模.

习题 5.11 设 $\dfrac{z_1}{z_2}=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$, $\dfrac{z_2}{z_3}=\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta$. 则

$$\frac{z_3}{z_1}=\cos(\alpha+\beta)-\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta),$$

于是有

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos(\alpha+\beta)=1,\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)=0,$$

第二个式子可以整理得

$$4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=0,$$

于是 $\dfrac{z_1}{z_2},\dfrac{z_2}{z_3},\dfrac{z_3}{z_1}$ 中必有一个为 1 ，进而剩余的两个或者同为 i 或者同为 $-\mathrm{i}$.
另一方面，根据已知有

$$|az_1+bz_2+cz_3|=\left|a+b\cdot\frac{z_2}{z_1}+c\cdot\frac{z_3}{z_1}\right|,$$

于是所求的值为 $\sqrt{a^2+(b+c)^2}$ 或 $\sqrt{b^2+(c+a)^2}$ 或 $\sqrt{c^2+(a+b)^2}$.

习题 5.12 由复数的指数形式的定义有

$$\begin{aligned}
\left|2+2\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\pi\mathrm{i}}+\mathrm{e}^{\frac{6}{5}\pi\mathrm{i}}\right| &= \left|2+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\mathrm{i}\frac{6\pi}{5}\right| \\
&= \sqrt{\left(2+2\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}\right)^2+\left(2\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{6\pi}{5}\right)^2} \\
&= \sqrt{9+8\cos\frac{2\pi}{5}+4\cos\frac{6\pi}{5}+4\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{6\pi}{5}+4\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{6\pi}{5}} \\
&= \sqrt{9+8\cos\frac{2\pi}{5}+4\cos\frac{6\pi}{5}+4\cos\frac{4\pi}{5}} \\
&= \sqrt{5+4\cos 0+4\cos\frac{2\pi}{5}+4\cos\frac{4\pi}{5}+4\cos\frac{6\pi}{5}+4\cos\frac{8\pi}{5}} \\
&= \sqrt{5}.
\end{aligned}$$

习题 5.13 12． 提示：$a+b\mathrm{i}=\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}$．

第六章　平面向量

1. 平面向量分解的基本定理

   若 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$ 是平面的一组基底，则该平面上的任一向量 $\vec{a}$ 都可以用这组基底线性表示：$\vec{a}=\lambda\vec{e}_1+\mu\vec{e}_2$，并且这种表示法是唯一的；

   平面向量分解的系数之和的几何意义：等系数和线；

   平面向量分解的系数之比的几何意义：等系数比线.

2. 极化恒等式

   对任意两个平面向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，均有 $4\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$.

3. 两个重要性质

   平行四边形的四边的平方和等于对角线的平方和：

   $$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=2\vec{a}^2+2\vec{b}^2;$$

   平面上任意一点 P 到矩形 $ABCD$ 的两条对角线 AC,BD 的端点的距离的平方和相等：

   $$PA^2+PC^2=PB^2+PC^2.$$

4. 三角形四心的向量表达

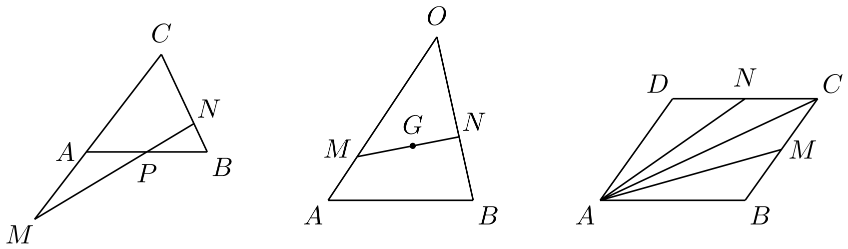
   三角形四心表达的基本定理与三角形四心的向量表达.

6.1　向量的分解

例题 6.1 **(1)** 直线 l 与 $\triangle ABC$ 的三边分别交于点 P,M,N，其中 P 为 AB 的中点.若 $\overrightarrow{CA}=m\overrightarrow{CM}$，$\overrightarrow{CB}=n\overrightarrow{CN}$，则 $m+n=$________；

(2) G 为 $\triangle OAB$ 的重心，过 G 点的直线分别交 OA,OB 于点 M,N，且 $\overrightarrow{OM}=m\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{ON}=n\overrightarrow{OB}$，则 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=$________；

(3) 在平行四边形 $ABCD$ 中，M,N 分别为边 BC,CD 的中点，若 $\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AM}+n\overrightarrow{AN}$，则 $m+n=$________.

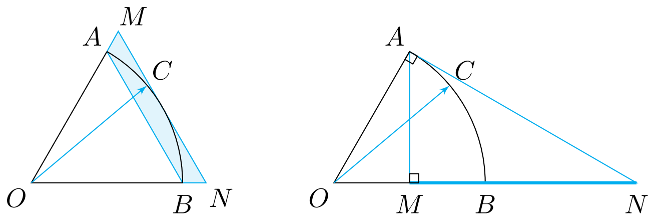


解 (1) 2；(2) 3；(3) $\dfrac{4}{3}$．

例题 6.2 在扇形 AOB 中，$OA=OB=1$，$\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$，$C$ 为弧 AB (不包含端点) 上的一点，且 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$．

(1) 求 $x+y$ 的取值范围；**(2)** 若 $t=x+\lambda y$ 存在最大值，求 λ 的取值范围．

解 (1) $\left(1,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$；(2) $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$．

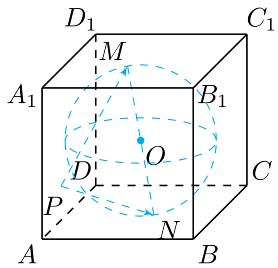


例题 6.3 已知 P 为凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内部 (包含边界) 的点，记 $f(P)=\sum\limits_{i=1}^{n}|PA_i|$，求证：当 P 位于某顶点位置时，$f(P)$ 取得最大值[1]．

解 用调整法，先证明边界处的 $f(P)$ 不小于内部，再证明顶点处的 $f(P)$ 不小于边界．

6.2 极化恒等式

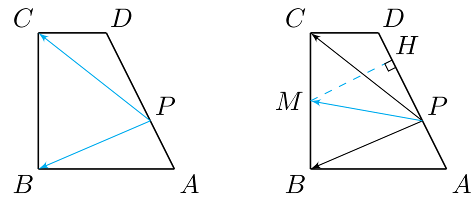
例题 6.4 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，MN 是它的内切球的一条弦 (我们把球面上任意两点之间的线段称为球的弦)，P 为正方体表面上的动点，当弦 MN 的长度最大时，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的取值范围是________．



解 $[1,2]$．

[1]注意与费马问题的对比

例题 6.5 在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$ ，$AB \perp BC$ ，$AB=2$ ，$CD=1$ ，$BC=a$ ，P 为线段 AD (含端点) 上的一个动点．设 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AD}$ ，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=y$ ，对于函数 $y=f(x)$ ，给出以下三个结论：



① $\forall a\in(0,+\infty)$ ，都有 $f(1)=1$ 成立；

② $\forall a\in(0,+\infty)$ ，函数 $f(x)$ 的最大值都等于 4 ；

③ 当 $a=2$ 时，$f(x)$ 的值域为 $[1,4]$ ．

所有正确结论的序号是________．

解 ①②．设 M 为 BC 的中点，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=PM^2-1$ ．过 M 作 AC 的垂线，垂足为 H ，则当 P 位于 H 处时 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 最小．

6.3 向量与四心

1. 内心

   $\sin A\cdot\overrightarrow{IA}+\sin B\cdot\overrightarrow{IB}+\sin C\cdot\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ ；

2. 外心

   $\sin 2A\cdot\overrightarrow{OA}+\sin 2B\cdot\overrightarrow{OB}+\sin 2C\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ ；

3. 重心

   $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ；

4. 垂心

   $\tan A\cdot\overrightarrow{HA}+\tan B\cdot\overrightarrow{HB}+\tan C\cdot\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ ；

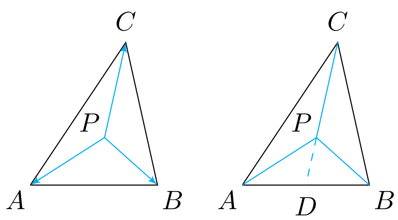
5. 旁心

   $-\sin A\cdot\overrightarrow{I_1A}+\sin B\cdot\overrightarrow{I_1B}+\sin C\cdot\overrightarrow{I_1C}=\vec{0}$ ；

   $\sin A\cdot\overrightarrow{I_2A}-\sin B\cdot\overrightarrow{I_2B}+\sin C\cdot\overrightarrow{I_2C}=\vec{0}$ ；

   $\sin A\cdot\overrightarrow{I_3A}+\sin B\cdot\overrightarrow{I_3B}-\sin C\cdot\overrightarrow{I_3C}=\vec{0}$ ．

例题 6.6 (2009 年南大) 设 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c ．对内任意一点 P ，均存在正实数 α,β,γ ，使得 $\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}+\gamma\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ ，其中 $\alpha:\beta:\gamma=S_a:S_b:S_c$ (S_a,S_b,S_c 分别表示边 a,b,c 与点 P 构成三角形面积)．



解 向量法

由于 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{S_c+S_b}{S_a+S_b+S_c}\overrightarrow{AQ}$，且根据共线向量的表达，有

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{S_c}{S_c+S_b}\overrightarrow{AC}+\frac{S_b}{S_c+S_b}\overrightarrow{AB}.$$

从而可得

$$\overrightarrow{AP}=\frac{S_c}{S_a+S_b+S_c}\overrightarrow{AC}+\frac{S_b}{S_a+S_b+S_c}\overrightarrow{AB}.$$

对上式应用向量的换底公式将所有的向量改写为以 P 为起点的，有

$$-\overrightarrow{PA}=\frac{S_c}{S_a+S_b+S_c}\left(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}\right)+\frac{S_b}{S_a+S_b+S_c}\left(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}\right),$$

整理即得.

三角法

记 $\angle APB=\alpha$，$\angle APC=\beta$，$PA=x$，$PB=y$，$PC=z$，欲证等式左边与 $\overrightarrow{PA}$ 作数量积

$$\begin{aligned}&\left(S_a\overrightarrow{PA}+S_b\overrightarrow{PB}+S_c\overrightarrow{PC}\right)\cdot\overrightarrow{PA}\\=&\frac{1}{2}yz\sin\left[2\pi-(\alpha+\beta)\right]\cdot x^2+\frac{1}{2}zx\sin\alpha\cdot xy\cos\beta+\frac{1}{2}xy\sin\beta\cdot zx\cos\alpha\\=&\frac{1}{2}x^2yz\left[-\sin\left(\alpha+\beta\right)+\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\right]\\=&0,\end{aligned}$$

同理，欲证不等式左边与 $\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}$ 作数量积得到的结果也均为 0．而向量 $\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}$ 不共线，因此欲证明等式左边为零向量，等式得证.

例题 6.7 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $2a=b+c$．O,I 分别为 $\triangle ABC$ 的外心和内心，求证：$OI\perp AI$．

解 由于

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{AI}\cdot\left(\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AO}\right)&=\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AO}\\&=\left(\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}\right)^2-\left(\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AO}\\&=\frac{2b^2c^2+2bc(b^2+c^2-a^2)}{(a+b+c)^2}-\frac{\frac{1}{2}bc^2+\frac{1}{2}b^2c}{a+b+c}\\&=\frac{bc}{2(a+b+c)^2}\cdot\left[2(2bc+b^2+c^2-a^2)-(b+c)(a+b+c)\right]\\&=\frac{bc(b+c-2a)}{2(a+b+c)}=0,\end{aligned}$$

因此原命题得证．也可以过 O 作 BC 的垂线，垂足为 M，交外接圆于 D，过 I 作 AB 的垂线垂足为 H，证明 $\triangle BDM$ 与 $\triangle AIH$ 全等.

6.4 习题

习题 6.1 设 $\triangle ABC$，P_0 是边 AB 上一定点，满足 $P_0B=\dfrac{1}{4}AB$，且对于边 AB 上任一点 P，恒有 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$，则 (　　)

A. $\angle ABC=90^\circ$　　B. $\angle BAC=90^\circ$　　C. $AB=AC$　　D. $AC=BC$

习题 6.2 已知平面内 $\triangle ABC$ 及一点 O．

(1) 若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则点 O 是 $\triangle ABC$ 的____心；

(2) 若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$，则点 O 是 $\triangle ABC$ 的____心；

(3) 当 $OA^2+OB^2+OC^2$ 取最小值时，点 O 是 $\triangle ABC$ 的____心．

习题 6.3 直角梯形 $AOBD$ 中，$\angle AOB$ 为直角，$OA=2OB=2BD=2$．圆 D 与 AB 相切，点 P 在圆 D 上．若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则 $x+y$ 的取值范围是________．

习题 6.4 在平面直角坐标系 xOy 的第一象限 (包括坐标轴) 有曲线段 AB：$y=1-x^2$．曲线上一点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则 $x+y$ 的取值范围是________．

习题 6.5 已知 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 $x+2y$ 的取值范围是________．

习题 6.6 已知 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，$AB=3$，$AC=2$，若 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ 且 $x+2y=1$，则 $\triangle ABC$ 的面积等于________．

习题 6.7 在 $\triangle ABC$ 中，AB 边上的中线 $CM=2$，若动点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\sin^2\theta\overrightarrow{AB}+\cos^2\theta\overrightarrow{AC}$，则 $\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最小值是________．

习题 6.8 已知单位向量 $\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}$ 的夹角为 60°，$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OM}+y\overrightarrow{ON}$，若 $\triangle PMN$ 是以 M 为直角顶点的直角三角形，则 $x-y=$________．

习题 6.9 设 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 为单位向量，非零向量 $\vec{b}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$，$x,y\in\mathbb{R}$．若 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{6}$，则 $\dfrac{|x|}{|\vec{b}|}$ 的最大值等于________．

习题 6.10 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，点 E 为 AB 的中点．以 A 为圆心，AE 为半径，作弧交 AD 于点 F．若 P 为劣弧 EF 上的动点，则 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}$ 的最小值为________．

习题 6.11 $\triangle ABC$ 中，$AB=4$，$BC=3$，$CA=2$，I 为的内心，$\overrightarrow{AI}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求 $x+y$．

习题 6.12 若 $B=\dfrac{\pi}{3}$，O 为的外心，点 P 在所在的平面上，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，且 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC}=8$，求边 AC 上的高 h 的最大值．

习题 6.13 已知 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，$\cos A=\dfrac{1}{3}$，若 $\overrightarrow{AO}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，求 $\alpha+\beta$ 的最大值．

习题 6.14 过 $\triangle OAB$ 的重心 G 的直线与边 OA,OB 分别交于 P 和 Q，已知 $\overrightarrow{OP}=h\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OB}$，$\triangle OAB$ 和 $\triangle OPQ$ 的面积分别为 S 和 T．求证：(1) $\dfrac{1}{h}+\dfrac{1}{k}=3$；(2) $\dfrac{4}{9}\leqslant T\leqslant\dfrac{1}{2}S$．

习题 6.15 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $a<b<c$．D,E 分别在边 AB,AC 上，且 $BD=CE=a$，O,I 分别为 $\triangle ABC$ 的外心和内心，求证：$OI\perp DE$．

6.5 习题参考答案及提示

习题 6.1 D.

习题 6.2 重；垂；重.

习题 6.3 $(1,2)$.

习题 6.4 $\left[1,\dfrac{5}{4}\right]$.

习题 6.5 $(0,2)$.

习题 6.6 $2\sqrt{2}$.

习题 6.7 -2 .

习题 6.8 1 .

习题 6.9 2 .

习题 6.10 $5-2\sqrt{5}$.

习题 6.11 $\dfrac{2}{3}$.

习题 6.12 $2\sqrt{3}$.

习题 6.13 $\dfrac{3}{4}$.

习题 6.14 略． 提示：(2) $\dfrac{T}{S}=hk=\dfrac{k^2}{3k-1}$ ，其中 $\dfrac{1}{2}\leqslant k\leqslant 1$.

习题 6.15 由于

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{OI}&=\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AO}\right)\\
&=\left(\frac{b-a}{b}\overrightarrow{AC}-\frac{c-a}{c}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}\right)\\
&=\frac{b-c}{a+b+c}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2}+\frac{bc(b-a)}{a+b+c}-\frac{bc(c-a)}{a+b+c}-\frac{b(b-a)}{2}+\frac{c(c-a)}{2}\\
&=\frac{(b-c)(b^2+c^2-a^2)+2bc(b-c)}{2(a+b+c)}-\frac{b^2-ab-c^2+ac}{2}\\
&=\frac{(b-c)(b+c+a)(b+c-a)}{2(a+b+c)}-\frac{(b-c)(b+c-a)}{2}\\
&=0,
\end{aligned}$$

因此原命题得证.

第七章　数列

1. 数列求和的裂项法

   递推原则，升次原则，结构原则；裂项放缩.

2. 求数列通项的不动点法与特征根法

   - 不动点法

     求多项式或分式一阶递推数列的通项，如 $a_{n+1}=\dfrac{\alpha a_n+\beta}{a_n+\gamma}$ 型；

   - 特征根法

     求线性递推数列的通项，如 $a_{n+1}=pa_n+qa_{n-1}\,(n\geqslant 2)$ 型.

3. 特殊数列的极限

   - $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n=\begin{cases}0, & |a|<1\\ 1, & a=1\\ \text{不存在}, & |a|>1 \text{ 或 } a=-1\end{cases}$

   - $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

   - 若 f,g 均为关于 n 的多项式,且多项式的次数分别为 p,q ,则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}=\begin{cases}0, & p<q\\ \dfrac{a_p}{a_q}, & p=q\\ \text{不存在}, & p>q\end{cases}$.

4. 无穷递缩等比数列的和

   $\{a_n\}$ 是等比数列，且 $0<|q|<1$ ，则

$$S=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}.$$

5. 数学归纳法的其他形式

   - 第二数学归纳法

     当 $n=1$ 时，命题成立；假设对一切小于 n 的正整数命题成立，能够推出 (证明) n 时命题也成立.

- 跳跃数学归纳法

  先证 $n=1,2,\cdots l$ 时命题成立；假设 $n=k,k+1,\cdots k+l-1$ 时命题成立，再证明 $n=k+l$ 时命题也成立 (有时称之为跨度为 l 的数学归纳法)；

- 反向数学归纳法

  先证明 $n=a_k$ 时命题成立，而对任何自然数 N 均存在 $a_{k_0}>N$，假设 $n=k$ 时命题成立，再证明 $n=k-1$ 时命题也成立；

- 螺旋数学归纳法

  加强命题的结论，这样在归纳假设时可以获得更多的条件.

7.1 基本数列与极限

例题 7.1 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，S_n 为其前 n 项和. 若正整数 i,j,k,l 满足 $i\leqslant k\leqslant l\leqslant j$，且 $i+j=k+l$，则 (　　)

A. $a_ia_j\leqslant a_ka_l$　　**B.** $a_ia_j\geqslant a_ka_l$　　**C.** $S_iS_j\leqslant S_kS_l$　　**D.** $S_iS_j\geqslant S_kS_l$

解 A. 不妨设 $a_n=a+nd$，$S_n=An^2+Bn$，则有

$$a_{m+n}\cdot a_{m-n}=[a+(m+n)d]\cdot[a+(m-n)d]=(a+md)^2-n^2d^2,$$

于是由 $n_1\geqslant n_2$ 可得

$$f(n_1)\leqslant f(n_2),$$

选项 A 正确，选项 B 错误.

另一方面，

$$\begin{aligned}S_{m+n}\cdot S_{m-n}&=\left[A(m+n)^2+B(m+n)\right]\cdot\left[A(m-n)^2+B(m-n)\right]\\&=(m^2-n^2)\cdot[A(m+n)+B]\cdot[A(m-n)+B]\\&=(m^2-n^2)\cdot\left[(Am+B)^2-A^2n^2\right],\end{aligned}$$

因此 $g(n)$ 对 n 并不具有一致的单调性，$g(n_1)$ 与 $g(n_2)$ 的大小关系不定，选项 C、D 错误.

例题 7.2 (2010 年北大夏令营) 已知 $\sin x,\cos x,\tan x$ 是一个双向无穷等比数列中的三项，求证：$\cot x$ 也是其中的一项.

解 设 $\sin x=a\cdot q^{n_1}$，$\cos x=a\cdot q^{n_2}$，$\tan x=a\cdot q^{n_3}$，其中 $a,q\neq 0$，$n_1,n_2,n_3\in\mathbb{Z}$.

由 $\sin x=\cos x\cdot\tan x$，得

$$a\cdot q^{n_1}=a\cdot q^{n_2}\cdot a\cdot q^{n_3},$$

从而 $a = q^{n_1-n_2-n_3}$. 于是

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{a}{q^{n_1-n_2-n_3}} \cdot \frac{1}{q^{n_1-n_2}} = a \cdot q^{-(2n_1-2n_2-n_3)}$$

为等比数列中的其中一项.

例题 7.3 **(2010 年北大)** 是否存在 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ，使 $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ 的某种排列为等差数列?

解　只需要考虑 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 的情形. 此时 $0 < \sin x < \tan x, \cos x < 1 < \cot x$ ，于是

$$\sin x + \cot x = \tan x + \cos x,$$

整理得 $(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 1$ ，矛盾.

例题 7.4 **(2012 年北约)** 方程 $\left(x^2 - 2x + m\right)\left(x^2 - 2x + n\right) = 0$ 的 4 个根可以构成首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列，则 $|m - n|$ 的值为________.

解　由韦达定理可得四个根之和为 4 ，于是四个根分别为 $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}$ ，于是 $|m - n| = \frac{1}{2}$.

例题 7.5 **(2012 年复旦)** 设 $x_0 = 0$ ，$x_1 = 1$ ，$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$ ，则数列 $\{x_n\}$ 的极限为________.

解　$x_n = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$ ，其极限为 $\frac{2}{3}$. 或 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \cdots = \frac{2}{3}$.

例题 7.6 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$.

解　显然 $\sqrt[n]{n} \geqslant 1$. 当 $n \geqslant 2$ 时，设 $\sqrt[n]{n} = 1 + x$ ，则

$$n = (1 + x)^n \geqslant 1 + \frac{1}{2}n(n-1)x^2,$$

从而有 $x \leqslant \sqrt{\frac{2}{n}}$. 因此有

$$1 \leqslant \sqrt[n]{n} \leqslant 1 + \sqrt{\frac{2}{n}},$$

由夹逼判敛法可得 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

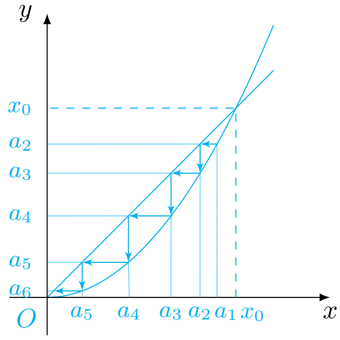
7.2　迭代函数法

一阶递推数列 $\{a_n\}$ 的递推公式往往用函数 $a_{n+1} = f(a_n)\,(n \in \mathbb{N}^*)$ 表示，记 $f_1(x) = f(x)$ ，$f_{k+1}(x) = f(f_k(x))$ ，其中 $k = 1, 2, \cdots$ ，并记 $a_1 = f_0(a_1)$ ，则有

$$a_n = f_{n-1}(a_1), n = 1, 2, \cdots,$$

因此称函数 $y = f(x)$ 为数列的递推函数. 此时可以将数列看作函数不停迭代时的一系列函数值，这种研究数列的方法称为迭代函数法.

通常我们通过判断 a_{n+1} 与 a_n 的大小关系来研究数列 $\{a_n\}$ 的单调性．在平面直角坐标系 xOy 中画出数列的递推函数 $y=f(x)$ 的图象，在得到点 $(a_1,f(a_1))$ 的位置以后，可以借助直线 $y=x$ 将函数值 $f(a_1)$ (也就是 a_2)“反射”到 x 轴上，这样就可以比较 a_1 与 a_2 的大小了．通过画如下的“蛛网图”，可以将这个过程进行下去，从而作出对数列单调性与有界性的判断．



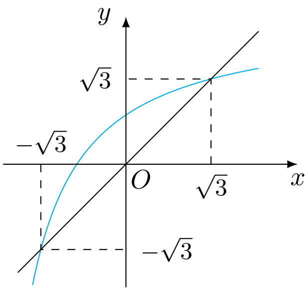
从代数的角度看，利用数列的递推函数的单调性可以将数列的项之间的大小关系递推下去，进而得到数列的单调性与有界性的严格论述．这种代数论述过程一般利用数学归纳法完成．此外，数列的递推函数 $f(x)$ 的不动点 (方程 $f(x)=x$ 的实数根) 在递推过程中往往充当“中流砥柱”的角色，因此首先求出不动点并利用不动点对递推数列进行改造对后续的解题有重要作用．

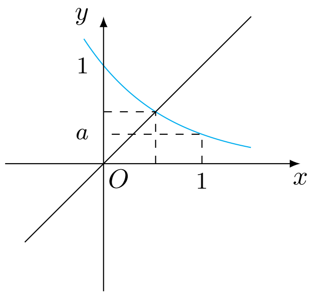
例题 7.7 利用迭代函数解决下列问题：**(1)** 设 $x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$，$n=1,2,3,\cdots$，判断数列 $\{x_n\}$ 的单调性；

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a\,(0<a<1)$，$a_{n+1}=a^{a_n}$，试比较 a_{20},a_{25},a_{30} 三者的大小．

解 *(1)* 当 $0<x_1<\sqrt{3}$ 时，$\{x_n\}$ 单调递增；当 $x_1=\sqrt{3}$ 时，$\{x_n\}$ 是常数列；当 $x_1>\sqrt{3}$ 时，$\{x_n\}$ 单调递减．

(2) $a_{25}<a_{30}<a_{20}$ [1]．





例题 7.8 数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_{n+1}=3a_n-3a_n^2$，$n=1,2,3,\cdots$．

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 为常数列，求 a_1 的值；

(2) 若 $a_1=\dfrac{1}{2}$，求证：$\dfrac{2}{3}<a_{2n}\leqslant\dfrac{3}{4}$；

(3) 在 **(2)** 的条件下，求证：数列 $\{a_{2n}\}$ 单调递减．

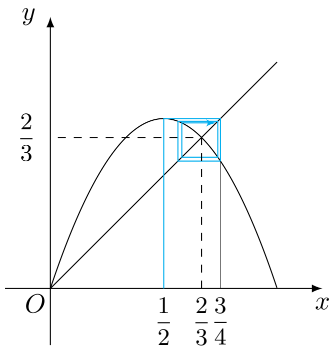
解 *(1)* 数列的递推函数为 $f(x)=3x-3x^2$．解不动点方程 $x=3x-3x^2$，得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{2}{3}$，于是符合题意的 a_1 的值为 0 或 $\dfrac{2}{3}$．

[1] 需要注意 $\{a_n\}$ 的奇数项子列和偶数项子列的极限当 $0<a<\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\mathrm{e}}$ 时不一致，当 $a\geqslant\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\mathrm{e}}$ 时一致

(2) 如图，将命题加强为

$$\frac{1}{2} \leqslant a_{2n-1} < \frac{2}{3} < a_{2n} \leqslant \frac{3}{4}.$$

下面用数学归纳法证明.



当 $n=1$ 时，显然有 $\frac{1}{2} \leqslant a_1 < \frac{2}{3} < a_2 \leqslant \frac{3}{4}$；
假设命题对 $n=k\ (k \in \mathbf{N}^*)$ 成立，即

$$\frac{1}{2} \leqslant a_{2k-1} < \frac{2}{3} < a_{2k} \leqslant \frac{3}{4},$$

则由于函数 $f(x)=3x-3x^2$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ 上单调递减，于是

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant f(a_{2k-1}) > f\left(\frac{2}{3}\right) > f(a_{2k}) \geqslant f\left(\frac{3}{4}\right),$$

即

$$\frac{9}{16} \leqslant a_{2k+1} < \frac{2}{3} < a_{2k} \leqslant \frac{3}{4},$$

而 $\frac{1}{2} < \frac{9}{16}$，因此又可以类似地得到

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant f(a_{2k+1}) > f\left(\frac{2}{3}\right) > f(a_{2k}) \geqslant f\left(\frac{3}{4}\right),$$

即

$$\frac{9}{16} \leqslant a_{2k+1} < \frac{2}{3} < a_{2k+2} \leqslant \frac{3}{4},$$

因此有

$$\frac{1}{2} \leqslant a_{2k+1} < \frac{2}{3} < a_{2k+2} \leqslant \frac{3}{4},$$

命题得证.

综上所述，原命题得证.

(3) 将命题加强为数列 $\{a_{2n-1}\}$ 单调递增，且数列 $\{a_{2n}\}$ 单调递减.
根据已知，$a_1=\frac{1}{2}$，$a_2=\frac{3}{4}$，$a_3=\frac{9}{16}$，于是

$$a_1 < a_3 \Rightarrow f(a_1) > f(a_3) \Rightarrow a_2 > a_4,$$

于是归纳基础得证.

假设命题对 $n=k\,(k\in\mathbf{N}^*)$ 成立，即 $a_{2k-1}<a_{2k+1}$，且 $a_{2k}>a_{2k+2}$，则有

$$f\left(a_{2k}\right)<f\left(a_{2k+2}\right)\Rightarrow a_{2k+1}<a_{2k+3},$$

进而

$$f\left(a_{2k+1}\right)>f\left(a_{2k+3}\right)\Rightarrow a_{2k+2}>a_{2k+4},$$

于是命题对 $n=k+1$ 也成立.

综上所述，命题成立，原命题得证.

例题 7.9 **(2012 年安徽高考)** 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=0$，$x_{n+1}=-x_n^2+x_n+c(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 证明：$\{x_n\}$ 是递减数列的充分必要条件是 $c<0$；

(2) 求 c 的取值范围，使 $\{x_n\}$ 是递增数列.

解 *(1)* 充分性的证明：$c<0$ 时，

$$\Delta x_n=x_{n+1}-x_n=-x_n^2+c<0,$$

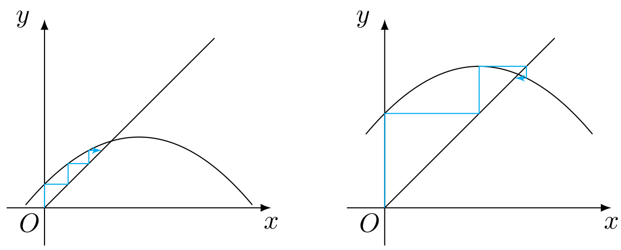
所以数列 $\{x_n\}$ 是递减数列；

必要性的证明：$x_1=0$，$x_2=c$，$\{x_n\}$ 递减时，一定有 $c<0$.

综上所述，原命题得证.

(2) 不难证明 $0<c<1$.

考虑到函数 $f(x)=-x^2+x+c$ 的对称轴为 $x=\dfrac{1}{2}$，不动点为 $\pm\sqrt{c}$，因此有两种情形：



情形一，$\sqrt{c}\leqslant\dfrac{1}{2}$. 此时函数图象如左图，容易证明 $x_n\in\left[-\sqrt{c},\sqrt{c}\,\right]$，于是 $f(x_n)>x_n$，即 $x_{n+1}>x_n$，即数列 $\{x_n\}$ 单调递增.

情形二，$\sqrt{c}>\dfrac{1}{2}$. 此时函数图象如右图，此时 $\{x_n\}$ 应为摆动数列，考虑用反证法.

只需要证明数列中存在某项 $x_k>\dfrac{1}{2}$ 即可. 这是因为，若 $x_k\in\left(\dfrac{1}{2},\sqrt{c}\right)$，则 $x_{k+1}>\sqrt{c}$，$x_{k+2}<\sqrt{c}$；若 $x_k>\sqrt{c}$，则 $x_{k+1}<\sqrt{c}$，均与数列 $\{x_n\}$ 单调递增矛盾.

也就是说只需要证明若 $\{x_n\}$ 单调递增，则 $\{x_n\}$ 的极限为 $\sqrt{c}$，就可以推出矛盾.

事实上，

$$\sqrt{c}-x_{n+1}<\left(\sqrt{c}-x_n\right)\left(1-\sqrt{c}-x_n\right)<\left(1-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{c}-x_n\right),$$

于是

$$\sqrt{c}-x_{n+1}<(1-\sqrt{c})^n\left(\sqrt{c}-x_1\right)=\sqrt{c}\,(1-\sqrt{c})^n,$$

因此 $\{x_n\}$ 的极限为 $\sqrt{c}$，从而必然存在某项 $x_k>\dfrac{1}{2}$.

综上所述，c 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{1}{4}\right]$.

7.3 裂项法

例题 7.10 **(2012 年华约)** 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\lg\left(1+\dfrac{2}{n^2+3n}\right)$，$n=1,2,\cdots$. S_n 是数列的前 n 项和，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=$________.

解 $a_n=\lg\left(\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)=\lg\dfrac{n+1}{n}-\lg\dfrac{n+3}{n+2}$，于是

$$S_n=\lg\frac{2}{1}+\lg\frac{3}{2}-\lg\frac{n+2}{n+1}-\lg\frac{n+3}{n+2},$$

从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lg 3$.

例题 7.11 求证：$\tan\alpha+2\tan 2\alpha+\cdots+2^n\tan 2^n\alpha=\cot\alpha-2^{n+1}\cot 2^{n+1}\alpha$.

解 利用 $2^n\tan 2^n\alpha=2^n\cot 2^n\alpha-2^{n+1}\cot 2^{n+1}\alpha$ 即得.

例题 7.12 **(2014 年北大夏令营)** 求证：$\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\sum\limits_{p=1}^{k-1}2\cos pt\right)=\left(\dfrac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$，其中 n 为不小于 2 的自然数，t 为实数且 $\sin\dfrac{t}{2}\neq 0$.

解 利用积化和差公式进行两次裂项求和即得，或直接用数学归纳法证明

例题 7.13 **(2006 年交大)** 已知 $a_k=\dfrac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 100 项和是________.

解 因为 $a_k=\dfrac{1}{(k+1)!}-\dfrac{1}{(k+2)!}$，所以所求和为 $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{102!}$.

例题 7.14 **(2010 年 AAA 测试)** 设 p,q 是一元二次方程 $x^2+2ax-1=0\,(a>0)$ 的两个根，其中 $p>0$. 令 $y_1=p-q$，$y_{n+1}=y_n^2-2$，$n=1,2,\cdots$. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_1y_2}+\cdots+\dfrac{1}{y_1y_2\cdots y_n}\right)=p$.

解 根据题意，$q=-\dfrac{1}{p}$ 且 $0<p<1$. 由 $y_n=p^{2^n}+\dfrac{1}{p^{2^n}}$，于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{y_1y_2\cdots y_n}&=\frac{1}{\left(p+\frac{1}{p}\right)\left(p^2+\frac{1}{p^2}\right)\cdots\left(p^{2^{n-1}}+\frac{1}{p^{2^{n-1}}}\right)}\\&=\frac{p^{2^n-1}}{(p^2+1)(p^4+1)\cdots(p^{2^n}+1)}\\&=\frac{1}{p}\cdot\left[\frac{1}{(p^2+1)(p^4+1)\cdots(p^{2^{n-1}}+1)}-\frac{1}{(p^2+1)(p^4+1)\cdots(p^{2^n}+1)}\right],\end{aligned}$$

从而

$$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_1y_2}+\cdots+\frac{1}{y_1y_2\cdots y_n}=\frac{1}{p}\left[1-\frac{1}{(p^2+1)(p^4+1)\cdots(p^{2^n}+1)}\right]=\frac{1}{p}\left(1-\frac{p^2-1}{p^{2^{n+1}}-1}\right),$$

从而原式的值为 p .

例题 7.15 **(2008 年江苏复赛)** 已知 $n\in\mathbb{N}^*$ ，求证： $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}<\dfrac{25}{36}$.

解 原不等式等价于 $\dfrac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k\left(k-\dfrac{1}{2}\right)}$ ，再利用

$$\frac{1}{k\left(k-\dfrac{1}{2}\right)}<\frac{1}{k-\dfrac{3}{4}}-\frac{1}{k+\dfrac{1}{4}}$$

并后移放缩起点即得，或利用积分放缩法得到 $\ln 2$ 的结果[1].

例题 7.16 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ ， $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ ，求证： $a_n\geqslant\sqrt{2n-1}$.

解 利用 $a_{n+1}^2-a_n^2=2+\dfrac{1}{a_n^2}$ 可得，并可以利用这个结果估计其上界 $a_n\leqslant 2n+\ln(2n-3)$.

例题 7.17 **(拉马努金恒等式)** 证明： $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}}=3$.

解 注意到 $n=\sqrt{1+(n-1)(n+1)}$ ，于是

$$\begin{aligned}3&=\sqrt{1+2\cdot4}\\&=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\cdot5}}\\&=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\cdot6}}}\\&=\cdots\end{aligned}$$

例题 7.18 设 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(n+1-k)}$ ，求证：当 $n\geqslant 2$ 时， $a_{n+1}<a_n$.

解 由于 $\dfrac{1}{k(n+1-k)}=\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{n+1-k}\right)$ ，于是 $a_n=\dfrac{2}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$. 于是 $n\geqslant 2$ 时，有

$$a_n-a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n+2}\right)-\frac{2}{(n+1)(n+2)}>0.$$

7.4 递推、通项与前 n 项和

例题 7.19 **(2015 年交大)** 现要登上 10 级台阶，每次可以登 1 级或 2 级台阶，则不同的登法共有________种.

[1]可以利用 $\ln\dfrac{1+x}{1-x}=2\left(x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{5}x^5+\cdots\right)$ 证明 $\ln 2<\dfrac{25}{36}$

解　89．$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，$a_1=1$，$a_2=2$．

例题 **7.20** 某校举行百年校庆的庆典活动，在某项仪式中，要求在操场事先画好的 $2\times n$ 的带型网格中插上小红旗，并且每个 1×1 的方格最多插 1 面旗，任何 2×2 的“田”字格中不能插满旗．以 a_n 来表示满足条件的不同的插红旗的方法数，例如，a 表示在 2×1 的网格中插红旗所有满足要求的方法数，易知 $a_1=4$．

(1) 求 a_2，a_3；

(2) 求证：$a_n\,(\,n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbb{N}\,)$ 是 3 的倍数；

(3) 当 $n=2015$ 时，若 $a_{2015}=3^k\cdot m\,(\,k,m\in\mathbb{N}^*\,)$，求 k 的最大值．

解　*(1)* $a_1=4$，$a_2=15$，$a_3=57$．

(2) 将 a_n 种满足条件的不同的插红旗的方法分为两类：

第一类，以两面红旗结尾的，记为 b_n 种；

第二类，不以两面红旗结尾的，记为 c_n 种．

例如当 $n=1$ 时，$a_1=4$，$b_1=1$，$c_1=3$．

这样，容易得到数列 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 的递推关系：

$$\begin{cases}b_{n+1}=c_n,\\ c_{n+1}=3(b_n+c_n),\end{cases}$$

这样，我们就得到了当 $n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbb{N}^*$ 时，有递推关系

$$a_{n+1}=b_{n+1}+c_{n+1}=3b_n+4c_n=3a_n+c_n=3a_n+3a_{n-1},$$

因此 $a_n\,(n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbb{N}\,)$ 是 3 的倍数．

(3) 考虑使用三进制解决问题：

记题中 a_n 对应的 $k=[a_n]$，给出引理：

引理对于 $[\quad]$ 运算，若 $[m]>[n]$，其中 $m,n\in\mathbb{N}^*$，那么

$$[m+n]=[n].$$

接下来归纳证明：当 $n=2k-1$ 时，$[a_n]=k-1$；当 $n=2k$ 时，$[a_n]\geqslant k$，其中 $k\in\mathbb{N}^*$．

当 $k=1$ 时，$[a_1]=[4]=0$，$[a_2]=[15]=1$，命题成立；

假设命题对 k 成立，则

$$[a_{2k-1}]=k-1,[a_{2k}]\geqslant k,$$

欲证明

$$[a_{2k+1}]=k,[a_{2k+2}]\geqslant k+1.$$

事实上，由递推关系，有

$$[a_{2k+1}]=[3a_{2k}+3a_{2k-1}]=[a_{2k}+a_{2k-1}]+1=[a_{2k-1}]+1=k,$$

其中用到了引理.

同时

$$[a_{2k+2}]=[3a_{2k+1}+3a_{2k}]=[a_{2k+1}+a_{2k}]+1\geqslant k+1.$$

因此命题对任意正整数 k 均成立，于是 $[a_{2015}]=1007$.

例题 7.21 已知实数 a,b,x,y 满足：$ax+by=3$ ，$ax^2+by^2=7$ ，$ax^3+by^3=16$ ，$ax^4+by^4=42$ ，求 ax^5+by^5 的值.

解 令 x,y 为方程 $t^2=\alpha t+\beta$ 的两根，则

$$\begin{aligned}&x^2=\alpha x+\beta, ax^3=\alpha\cdot ax^2+\beta\cdot ax, ax^4=\alpha\cdot ax^3+\beta\cdot ax^2,\\&y^2=\alpha y+\beta, by^3=\alpha\cdot by^2+\beta\cdot by, by^4=\alpha\cdot by^3+\beta\cdot by^2.\end{aligned}$$

因此 $ax^3+by^3=\alpha\cdot\left(ax^2+by^2\right)+\beta\cdot(ax+by)$ ，$ax^4+by^4=\alpha\cdot\left(ax^3+by^3\right)+\beta\cdot\left(ax^2+by^2\right)$ ，即

$$16=7\alpha+3\beta, 42=16\alpha+7\beta$$

的条件下求 $42\alpha+16\beta$ 的值. 解得 $\alpha=-14$ ，$\beta=38$ ，于是 $42\alpha+16\beta=20$.

例题 7.22 **(2009 年浙大)** 数列 $\{a_n\}$ 满足条件：$a_1=1$ ，$a_n=1+\dfrac{1}{a_{n-1}}\,(n\geqslant 2)$. 试证明：

(1) $1\leqslant a_n\leqslant 2$ ，$n\in\mathbb{N}^*$ ；

(2) $\dfrac{1}{3}\leqslant\dfrac{|a_{n+1}-a_n|}{|a_n-a_{n-1}|}\leqslant\dfrac{1}{2}$ ，$n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbb{N}^*$.

解 *(1)* 略；

(2) $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}=\dfrac{a_{n-1}-a_n}{a_na_{n-1}}$ ，于是 $\left|\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}\right|=\left|\dfrac{1}{a_na_{n-1}}\right|$

原命题即

$$2\leqslant a_na_{n+1}\leqslant 3, n=1,2,3,\cdots,$$

事实上 $a_{n+1}=1+\dfrac{1}{a_n}$ ，因此 $a_na_{n+1}=a_n+1\in[2,3]$.

例题 7.23 **(2010 年武大)** 设 $\{A_n(a_n,b_n)\}$ 为平面上的点列，其中数列 $\{a_n\}$ ，$\{b_n\}$ 满足：

$$a_{n+1}=2+\frac{3a_n}{a_n^2+b_n^2}, b_{n+1}=-\frac{3b_n}{a_n^2+b_n^2}.$$

已知 A_1 的坐标为 $(1,2)$.

(1) 确定点 A_1,A_2,A_3 所在圆 C 的方程；

(2) 证明：点列 $\{A_n(a_n,b_n)\}$ 在定圆 C 上；

(3) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解　(1) $A_1\left(1,2\right)$，$A_2\left(\dfrac{13}{5},-\dfrac{6}{5}\right)$，$A_3\left(\dfrac{121}{41},\dfrac{18}{41}\right)$．于是线段 A_1A_2 和线段 A_1A_3 的垂直平分线为

$$x-2y-1=0,5x-4y-5=0,$$

交点为 $(1,0)$，因此圆的方程为

$$(x-1)^2+y^2=4.$$

(2) 用数学归纳法．归纳基础显然．

若点 A_n 在圆 C 上，$(a_n-1)^2+b_n^2=4$，即 $a_n^2+b_n^2=2a_n+3$ 则

$$\begin{aligned}(a_{n+1}-1)^2+b_{n+1}^2&=\left(1+\frac{3a_n}{a_n^2+b_n^2}\right)^2+\left(-\frac{3b_n}{a_n^2+b_n^2}\right)^2\\&=\frac{25a_n^2+30a_n+9b_n^2+9}{(2a_n+3)^2}\\&=\frac{4\left(4a_n^2+12a_n+9\right)}{(2a_n+3)^2}\\&=4,\end{aligned}$$

所以命题成立．

(3) 由 $a_n^2+b_n^2=2a_n+3$，有

$$a_{n+1}=2+\frac{3a_n}{2a_n+3}=\frac{7a_n+6}{2a_n+3},$$

用不动点法，设辅助数列 $b_n=\dfrac{a_n-3}{a_n+1}$，于是 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{1}{9}$．于是 $a_n=\dfrac{3\cdot 9^{n-1}-1}{9^{n-1}+1}$．

例题 7.24 (2011 年天津预赛) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+\sqrt{3a_n^2+1}$，$n\in\mathbb{N}^*$．

(1) 求证：当 $n\geqslant 2$ 时，$a_{n+1}+a_{n-1}=4a_n$；

(2) 求证：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$．

解　(1) 递推公式即 $a_n^2-4a_na_{n-1}+a_{n-1}^2=1$，于是 a_{n+1},a_{n+1} 是方程

$$x^2-4xa_n+a_n^2-1=0$$

的两根，应用韦达定理即得．

(2) $a_n=\dfrac{\alpha^{-n}-\alpha^n}{2\sqrt{3}}$，其中 $\alpha=2-\sqrt{3}$．可以推得 $\dfrac{a_{k+1}^{-1}}{a_k^{-1}}<\alpha$．

记不等式左边为 S_n，则

$$S_n<\frac{1}{a_1}+\alpha\left(S_n-\frac{1}{a_n}\right),$$

整理即得．

7.5 习题

习题 7.1 (2013 年北约) S_n 表示数列 $\{a_n\}(n \geqslant 1)$ 的前 n 项和．已知 $a_1 = 1$，且 $\forall n \geqslant 1$，$S_{n+1} = 4a_n + 2$，则 a_{2013} 等于________．

习题 7.2 (2009 年交大) 已知 $a_k = \dfrac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 99 项和是________．

习题 7.3 已知 $a_k = \dfrac{1}{(\sqrt{k-1}+\sqrt{k})(\sqrt{k-1}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})}$，数列 $\{a_n\}$ 的前 2015 项和是________．

习题 7.4 (2009 年北大) 已知一无穷等差数列中有 3 项：$13, 25, 41$，求证：2009 为数列中的一项．

习题 7.5 等差数列 $\{a_n\}$ 中，若存在正整数 k 和 $l\,(k \neq l)$，使得前 k 项和 $S_k = \dfrac{k}{l}$，前 l 项和 $S_l = \dfrac{l}{k}$，试比较 S_{k+l} 与 4 的大小．

习题 7.6 (2013 年北大保送) 在一个 2013×2013 的正数数表中，每行都成等差数列，每列平方后都成等差数列，求证：左上角的数和右下角的数之积等于左下角的数和右上角的数之积．

习题 7.7 (2003 年复旦改) 求和：$\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2}{1+x^2} + \dfrac{4}{1+x^4} + \cdots + \dfrac{2^n}{1+x^{2n}}$．

习题 7.8 (2015 年北大夏令营) 已知 $n \in \mathbb{N}^*$，求证：$\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{5}{3}$．

习题 7.9 求证：$\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k\sqrt{k}} < 3$．

习题 7.10 (2011 年甘肃预赛) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \dfrac{1}{4}$，$a_{n+1} = a_n^2 + a_n$，求证：$\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k+1} < 4$．

习题 7.11 (2012 年江苏高考) 已知各项均为正数的两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足：$a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$．

(1) 设 $b_{n+1} = 1 + \dfrac{b_n}{a_n}$，求证：$\left\{\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)^2\right\}$ 是等差数列；

(2) 设 $b_{n+1} = \sqrt{2} \cdot \dfrac{b_n}{a_n}$，且 $\{a_n\}$ 为等比数列，求 a_1 和 b_1．

习题 7.12 已知 $x+y+z=1$，$x^2+y^2+z^2=2$，$x^3+y^3+z^3=3$，求 $x^5+y^5+z^5$ 的值．

习题 7.13 设 $0 < a < 1$，定义 $a_1 = 1 + a$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n} + a$，求证：$a_n > 1$．

习题 7.14 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n^2}$，求证：$a_{2015} > 18$．

习题 7.15 (2013 年卓越联盟) 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1 = 3$，$a_{n+1} = a_n^2 - na_n + \alpha$，$n \in \mathbb{N}^*$，$\alpha \in \mathbb{R}$．

(1) 若 $a_n \geqslant 2n$ 对 $n \in \mathbb{N}^*$ 都成立，求 α 的取值范围；

(2) 当 $\alpha = -2$ 时，证明 $\dfrac{1}{a_1-2} + \dfrac{1}{a_2-2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n-2} < 2\,(n \in \mathbb{N}^*)$．

习题 **7.16** 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，对任意的正整数 n，都有 $a_n=5S_n+1$ 成立，记 $b_n=\dfrac{4+a_n}{1-a_n}\,(n\in\mathbb{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 记 $c_n=b_{2n}-b_{2n-1}\,(n\in\mathbb{N}^*)$，设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求证：对任意正整数 n 都有 $T_n<\dfrac{3}{2}$；

(3) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 R_n. 已知正实数 λ 满足：对任意正整数 n，$R_n\leqslant\lambda n$ 恒成立，求 λ 的最小值.

习题 **7.17** (2013 年卓越联盟) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=3$，$S_n=a_{n+1}+2n-3$，$n\in\mathbb{N}^*$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n=2^n+(-1)^n\lambda a_n$. 若对所有的 $n\in\mathbb{N}^*$，都有 $b_{n+1}>b_n$，求实数 λ 的取值范围.

习题 **7.18** (2015 年广东高考) 数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1+2a_2+\cdots+na_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}},n\in\mathbb{N}^*$.

(1) 求 a_3 的值；

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 T_n；

(3) 令 $b_1=a_1$，$b_n=\dfrac{T_{n-1}}{n}+\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)a_n\,(n\geqslant 2)$，证明：数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n<2+2\ln n$.

习题 **7.19** (2013 年华约) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n+ca_n^2$，$n=1,2,\cdots$，其中 $a_1>0$，$c>0$.

(1) 证明：对任意 $M>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$a_n>M$；

(2) 记 $b_n=\dfrac{1}{ca_n+1}$，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$. 证明：$\{S_n\}$ 有界，且对任意 $d>0$，存在正整数 K，当 $n>K$ 时，$0<\left|S_n-\dfrac{1}{ca_1}\right|<d$.

习题 **7.20** 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a+2\,(a\geqslant 2)$，$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{a_n+a}{2}}\,(n\in\mathbb{N}^*)$.

(1) 若 $a=0$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n=|a_{n+1}-a_n|$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求证：$S_n<a_1$.

习题 **7.21** (2010 年高考全国 I 卷) 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=c-\dfrac{1}{a_n}$.

(1) 设 $c=\dfrac{5}{2}$，$b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 求使不等式 $a_n<a_{n+1}<3$ 恒成立的 c 的取值范围.

习题 **7.22** (2014 年河北预赛) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1$，$a_n=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{2}$.

(1) 求证：$a_n\geqslant\dfrac{2}{3}$；

(2) 求证：$|a_{2n}-a_n|<\dfrac{10}{27}$.

习题 **7.23** 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}a_n\right)\,(n\in\mathbb{N}^*)$，$S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，求证：$S_n>n-\dfrac{3}{2}$.

7.6 习题参考答案及提示

习题 7.1 $3019\cdot 2^{2012}$． 提示：用特征根法或累加法均可．

习题 7.2 $\dfrac{9}{10}$． 提示：$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$．

习题 7.3 $\dfrac{1+\sqrt{2015}-\sqrt{2016}}{2}$． 提示：$a_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n-1}-\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)$．

习题 7.4 不妨设等差数列的公差为 d，于是存在正整数 m,n 使得

$$md=25-13=12,nd=41-25=16,$$

则 $(n-m)\,d=4$，而

$$2009=41+1968=41+492\cdot(n-m)\,d,$$

于是 2009 为数列中的一项．

习题 7.5 $S_{k+l}>4$． 提示：由于 $\{a_n\}$ 为等差数列，于是可设 $S_n=\alpha n^2+\beta n$，于是根据已知，有

$$\begin{cases}\alpha kl+\beta l=1,\\ \alpha kl+\beta k=1,\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}\alpha kl=1,\\ \beta=0,\end{cases}$$

于是

$$S_{k+l}-4=\alpha(k+l)^2-4>\alpha\cdot 4kl-4=0,$$

因此原不等式得证．

习题 7.6 数表为

$$\begin{array}{ccccc}
a & \cdots & \dfrac{a+b}{2} & \cdots & b\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{2}} & \cdots & \sqrt{\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2+\left(\dfrac{c+d}{2}\right)^2\right]} & \cdots & \sqrt{\dfrac{b^2+d^2}{2}}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
c & \cdots & \dfrac{c+d}{2} & \cdots & d
\end{array}$$

因此

$$2\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{c+d}{2}\right)^2\right]}=\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+d^2}{2}},$$

整理即得 $ad=bc$，因此原命题得证[1]．

习题 7.7 $\dfrac{2^{n+1}}{1-x^{2n+1}}-\dfrac{1}{1-x}$． 提示：加减一个 $\dfrac{1}{1-x}$ 即得．

[1]这个性质对任何 $p\times p$ 的数表均成立，其中 p 为奇数

习题 **7.8** 略． 提示：裂项放缩．

习题 **7.9** 略． 提示：当 $k \geqslant 2$ 时，$\dfrac{1}{k\sqrt{k}} < 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{k-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$．

习题 **7.10** 略． 提示：递推公式可以变形为 $\dfrac{1}{a_n+1} = \dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n+1}}$．

习题 **7.11** *(1)* 略；*(2)* $a_1 = b_1 = \sqrt{2}$． 提示：注意利用有界性证明 $\{a_n\}$ 为常数列．

习题 **7.12** 6． 提示：令 $A_n = x^n + y^n + z^n$，则

$$A_n = \alpha \cdot A_{n-1} + \beta \cdot A_{n-2} + \gamma \cdot A_{n-3},$$

其中 $\alpha = x+y+z = 1$，$\beta = -(xy+yz+zx) = \dfrac{1}{2}$，$\gamma = xyz = \dfrac{1}{6}$．

习题 **7.13** 略． 提示：加强命题为 $1 < a_n < 1+a$．

习题 **7.14** 略． 提示：两边立方可得

$$a_{n+1}^3 = a_n^3 + 3 + \frac{3}{a_n} + \frac{1}{a_n^6},$$

于是 $a_{n+1}^3 - a_n^3 > 3$，累加即得 $a_n > \sqrt[3]{3n-2}$ $(n = 2, 3, \cdots)$．

习题 **7.15** *(1)* 略；*(2)* 将命题加强至 $\dfrac{1}{a_1-2} + \dfrac{1}{a_2-2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n-2} \leqslant 2\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}}$．

习题 **7.16** *(1)* $a_n = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n$，$b_n = 4 + \dfrac{5}{(-4)^n - 1}$；*(2)* $c_n = \dfrac{25}{4^{2n} + 3 - \dfrac{1}{4^{2n-1}}} < \dfrac{25}{4^{2n}}$．*(3)* 4．

习题 **7.17** *(1)* $a_n = 2^{n-1} + 2$；*(2)* $\left(-\dfrac{2}{7}, \dfrac{2}{5}\right)$．

习题 **7.18** *(1)* $\dfrac{1}{4}$；*(2)* $2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$；*(3)* 略． 提示：$b_k = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{k}\right) \cdot (T_k - T_{k-1}) + \dfrac{T_{k-1}}{k}$．

习题 **7.19** *(1)* 略；*(2)* 略． 提示：$b_n = \dfrac{1}{ca_n} - \dfrac{1}{ca_{n+1}}$．

习题 **7.20** *(1)* $a = 0$ 时，$a_1 = 2$，$a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{a_n}{2}}$，于是 $2a_{n+1} = (2a_n)^{\frac{1}{2}}$，因此 $a_n = 2^{\frac{1}{2^{n-2}} - 1}$．
(2) 令 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+a}{2}}$．其不动点方程[1]为

$$x = \sqrt{\frac{x+a}{2}} \text{ 即 } 2x^2 - x - a = 0,$$

容易判断出初值在不动点右侧，因此数列 $\{a_n\}$ 递减．因此

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} |a_{i+1} - a_i| = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1}) = a_1 - a_{n+1} < a_1.$$

[1] 也可以直接差分比较

习题 7.21 *(1)* $b_n=-\dfrac{1}{3}\cdot 4^{n-1}-\dfrac{2}{3}$；*(2)* $2<c\leqslant\dfrac{10}{3}$． 提示：注意利用迭代函数法．

习题 7.22 *(1)* 略；*(2)* 略． 提示：可以利用迭代函数法证明一个更强的结论：$\dfrac{2}{3}\leqslant a_n\leqslant 1$．

习题 7.23 根据已知，有

$$1-a_{n+1}=1-\sin\left(\frac{\pi}{2}a_n\right),$$

令 $b_n=1-a_n$，且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，则只需要证明 $T_n<\dfrac{5}{2}$．此时已知条件变为

$$b_{n+1}=1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}b_n\right)=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}b_n\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}b_n\right)<\frac{\pi^2}{8}\cdot b_n^2<\frac{\pi^2}{16}\cdot b_n,$$

因此

$$T_n<\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{\pi^2}{16}}=\frac{8}{16-\pi^2}<1.305<\frac{3}{2},$$

原命题得证．

第八章　不等式

1. 均值不等式 (A-G Inequality)

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个正实数，记它们的平方平均数、算术平均数、几何平均数、调和平均数

$$\left(\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}, \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, \left(a_1a_2\cdots a_n\right)^{\frac{1}{n}}, \frac{1}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$$

分别为 Q_n, A_n, G_n, H_n，则 $Q_n \geqslant A_n \geqslant G_n \geqslant H_n$，其中等号成立的条件是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

2. 柯西不等式 (Cauchy Inequality)

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$；$b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是 $2n$ 个实数，则有

$$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right) \geqslant \left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2,$$

也可简写为

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n}\left(a_ib_i\right)^2,$$

其中等号成立的条件是 $a_i=\lambda b_i\,(i=1,2,\cdots,n)$，$\lambda$ 是一个常数.

3. 柯西不等式的几个推论

- 当 $b_1=b_2=\cdots=b_n=1$ 时，柯西不等式即为

$$n\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right) \geqslant \left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)^2.$$

若 $a_i \in \mathbb{R}^+\,(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

此即上面提到的平方平均数不小于算术平均数.

- 当 $b_i=\dfrac{1}{a_i}\,(i=1,2,\cdots,n)$ 时，有

$$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}\right) \geqslant n^2.$$

- （合并根式）若 $a_i,b_i\in\mathbb{R}^+\,(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$a_1\cdot\sqrt{b_1}+a_2\cdot\sqrt{b_2}+\cdots+a_n\cdot\sqrt{b_n}\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1+b_2+\cdots+b_n}.$$

- （合并分式[1]）若 $a_i,b_i\in\mathbb{R}^+\,(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots\frac{a_n^2}{b_n}\geqslant\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}.$$

4. 简单舒尔不等式 (Schur Inequality)

   由于

$$\sum_{cyc}a\,(a-b)\,(a-c)=\sum_{cyc}\left(a^3+abc-a^2b-ca^2\right)\geqslant 0,$$

   于是 $a^3+b^3+c^3+3abc\geqslant a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2$.

5. 舒尔不等式的两个重要变形

   $(a+b+c)^3+9abc\geqslant 4\,(a+b+c)\,(ab+bc+ca)$,

   $abc\geqslant(a+b-c)\,(b+c-a)\,(c+a-b)$.

6. 伯努利不等式 (Bernoulli Inequality)

   若 $x_i\geqslant -1$ ，且所有的 x_i 均同号，其中 $i=1,2,\cdots,n$ ，那么

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

8.1 均值不等式

例题 8.1 **(2010 年北大夏令营)** 求证：$(\tan x)^{\sin x}+(\cot x)^{\cos x}\geqslant 2$ ，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

解 直接应用均值不等式即得.

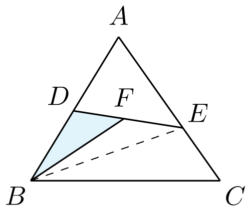
例题 8.2 **(2011 年华约)** 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 2 ，D,E 分别为边 AB、边 AC 上的点，F 为线段 DE 上一点，设 $\dfrac{AD}{AB}=x$ ，$\dfrac{AE}{AC}=y$ ，$\dfrac{DF}{DE}=z$ 且 $y+z-x=1$ ，则 $\triangle BDF$ 面积的最大值为________.

解 连接 BE ，$\triangle BDF$ 的面积为 $2(1-x)yz\leqslant 2\left(\dfrac{1-x+y+z}{3}\right)^3=\dfrac{16}{27}$.

---

[1] 可以推广为权方和不等式：若 $a_i,b_i\in\mathbb{R}^+\,(i=1,2,\cdots,n)$ ，$r>0$ ，则

$$\frac{a_1^{r+1}}{b_1^2}+\frac{a_2^{r+1}}{b_2^r}+\cdots\frac{a_n^{r+1}}{b_n^r}\geqslant\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^{r+1}}{(b_1+b_2+\cdots+b_n)^r}.$$



例题 8.3 证明：数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调递增[1].

解 转化为 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\cdot 1$ 应用均值不等式.

例题 8.4 **(2014 年北约)** 已知 $x_1x_2\cdots x_n=1$，其中 $x_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，求证：

$$\left(\sqrt{2}+x_1\right)\left(\sqrt{2}+x_2\right)\cdots\left(\sqrt{2}+x_n\right)\geqslant\left(\sqrt{2}+1\right)^n.$$

解 展开后对应项分别应用均值不等式即得，也可以用数学归纳法证明.

例题 8.5 设正实数 a,b,c 满足 $abc=1$，求证：对于整数 $k\geqslant 2$，有 $\dfrac{a^k}{a+b}+\dfrac{b^k}{b+c}+\dfrac{c^k}{c+a}\geqslant 32$.

解 利用 $\dfrac{a^k}{a+b}+\dfrac{1}{4}(a+b)+\underbrace{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2}}_{k-2\text{ 个}}\geqslant k\cdot\sqrt[k]{\dfrac{a^k}{2^k}}=\dfrac{k}{2}a$.

8.2 柯西不等式

例题 8.6 **(2015 年清华领军)** 已知非负实数 x,y,z 满足 $4x^2+4y^2+z^2+2z=3$，求 $5x+4y+3z$ 的最大值.

解 由已知 $4x^2+4y^2+(z+1)^2=4$，应用柯西不等式即得最大值为 $\sqrt{77}-3$.

例题 8.7 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1^2+a_{100}^2\leqslant 10$，求 $S=a_{100}+a_{101}+\cdots+a_{199}$ 的最大值.

解 最大值为 500.

$$S=50\left(a_{100}+a_{199}\right)=50\left(3a_{100}-a_1\right)\leqslant 50\cdot\left(\sqrt{3+(-1)^2}\cdot\sqrt{a_{100}^2+a_1^2}\right)=500,$$

当且仅当 $\dfrac{a_{100}}{3}=\dfrac{a_1}{-1}$ 时取得等号.
一个典型的变式为：$a_1^2+a_{n+1}^2\leqslant M$，求 S_n 的最大值.
由于

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{(n-1)a_{n+1}+(n+1)a_1}{2}\leqslant\frac{\sqrt{(n-1)^2+(n+1)^2}\cdot\sqrt{a_{n+1}^2+a_1^2}}{2}=\sqrt{\frac{M(n^2+1)}{2}},$$

于是 S_n 的最大值为 $\sqrt{\dfrac{M(n^2+1)}{2}}$.

[1](2015 年交大) 证明：数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 单调递减

例题 8.8 已知 $\dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant 5$，求证：$2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{19}$.

解 左边等于 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{x+14}\leqslant 2\sqrt{19}$.

例题 8.9 已知 $a,b>0$，且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{2}{3}$，求 $\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{4}{b-1}$ 的最小值.

解 引入参数
$$\frac{1}{a-1}+\frac{\lambda^2}{1}\geqslant\frac{(1+\lambda)^2}{a},$$
其中 $\lambda>0$. 类似的，有
$$\frac{4}{b-1}+\frac{(\lambda-1)^2}{1}\geqslant\frac{(1+\lambda)^2}{b},$$
其中 $\lambda>1$，两式相加可得
$$\frac{1}{a-1}+\frac{4}{b-1}\geqslant\frac{7}{4}-\frac{4}{3}\left(\lambda-\frac{5}{4}\right)^2.$$
接下来通过取等条件确定参数 λ 的值，即
$$\frac{1}{a-1}=\lambda,\frac{2}{b-1}=\lambda-1,\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{3},$$
解得
$$\lambda=\frac{5}{4},a=\frac{9}{5},b=9,$$
于是所求的最小值为
$$\frac{7}{4}-\frac{4}{3}\left(\lambda-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{7}{4}.$$

例题 8.10 已知正实数 a,b,c,d 满足 $a+b+c+d=4$，求证：$\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{d}+\dfrac{d^2}{a}\geqslant 4+(a-b)^2$.

解 不妨设 a 是最大数，b 是最小数. 注意到
$$\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{b}=\sum_{cyc}\frac{a^2}{b}-\sum_{cyc}a=\sum_{cyc}\frac{a^2}{b}-4,$$
于是
$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{b}\geqslant 4+\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{b}\geqslant 4+\frac{\left(\sum\limits_{cyc}|a-b|\right)^2}{\sum\limits_{cyc}b}\geqslant 4+(a-b)^2.$$

例题 8.11 **(2010 年南大)** 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1,a_2>0$，$a_{n+2}=\dfrac{2}{a_{n+1}+a_n}$. 记
$$M_n=\max\left\{a_n,\frac{1}{a_n},a_{n+1},\frac{1}{a_{n+1}}\right\},$$
求证：$M_{n+3}\leqslant\dfrac{3}{4}M_n+\dfrac{1}{4}$.

解 只需要证明 $a_{n+3},\dfrac{1}{a_{n+3}},a_{n+4},\dfrac{1}{a_{n+4}}$ 均不大于 $\dfrac{3}{4}M_n+\dfrac{1}{4}$. 由柯西不等式

$$\frac{1}{a+b}\leqslant\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{a}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{b},$$

于是

$$a_{n+3}=\frac{2}{a_{n+1}+a_{n+2}}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_{n+2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{4}\cdot a_n+\frac{1}{4}\cdot a_{n+1},$$

类似的，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_{n+3}}&=\frac{a_{n+1}+a_{n+2}}{2}=\frac{1}{4}a_{n+1}+\frac{1}{a_n+a_{n+1}}\leqslant\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{a_{n+1}},\\
a_{n+4}&=\frac{2}{a_{n+2}+a_{n+3}}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_{n+2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_{n+3}}=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{1}{4}a_{n+2}\\
&=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_n+a_{n+1}}\leqslant\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{a_{n+1}},\\
\frac{1}{a_{n+4}}&=\frac{a_{n+2}+a_{n+3}}{2}=\frac{1}{a_n+a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+1}+a_{n+2}}\leqslant\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{a_{n+2}}\\
&=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{8}a_n+\frac{1}{8}a_{n+1},
\end{aligned}$$

另一方面，a_n 和 $\dfrac{1}{a_n},a_{n+1}$ 和 $\dfrac{1}{a_{n+1}}$ 之中必然有一个数不大于 1 .

综上所述，$M_{n+3}\leqslant\dfrac{3}{4}M_n+\dfrac{1}{4}$.

例题 8.12 已知 $x\geqslant y\geqslant z>0$，求证：$\dfrac{x^2y}{z}+\dfrac{y^2z}{x}+\dfrac{z^2x}{y}\geqslant x^2+y^2+z^2$.

解 记原式左边为 M，设 $N=\dfrac{x^2z}{y}+\dfrac{y^2x}{z}+\dfrac{z^2y}{x}$，则由柯西不等式，有

$$M\cdot N\geqslant\left(x^2+y^2+z^2\right)^2,$$

而

$$M-N=\frac{1}{xyz}(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)\geqslant 0.$$

8.3 伯努利不等式

例题 8.13 **(2014 年华约)** 求证：当 $x\leqslant n$ 时，$n-n\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n\mathrm{e}^x\leqslant x^2$.

解 由于 $\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)<\dfrac{x}{n}$，于是 $\mathrm{e}^x>\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$，从而

$$\begin{aligned}n-n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\mathrm{e}^x&\leqslant n-n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\\&=n-n\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\\&\leqslant n-n\left(1-\frac{x^2}{n^2}\cdot n\right)\\&=x^2.\end{aligned}$$

其中倒数第二步用到了伯努利不等式.

例题 8.14 求证：$\cos\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{1}{4}\cdots\cos\dfrac{1}{n}>\dfrac{2}{3}$.

解 可以利用 $\cos x=\sqrt{1-\sin^2x}>\sqrt{1-x^2}$ 进行放缩，也可以利用 $\cos x>1-\dfrac{1}{2}x^2$，然后利用伯努利不等式放缩.

例题 8.15 已知 $x,y\in(0,1)$，求证：$x^y+y^x<1$.

解 法一

考虑到 $(x^x)'=x^x(1+\ln x)$，于是 x^x 的取值范围是 $\left(\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}}},1\right)$，记为 $(m,1)$. 不妨设 $0<y\leqslant x<1$，则 $t=\dfrac{y}{x}\in(0,1]$，此时

$$LHS=x^{x\frac{y}{x}}+\left(\frac{y}{x}\cdot x\right)^x=x^{xt}+t^x\cdot x^x>x^{xt}+t\cdot x^x,$$

记 $x^x=a$，函数 $f(t)=a^t+at$，其导函数 $f'(t)=a^t\cdot\ln a+a$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，于是 $f'(t)>f"(0)=\ln a+a>\ln m+m>0$，因此 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，有 $f(t)>f(0)=1$，原不等式得证.

法二

由于 $\dfrac{y}{x}>0$，$\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}>1$，于是由伯努利不等式

$$x^y=\frac{1}{\left[1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\right]^y}>\frac{1}{1+y\left(\frac{1}{x}-1\right)}=\frac{x}{x+y-xy}>\frac{x}{x+y},$$

同理，有 $y^x>\dfrac{y}{x+y}$，因此原不等式得证. 事实上，原不等式可以加强为 $x^y+y^2>\dfrac{x+y}{x+y-xy}>1+xy$.

8.4 切线法

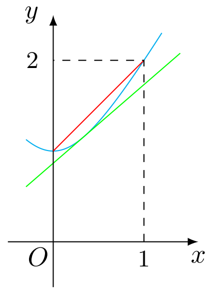
例题 8.16 **(2012 年联赛)** 满足 $\dfrac{1}{4}<\sin\dfrac{\pi}{n}<\dfrac{1}{3}$ 的所有正整数 n 的和是________.

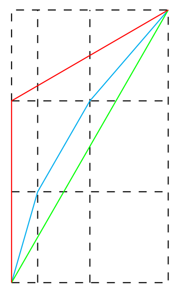
解 33. 利用 $\dfrac{3}{\pi}x<\sin x<x$ 可得 n 的可能值为 $10,11,12$.

例题 8.17 **(WMTC2 青年组)** 已知 $a,b,c>0$，$a+b+c=1$，求证：

$$2\sqrt{3}\leqslant\sqrt{3a^2+1}+\sqrt{3b^2+1}+\sqrt{3c^2+1}<4.$$

解 构造函数不等式 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\leqslant\sqrt{3x^2+1}\leqslant x+1$ 或利用勾股定理构造图形均可.





例题 8.18 **(2008 年南开)** 设 $a,b,c>0$，且 $a+b+c=1$，求 $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2+\left(c+\dfrac{1}{c}\right)^2$ 的最小值.

解 **法一**

考虑到取等条件，有

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2&=6+\sum_{cyc}\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\\&=6+\sum_{cyc}\left(a^2+\frac{1}{81a^2}+\frac{1}{81a^2}+\cdots+\frac{1}{81a^2}\right)\\&\geqslant 6+246\cdot\left[\frac{1}{81^{27}\cdot(abc)^{16}}\right]^{\frac{1}{30}}\\&\geqslant 6+246\cdot\left[\frac{1}{3^{108}\cdot 3^{-48}}\right]^{\frac{1}{30}}\\&=\frac{100}{3},\end{aligned}$$

当且仅当 $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ 时取得等号.

法二

由柯西不等式得

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2&\geqslant\frac{\left(a+b+c+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2}{3}\\&=\frac{\left(1+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2}{3}\\&\geqslant\frac{\left(1+\dfrac{9}{a+b+c}\right)^2}{3}\\&=\frac{100}{3},\end{aligned}$$

当且仅当 $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ 时取得等号.

法三

利用切线法构造辅助不等式 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2\geqslant\dfrac{100}{9}-\dfrac{160}{3}\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$ 即得.

例题 8.19 **(2015 年天津高考)** 已知函数 $f(x)=nx-x^n$，$x\in\mathbb{R}$，其中 $n\in\mathbb{N}^*$，且 $n\geqslant 2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

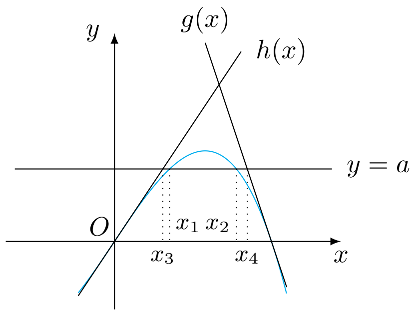
(2) 设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P，曲线在点 P 处的切线方程为 $y=g(x)$，求证：对于任意的正实数 x，都有 $f(x)\leqslant g(x)$；

(3) 若关于 x 的方程 $f(x)=a$ (a 为实数) 有两个正实数根 x_1,x_2，求证：$|x_1-x_2|<\dfrac{a}{1-n}+2$.

解 *(1)* 当 n 为奇数时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减；当 n 为偶数时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

(2) 略;

(3) 取 $y=f(x)$ 在原点和 *(2)* 中的切线进行放缩即得.



例题 8.20 若正数 a,b,c 满足 $a+b+c=1$，求证：$\dfrac{a}{a^2+1}+\dfrac{b}{b^2+1}+\dfrac{c}{c^2+1}\leqslant\dfrac{9}{10}$.

解 法一

利用切线法构造辅助不等式

$$\frac{x}{x^2+1}\leqslant\frac{3}{10}+\frac{18}{25}\left(x-\frac{1}{3}\right)$$

即得.

法二

由于

$$\frac{a}{a^2+1}=\frac{a}{a^2+\dfrac{1}{9}+\dfrac{8}{9}}\leqslant\frac{a}{\dfrac{2}{3}a+\dfrac{8}{9}}=\frac{3}{2}-\frac{6}{3a+4},$$

于是原不等式即

$$\sum_{cyc}\frac{1}{3a+4}\geqslant\frac{3}{5},$$

而根据柯西不等式

$$\sum_{cyc}\frac{1}{3a+4}\geqslant\frac{9}{\sum\limits_{cyc}(3a+4)}=\frac{3}{5}.$$

8.5 习题

习题 8.1 (2013 年湖南高考) 已知 $a,b,c\in\mathbb{R}$ ，$a+2b+3c=6$，则 $a^2+4b^2+9c^2$ 的最小值为________.

习题 8.2 (2013 年湖北高考) 设 $x,y,z\in\mathbb{R}$ ，$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+2y+3z=\sqrt{14} \end{cases}$ ，则 $x+y+z=$________.

习题 8.3 (2008 年南大) 点 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，它到三边 BC,CA,AB 的距离分别为 d_1,d_2,d_3 ，S 为的面积．求证：$\dfrac{a}{d_1}+\dfrac{b}{d_2}+\dfrac{c}{d_3}\geqslant\dfrac{(a+b+c)^2}{2S}$.

习题 8.4 (2013 年北约) $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 是一个递增的正等差数列．k,l,m 是给定的正整数．已知 a_k 与 a_l 的几何平均大于 a_m 与 a_n 的算术平均．求证：$\dfrac{k+l}{2}>\sqrt{mn}$.

习题 8.5 (2006 年清华改) 已知 a,b 为非负实数，$a+b=1$，求 a^3+b^3 的最值．

习题 8.6 已知 $x,y,z>0$，求证：$x^xy^yz^z\geqslant x^yy^zz^x$.

习题 8.7 已知 a,b 为正实数，且 $a+2b+3c=1$，求 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ 的最小值．

习题 8.8 已知 $a,b>0$，且 $a^4+b^2=5$，求 $a+b$ 的最大值．

习题 8.9 已知 $a,b>0$，且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=2$，求 $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{4}{b+1}$ 的最大值．

习题 8.10 设 a,b,c 为三角形三边之长，$p=\dfrac{a+b+c}{2}$, r 为内切圆半径，证明：

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geqslant\frac{1}{r^2}.$$

习题 8.11 设 x,y,z 是 3 个不全为零的实数，求 $\dfrac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值．

习题 8.12 在 $\triangle ABC$ 中，求证：$1\leqslant\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\dfrac{3}{2}$ ，$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

习题 8.13 (2013 年北大保送) 正数 a,b,c 满足 $a<b+c$，求证：$\dfrac{a}{a+1}<\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}$.

习题 8.14 (2008 年南大) 已知正数 a,b,c 满足 $a+b+c=1$，求证：$\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(b+\dfrac{1}{b}\right)\left(c+\dfrac{1}{c}\right)\geqslant\dfrac{1000}{27}$.

习题 8.15 已知 a,b,c 为正数，求证：$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leqslant abc$.

习题 8.16 (2012 年北约) 设 A,B,C 为边长为 1 的正三角形三边上各一点，求 $AB^2+BC^2+CA^2$ 的最小值．

习题 8.17 点 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，求证：$PA^2+PB^2+PC^2\geqslant\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$.

习题 8.18 设 a,b,c,d 是满足 $ab+bc+cd+da=1$ 的非负实数，求证：

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geqslant\frac{1}{3}.$$

8.6 习题参考答案及提示

习题 8.1 12 .

习题 8.2 $\dfrac{3\sqrt{14}}{7}$.

习题 8.3 直接应用柯西不等式即得.

习题 8.4 略.

习题 8.5 最小值为 $\dfrac{1}{4}$ ，最大值为 1 . 提示： $a^3+b^3=a^2-ab+b^2=1-3ab$.

习题 8.6 不妨设 x 是 x,y,z 中的最大数，则

$$\frac{x^xy^yz^z}{x^yy^zz^x}=x^{x-y}y^{y-z}z^{(z-y)+(y-z)}=\left(\frac{x}{z}\right)^{x-y}\left(\frac{y}{z}\right)^{y-z}\geqslant 1,$$

于是原不等式得证.

习题 8.7 $6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$.

习题 8.8 3 . 提示：引入参数借助二次函数求最值：

$$\begin{aligned}
a+b&=\frac{1}{\lambda}\cdot\lambda a+1\cdot b\\
&\leqslant\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2+1^2}\cdot\sqrt{(\lambda a)^2+b^2}\\
&=\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}+1}\cdot\sqrt{\lambda^2a^2+5-a^4}\\
&=\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}+1}\cdot\sqrt{-\left(a^2-\frac{1}{2}\lambda^2\right)^2+5+\frac{1}{4}\lambda^4}\\
&\leqslant\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}+1}\cdot\sqrt{5+\frac{1}{4}\lambda^4},
\end{aligned}$$

其中等号取得的条件为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{\lambda a}{b},\\ a^4+b^2=5,\\ a^2=\dfrac{1}{2}\lambda^2,\end{cases}$$

解得

$$a=1,b=2,\lambda=\sqrt{2},$$

于是所求代数式的最大值为

$$\left.\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}+1}\cdot\sqrt{5+\frac{1}{4}\lambda^4}\right|_{\lambda=\sqrt{2}}=3.$$

也可以构造均值不等式

$$12=(a^4+1+1+1)+(b^2+2^2)\leqslant 4a+4b.$$

习题 8.9 $\dfrac{11}{4}$.

习题 8.10 应用柯西不等式可得． 提示：三角形的面积 $pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

习题 8.11 法一

考虑到

$$x^2+y^2+z^2=x^2+\lambda y^2+(1-\lambda)\,y^2+z^2\geqslant 2\sqrt{\lambda}xy+2\sqrt{1-\lambda}yz,$$

令 $\dfrac{2\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{1-\lambda}}=\dfrac{1}{2}$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{5}$，于是

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}\,(xy+2yz)\,,$$

原式的最大值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

法二

不妨设 $\dfrac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}=\lambda$，则

$$\lambda x^2-yx+\lambda\left(y^2+z^2\right)-2yz=0,$$

其判别式

$$\Delta=y^2-4\lambda\left[\lambda\left(y^2+z^2\right)-2yz\right]=\left(1-4\lambda^2\right)y^2+8\lambda yz-4\lambda^2z^2,$$

其判别式

$$\Delta'=64\lambda^2-4\left(1-4\lambda^2\right)\left(-4\lambda^2\right)=16\lambda^2\left(5-4\lambda^2\right),$$

于是取 $\lambda=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 即得.

法三

由嵌入不等式

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2xy\cos C+2yz\cos A+2zx\cos B,$$

取 $B=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\cos C}{\cos A}=\dfrac{1}{2}$，即 $\cos C=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos A=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，即得

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}\,(xy+2yz)\,,$$

于是原式的最大值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

习题 8.12 冻结变量调整即得.

习题 8.13 $\dfrac{a}{1+a}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+1}<\dfrac{1}{\dfrac{1}{b+c}+1}=\dfrac{b+c}{b+c+1}=\dfrac{b}{b+c+1}+\dfrac{c}{b+c+1}<\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}$.

习题 8.14 略． 提示：$a+\dfrac{1}{a}=a+\dfrac{1}{9a}+\dfrac{1}{9a}+\cdots+\dfrac{1}{9a}$，应用均值不等式可得.

习题 8.15 设[1] $a=x+y$ ， $b=y+z$ ， $c=z+x$ 则原不等式等价于

$$8(x+y)(y+z)(z+x)\geqslant xyz,$$

不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$ ，则 $y>0$ ，否则 $y,z\leqslant 0$ ，与 $y+z=b>0$ 矛盾.
当 $z\leqslant 0$ 时，不等式显然成立.
当 $z>0$ 时，利用均值不等式，不等式显然成立.

习题 8.16 设 A,B,C 分别在 $\triangle PQR$ 的边 PQ,QR,RP 上，且 $PA=a$ ， $QB=b$ ， $RC=c$ ，则

$$AB^2=(1-a)^2+b^2-(1-a)b\geqslant\frac{(1-a)^2+b^2}{2},$$

当且仅当 $1-a=b$ 时取等号，类似地得到其他两式子相加得

$$AB^2+BC^2+CA^2\geqslant\frac{(1-a)^2+a^2+(1-b)^2+b^2+(1-c)^2+c^2}{2}\geqslant\frac{3}{4},$$

当且仅当 $a=b=c=\dfrac{1}{2}$ 时两个“$\geqslant$”同时取得等号，因此 $AB^2+BC^2+CA^2$ 的最小值为 $\dfrac{3}{4}$.

习题 8.17 到两个定点的距离的平方和为定值的点的轨迹为以两定点中点为圆心的圆．因此当 PB^2+PC^2 固定时，当 P 位于 BC 边上的中线 AD 上时 $PA^2+PB^2+PC^2$ 最小.
类似的，可推知 P 点为重心时，$PA^2+PB^2+PC^2$ 最小．此时

$$\begin{aligned}PA^2+PB^2+PC^2&=\frac{4}{9}\left(AD^2+BE^2+CF^2\right)\\&=\frac{4}{9}\left(\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}+\frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4}+\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}\right)\\&=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.\end{aligned}$$

习题 8.18 略． 提示：$\dfrac{a^3}{b+c+d}+\dfrac{1}{18}(b+c+d)+\dfrac{1}{12}\geqslant\dfrac{1}{2}a$.

[1] a,b,c 为正数的条件是多余的

第九章　代数变形

代数变形的基本思路

- 认识代数式的角度
  - 代数式的“元”
    - 未知数的个数与消元
    - 主元、对称、对偶
  - 代数式的“次”
    - 未知数的次数与降次
    - 齐次与“不妨设”
  - 代数式的“形”
    - 代数式的结构
    - 代数式的几何意义

9.1　代数式的“元”

例题 9.1 已知互不相等的四个实数 a,b,c,d 满足 $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{d}=d+\frac{1}{a}=x$，求 x 的所有可能的值.

解　依次消元可得

$$d=\frac{ax-1}{a},c=\frac{ax^2-x-a}{ax-1},b=\frac{ax^3-x^2-2ax+1}{ax^2-x-a},a=\frac{ax^4-x^3-3ax^2+2x+a}{ax^3-x^2-2ax+1},$$

整理得

$$x\left(x^2-2\right)\left(ax-a^2-1\right)=0,$$

验证可排除 $x=0$ 以及 $x=a+\frac{1}{a}$，于是 $x=\pm\sqrt{2}$.

例题 9.2 (2012 年北大保送) 已知 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=30$，$a_1a_2\cdots a_{10}<21$，求证：$a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 中必有一个小于 1 .

解　用反证法. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}\geqslant 1$，令 $b_i=a_i-1\ (i=1,2,\cdots,10)$，则

$$b_1+b_2+\cdots+b_{10}=20,(b_1+1)(b_2+1)\cdots(b_{10}+1)<21.$$

而

$$(b_1+1)(b_2+1)\cdots(b_{10}+1)\geqslant 1+(b_1+b_2+\cdots+b_{10})=21,$$

矛盾．因此原命题得证．

例题 9.3 对于任意的实数 x,y,z，定义运算 $\otimes$ 为：

$$x\otimes y=\frac{3x^3y+3x^2y^2+xy^3+45}{(x+1)^3+(y+1)^3-60},$$

且 $x\otimes y\otimes z=(x\otimes y)\otimes z$，则 $2013\otimes 2012\otimes 2011\otimes\cdots\otimes 3\otimes 2=$________.

解 $\dfrac{5463}{967}$．注意 $x\otimes 3=9$，于是原式的值为 $9\otimes 3$．

例题 9.4 已知 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$，$a^2+b^2+c^2+d^2=1$，求证：

$$(a+b)^4+(b+c)^4+(c+d)^4+(d+a)^4+(a+c)^4+(b+d)^4\leqslant 6.$$

解 记原式左边为 A，其对偶式

$$B=(a-b)^4+(b-c)^4+(c-d)^4+(d-a)^4+(a-c)^4+(b-d)^4,$$

则

$$A+B=6\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2=6,$$

从而 $A\leqslant 6$，原命题得证．

例题 9.5 已知 $a,b,c>0$，求证：$\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\dfrac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant\dfrac{a+b+c}{3}$．

解 记原式左边为 A，其对偶式

$$B=\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{a^3}{c^2+ca+a^2},$$

则 $A=B$，而由均值不等式 $a^2-ab+b^2\geqslant\dfrac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$，于是

$$A+B=(a+b)\cdot\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}+(b+c)\cdot\frac{b^2-bc+c^2}{b^2+bc+c^2}+(c+a)\cdot\frac{c^2-ca+a^2}{c^2+ca+a^2}\geqslant\frac{2(a+b+c)}{3}.$$

9.2 代数式的“次”

例题 9.6 **(2015 年北大夏令营)** 已知正实数 a,b,c 满足 $a+b+c=1$，求 $\dfrac{abc}{(1-a)(1-b)(1-c)}$ 的最大值．

解 $\dfrac{1}{8}$．齐次化后应用均值不等式即得．

例题 9.7 **(2010 年 AAA 测试)** 设 θ 是三次多项式 $f(x)=x^3-3x+10$ 的一个根，且 $\alpha=\dfrac{\theta^2+\theta-2}{2}$，若 $h(x)$ 是一个有理系数的二次多项式，满足条件 $h(\alpha)=\theta$，则 $h(0)=$________.

解 设 $h(\alpha)=A\alpha^2+B\alpha+C=\theta$，将 $\alpha=\dfrac{\theta^2+\theta-2}{2}$ 代入，利用 $\theta^3-3\theta+10=0$ 降次可得[1]

$$A(-2\theta-4)+B\cdot\frac{\theta^2+\theta-2}{2}+C=\theta,$$

于是 $B=0$，$A=-\dfrac{1}{2}$，$C=-2$，$h(0)=C=-2$.

例题 9.8 设长方体的长、宽、高分别为 a,b,c，其对角线长为 l，试证：

$$\left(l^4-a^4\right)\left(l^4-b^4\right)\left(l^4-c^4\right)\geqslant 512a^4b^4c^4.$$

解 设 $x=\dfrac{a^2}{l^2}$，$y=\dfrac{b^2}{l^2}$，$z=\dfrac{c^2}{l^2}$，则 $x+y+z=1$. 原不等式等价于

$$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\geqslant 512,$$

而

$$\frac{1}{x^2}-1=\frac{(1-x)(1+x)}{x^2}=\frac{(y+z)(x+x+y+z)}{x^2}\geqslant\frac{2\sqrt{yz}\cdot 4\sqrt[4]{x^2yz}}{x^2},$$

类似得到其他两式，相乘即得.

例题 9.9 已知 $abc=1$，求 $\dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{c}{ca+c+1}$ 的值.

解 1. 令 $a=\dfrac{x}{y},b=\dfrac{y}{z},c=\dfrac{z}{x}$ 即得，也可以利用 $c=\dfrac{1}{ab}$ 直接消元.

例题 9.10 **(2000 年 IMO)** 已知正实数 a,b,c 满足 $abc=1$，求证：$\prod\limits_{cyc}\left(a-1+\dfrac{1}{b}\right)\leqslant 1$.

解 令 $a=\dfrac{x}{y}$，$b=\dfrac{y}{z}$，$c=\dfrac{z}{x}$，则只需要证明

$$(x-y+z)(x+y-z)(-x+y+z)\leqslant xyz.$$

再作换元，令 $A=-x+y+z$，$B=x-y+z$，$C=x+y-z$，只需要证明

$$ABC\leqslant\frac{A+B}{2}\cdot\frac{B+C}{2}\cdot\frac{C+A}{2},$$

事实上，由均值不等式，上式显然成立，因此原命题得证.

例题 9.11 **(2013 年清华保送)** 已知 $abc=-1$，$\dfrac{a^2}{c}+\dfrac{b}{c^2}=1$，$a^2b+b^2c+c^2a=t$，求 $ab^5+bc^5+ca^5$ 的值[2].

---

[1] 可以利用换元 $\theta=t+\dfrac{u}{t}$ 解出该三次方程

[2] 条件“$a^2b+b^2c+c^2a=t$”是多余的，但这样大大增加了问题的难度

解 直接消元

由已知可得 $b=-\frac{1}{ac}$ ，$a^3c^2=ac^3-1$ ，于是

$$ab^5+bc^5+ca^5=-\frac{1}{a^4c^5}-\frac{c^4}{a}+ca^5=\frac{-1-a^3c^9+a^9c^6}{a^4c^5}=3.$$

齐次化

令 $a=-\frac{x}{y}$ ，$b=-\frac{y}{z}$ ，$c=-\frac{z}{x}$ ，则由 $\frac{a^2}{c}+\frac{b}{c^2}=1$ 整理得

$$x^3z^2+y^3x^2+z^3y^2=0.$$

于是

$$\begin{aligned}ab^5+bc^5+ca^5&=\frac{x}{y}\cdot\frac{y^5}{z^5}+\frac{y}{z}\cdot\frac{z^5}{x^5}+\frac{z}{x}\cdot\frac{x^5}{y^5}\\&=\frac{xy^4}{z^5}+\frac{yz^4}{x^5}+\frac{zx^4}{y^5}\\&=\frac{x^6y^9+y^6z^9+z^9x^6}{x^5y^5z^5}\\&=\frac{3\left(x^2y^3\right)\cdot\left(y^3z^2\right)\cdot\left(z^3x^2\right)}{x^5y^5z^5}=3.\end{aligned}$$

降次

由 $\frac{a^2}{c}+\frac{b}{c^2}=1$ 得 $a^2c=c^2-b$. 根据轮换对称可得 $b^2a=a^2-c$ ，$c^2b=b^2-a$. 于是

$$\begin{aligned}ab^5+bc^5+ca^5&=b^3\left(a^2-c\right)+c^3\left(b^2-a\right)+a^3\left(c^2-b\right)\\&=a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3-\left(b^3c+c^3a+a^3b\right)\\&=ab\left(a^2-c\right)+bc\left(b^2-a\right)+ca\left(c^2-b\right)-\left(b^3c+c^3a+a^3b\right)\\&=3.\end{aligned}$$

三角消元

当 $c>0$ 时，令 $a=c^{\frac{1}{2}}\sin\theta$ ，$b=c^2\cos^2\theta$ ，则由 $abc=-1$ ，得 $c^{\frac{7}{2}}=-\frac{1}{\sin\theta\cos^2\theta}$. 于是

$$\begin{aligned}ab^5+bc^5+ca^5&=c^{\frac{21}{2}}\sin\theta\cos^{10}\theta+c^7\cos^2\theta+c^{\frac{7}{2}}\sin^5\theta\\&=-\frac{\sin\theta\cos^{10}\theta}{\sin^3\theta\cos^6\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^4\theta}-\frac{\sin^5\theta}{\sin\theta\cos^2\theta}\\&=-\frac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}-\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}\\&=\frac{-\cos^6\theta+1-\sin^6\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\\&=3.\end{aligned}$$

当 $c<0$ 时，令 $a=(-c)^{\frac{1}{2}}\tan\theta$ ，$b=c^2\sec^2\theta$ ，以下略.

9.3 代数式的“形”

例题 **9.12** 请找出一个整系数多项式方程 $f(x)=0$，满足:

(1)(2009 年清华**)** $x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ 是其一个根;

(2)(2015 年北大夏令营**)** $x=\sin 10^{\circ}$ 是其一个根.

解 *(1)* $f(x)=x^6-14x^4-6x^3+44x^2+36x+1$. *(2)* $f(x)=8x^3-6x+1$.

例题 **9.13** 解方程组 $\begin{cases} x+y=-20, \\ \sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{y+2}=-1. \end{cases}$

解 $(x,y)=(-26,6)$ 或 $(9,-29)$.

例题 **9.14** **(2009** 年北大**)** 已知对任意实数 x 均有 $a\cos x+b\cos 2x\geqslant -1$ 恒成立，求 $a+b$ 的最大值和最小值.

解 令 $\cos x=\cos 2x$，得 $\cos x=1$ 或 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$，于是有 $-1\leqslant a+b\leqslant 2$. 验证等号可以取得即可.

例题 **9.15** 已知 $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}=1$，求 $\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}$ 的值.

解 0. 原式即 $\left(\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}\right)(x+y+z)-(x+y+z)$.

例题 **9.16** 已知 $abc=1$，且 $\begin{cases} \dfrac{by}{z}+\dfrac{cz}{y}=a, \\ \dfrac{cz}{x}+\dfrac{ax}{z}=b, \\ \dfrac{ax}{y}+\dfrac{by}{x}=c. \end{cases}$ 求 $a^3+b^3+c^3$ 的值.

解 5. 注意到

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3 &= \sum_{cyc} a\left(\frac{by}{z}+\frac{cz}{y}\right)^2 \\ &= \left(\frac{by}{z}+\frac{cz}{y}\right)\left(\frac{cz}{x}+\frac{ax}{z}\right)\left(\frac{ax}{y}+\frac{by}{x}\right)+4abc \\ &= 5abc, \end{aligned}$$

因此 $a^3+b^3+c^3=5$.

例题 **9.17** 已知实数 a,b,c,d 均不为 0，且互不相等，若 $a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c}=c+\dfrac{1}{d}=d+\dfrac{1}{a}$，求 $a^2b^2c^2d^2$ 的值.

解 1. $a-b=\dfrac{c-b}{bc}$，轮换相乘即得.

例题 **9.18** **(2015** 年清华领军**)** 已知 $x^2+y^2\leqslant 1$，求 $\left|x^2+2xy-y^2\right|$ 的最大值.

解 令 $x=r\cos\theta$ ， $y=r\sin\theta$ ，其中 $r>0$ ，则

$$\left|x^2+2xy-y^2\right|=\left|r^2\sin 2\theta-r^2\cos 2\theta\right|=\sqrt{2}r^2\left|\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant\sqrt{2},$$

可得最大值为 $\sqrt{2}$.

例题 9.19 **(2011 年北约)** 求函数 $f(x)=|x-1|+|2x-1|+|3x-1|+\cdots+|2011x-1|$ 的最小值.

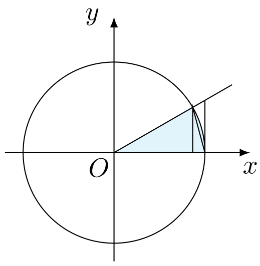
解 最小值为 $f\left(\dfrac{1}{1422}\right)=832\dfrac{491}{711}$.

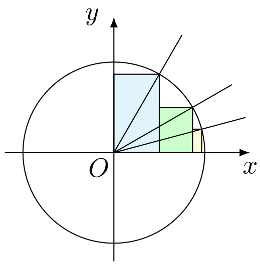
例题 9.20 利用三角函数线证明:

(1) 若 α 为锐角，则 $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$;

(2) 若 $0<\alpha<\beta<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ ，则 $\dfrac{\pi}{2}+2\sin\alpha\cos\beta+2\sin\beta\cos\gamma>\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma$.

解 分别构造扇形和构造矩形证明.





在左图中，扇形面积在两个三角形面积之间；在右图中，四分之一圆的面积大于三个小矩形的面积之和.

例题 9.21 已知 $a,b,c>0$ ，求 $\dfrac{a}{b+3c}+\dfrac{b}{8c+4a}+\dfrac{9c}{3a+2b}$ 的最小值.

解 令 $b+3c=x$ ， $8c+4a=y$ ， $3a+2b=z$ ，则

$$a=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{8}y+\frac{1}{6}z,b=\frac{1}{2}x-\frac{3}{16}y+\frac{1}{4}z,c=\frac{1}{6}x+\frac{1}{16}y-\frac{1}{12}z,$$

于是

$$\text{原式}=-\frac{61}{48}+\left(\frac{y}{8x}+\frac{x}{2y}\right)+\left(\frac{9y}{16z}+\frac{z}{4y}\right)+\left(\frac{3x}{2z}+\frac{z}{6x}\right),$$

应用均值不等式可得最小值为 $\dfrac{47}{48}$ ，仅当 $x:y:z=1:2:3$ 时取得，此时 $a:b:c=10:21:1$.

例题 9.22 解方程组 $\begin{cases}5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=12\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=13\left(z+\dfrac{1}{z}\right),\\ xy+yz+zx=1.\end{cases}$

解 法一

显然， x,y,z 同号. 于是先求其正数解. 由

$$\frac{2x}{1+x^2}:\frac{2y}{1+y^2}:\frac{2z}{1+z^2}=5:12:13,$$

于是设 $x=\tan\dfrac{\alpha}{2}$，$y=\tan\dfrac{\beta}{2}$，$z=\tan\dfrac{\gamma}{2}$，则有

$$\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma=5:12:13,$$

又由 $xy+yz+zx=1$ 得 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{x+y}{1-xy}$，即 $\cot\dfrac{\gamma}{2}=\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，于是 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$[1]. 因此

$$\sin\alpha=\frac{5}{13},\sin\beta=\frac{12}{13},\sin\gamma=1,$$

从而解得 $(x,y,z)=\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{3},1\right)$. 因此原方程有两组解：$\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{3},1\right),\left(-\dfrac{1}{5},-\dfrac{2}{3},-1\right)$.

法二

将 $x=\dfrac{1-yz}{y+z}$ 代入整理得

$$12y^2z+17yz^2=7y+12z,18y^2z+13yz^2=13y+8z,$$

两式相加得 $yz=\dfrac{2}{3}$，于是 $y=\dfrac{2}{3z}$，由此可解得 $z=\pm1$. 以下略.

法三

将 $xy+yz+zx=1$ 代入第一式，可得

$$5yz(x+y)(x+z)=12xz(y+x)(y+z)=13xy(z+x)(z+y),$$

分别令 $x(y+z)=a,y(z+x)=b,z(x+y)=c$，则

$$5bc=12ca=13ab,\ \text{即}\ \frac{5}{a}=\frac{12}{b}=\frac{13}{c}=k,$$

且 $a+b+c=2$. 从而解得 $k=15$，以下略.

例题 9.23 **(2006 年高中数学联赛) 解方程组** $\begin{cases}x-y+z-w=2,\\x^2-y^2+z^2-w^2=6,\\x^3-y^3+z^3-w^3=20,\\x^4-y^4+z^4-w^4=66.\end{cases}$

解　设 $p=x+z,q=xz$，则

$$x^2+z^2=p^2-2q,x^3+z^3=p^3-3pq,x^4+z^4=p^4-4p^2q+2q^2,$$

[1]这是处理条件 $ab+bc+ca=1$ 的常用换元

于是

$$\begin{cases} p^2 = x^2 + z^2 + 2q, \\ p^3 = x^3 + z^3 + 3pq, \\ p^4 = x^4 + z^4 + 4p^2q - 2q^2. \end{cases}$$

类似的，设 $s = y + w, t = yw$，由 $p = s + 2$，得

$$\begin{cases} p^2 = s^2 + 4s + 4, \\ p^3 = s^3 + 6s^2 + 12s + 8, \\ p^4 = s^4 + 8s^3 + 24s^2 + 32s + 16. \end{cases}$$

将 $p^2, s^2, p^3, s^3, p^4, s^4$ 的表达式代入，并根据原方程组化简，得

$$\begin{cases} q = t + 2s - 1, \\ pq = st + 2s^2 + 4s - 4, \\ 2p^2q - q^2 = 2s^2t - t^2 + 4s^3 + 12s^2 + 16s - 25. \end{cases}$$

进而可得 $t = \dfrac{s}{2} - 1$，$q = \dfrac{5s}{2} - 2$，从而解得 $s = 2$，进而 $t = 0$，$p = 4$，$q = 3$．于是

$$(x, y, z, w) = (3, 2, 1, 0), (3, 0, 1, 2), (1, 2, 3, 0), (1, 0, 3, 2).$$

9.4 习题

习题 9.1 (2013 年北约) 若 $\begin{cases} x^2 = 2y + 5, \\ y^2 = 2x + 5, \end{cases}$ 其中 $x \neq y$ ，则 $x^3 - 2x^2y^2 + y^3$ 的值为 (　　)

A. -10　　B. -12　　C. -14　　D. 以上答案均不对

习题 9.2 (2015 年清华领军) 已知 $x, y, z \in \mathbb{Z}$ ，且 $xy + yz + zx = 1$ ，则 $\left(1 + x^2\right)\left(1 + y^2\right)\left(1 + z^2\right)$ 的值可能是 (　　)

A. 16900　　B. 17900　　C. 18900　　D. 以上答案都不对

习题 9.3 (2012 年北约) 关于 x 的方程 $\sqrt{x + 11 - 6\sqrt{x+2}} + \sqrt{x + 27 - 10\sqrt{x+2}} = 1$ 的实根的个数为________.

习题 9.4 如果实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $|x_i| < 2$ ，$i = 1, 2, \cdots, n$ ，且 $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k| = 19 + \left|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right|$ ，则整数 n 的最小值为________.

习题 9.5 (2015 年北大夏令营) 设 $\dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{2}$ ，则 $\dfrac{x^2}{x^4 + 1} =$________ .

习题 9.6 (2015 年清华领军) 已知 $2x + y = 1$ ，则 $x + \sqrt{x^2 + y^2}$ 的最小值为________ .

习题 9.7 (2009 年交大) 方程 $x = \sqrt{x + 2\sqrt{x + \cdots + 2\sqrt{x + 2\sqrt{3x}}}}$ (n 重根号) 的解是________ .

习题 9.8 $\left(\sqrt{3} + 1\right)^6$ 的整数部分是________ .

习题 9.9 已知 $a > 0$ ，$a^2 - 2ab + c^2 = 0$ ，$bc > a^2$ ，试比较 a, b, c 的大小.

习题 9.10 在实数范围内求方程 $\sqrt[4]{10 + x} + \sqrt[4]{7 - x} = 3$ 的根.

习题 9.11 给出 $1, 2, \cdots, 1000$ 的一个排列 $a_1, a_2, \cdots, a_{1000}$ ，使得 $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_{999} - a_{1000}|$ 最大.

习题 9.12 (2013 年北约) 实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2013}$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2013} = 0$ ，且 $|a_1 - 2a_2| = |a_2 - 2a_3| = \cdots = |a_{2013} - 2a_1|$ ，求证：$a_1 = a_2 = \cdots = a_{2013} = 0$.

习题 9.13 设 $a, b, c > 0$ ，求证：$\dfrac{c^2 - a^2}{a + b} + \dfrac{a^2 - b^2}{b + c} + \dfrac{b^2 - a^2}{c + a} \geqslant 0$.

习题 9.14 将 $1, 2, \cdots, 100$ 平均分为两组，每组均为 50 个数，一组从小到大排列为 $a_1, a_2, \cdots, a_{50}$ ，另一组从大到小排列为 $b_1, b_2, \cdots, b_{50}$ ，求证：$\sum\limits_{k=1}^{50} |a_k - b_k|$ 为定值.

习题 9.15 求方程组 $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ xyz + z = 0, \\ xy + yz + zx + y = 0 \end{cases}$ 的所有有理数解.

9.5 习题参考答案及提示

习题 9.1 D． 提示：$x+y=-2$，$xy=-1$，$x^3-2x^2y^2+y^3=-16$．

习题 9.2 A． 提示：$1+x^2=xy+yz+zx+x^2=(x+y)(x+z)$．

习题 9.3 0． 提示：方程左边即 $\left|\sqrt{x+2}-3\right|+\left|\sqrt{x+2}-5\right|\geqslant 2$．

习题 9.4 10．

习题 9.5 $\dfrac{1}{6}$．

习题 9.6 $\dfrac{4}{5}$．

习题 9.7 $x=0$ 或 $x=3$．

习题 9.8 415． 提示：配对偶式 $\left(\sqrt{3}-1\right)^6$．

习题 9.9 $b>c>a$．

习题 9.10 $x=6$ 或 $x=-9$．

习题 9.11 $501,1,1000,2,999,3,998,\cdots,499,502,500$．

习题 9.12 设 $b_i=a_i-2a_{i+1}$，其中 $a_{2014}=a_1$，则容易证明 $b_i=0\,(i=1,2,\cdots,2013)$，进而 $a_i=0\,(i=1,2,\cdots,2013)$.

习题 9.13 略． 提示：配对偶式 $\dfrac{b^2-a^2}{a+b}+\dfrac{a^2-c^2}{b+c}+\dfrac{b^2-a^2}{c+a}$．

习题 9.14 略． 提示：定值为 $(51+52+\cdots+100)-(1+2+\cdots+50)=2500$．

习题 9.15 $(x,y,z)=(0,0,0)$ 或 $(x,y,z)=(-1,1,0)$．

第十章　平面几何

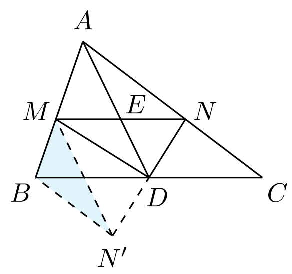
10.1　直线型

例题 10.1 **(2013 年北约)** 在 $\triangle ABC$ 中，D 为 BC 的中点，DM 平分 $\angle ADB$ 交 AB 于 M，DN 平分 $\angle ADC$ 交 AC 于 N，则 $BM+CN$ 与 MN 的大小关系是________.

解　根据已知，有

$$\frac{AM}{BM}=\frac{AD}{BD}=\frac{AD}{CD}=\frac{AN}{CN},$$

于是 $MN \parallel BC$．设 AD 与 MN 交于点 E，则 E 点平分 MN 且 $MN=ME+EN=2DE$．于是 $BM+CN$ 与 $2DE$ 的大小关系可以转化为 $AB+AC$ 与 $2AD$ 的大小关系 (平行线截割定理)，而利用平行四边形容易证明在 $\triangle ABC$ 中，中线 $AD<\dfrac{AB+AC}{2}$．

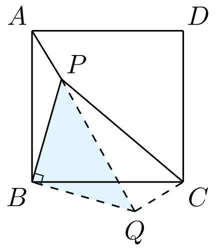


(另法) 作 N 关于点 D 的对称点 N'，连接 BN', MN'，则

$$BM+CN=BM+MB>MN'=AD.$$

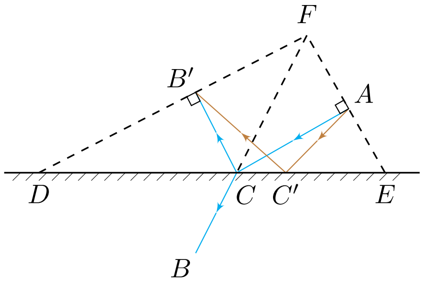
例题 10.2 **(2015 年北大博雅)** 正方形 $ABCD$ 内部一点 P 满足 $AP:BP:CP=1:2:3$，则 $\angle APB=$________．

解　135°．如图，作旋转变换即可．



例题 10.3 利用光路最短原理 (费马原理)，证明折射定律.

解 设 v_1, v_2 是光在 AC, CB 路径上传播的速度，而 θ_1, θ_2 分别是入射角和出射角的余角，则欲证明当 $\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}$ 时，光从 A 点运动到 B 点所用的时间 $\dfrac{AC}{v_1}+\dfrac{BC}{v_2}$ 最小.



过 B' 作 CB' 的垂线，过 A 作 CA 的垂线，两条垂线交于 F 点，连接 FC . 当 C 点位于其他位置 C' 时，有

$$DF\cdot B'C'+EF\cdot AC'>2S_{\triangle DEF}=DF\cdot B'C+EF\cdot AC=DF\cdot BC+EF\cdot AC,$$

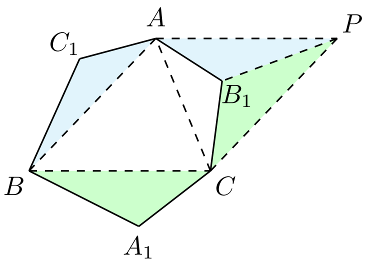
于是折射定律成立.

例题 10.4 **(2008 年北大)** 已知六边形 $AC_1BA_1CB_1$ 中，$AC_1=AB_1$ ，$BC_1=BA_1$ ，$CA_1=CB_1$ 且 $\angle A+\angle B+\angle C=\angle A_1+\angle B_1+\angle C_1$. 求证：$\triangle ABC$ 的面积是六边形 $AC_1BA_1CB_1$ 的一半.

解 六边形的内角和为 720° ，所以

$$\angle A+\angle B+\angle C=\angle A_1+\angle B_1+\angle C_1=360^\circ.$$

如图，将 $\triangle ABC_1$ 旋转到 $\triangle APB_1$ ，将 $\triangle CBA_1$ 旋转到 $\triangle CPB_1$.



由于 $AB=AP$ ，$BC=PC$ ，$AC=AC$ ，从而 $\triangle ABC$ 与 $\triangle APC$ 全等. 因此 $\triangle ABC$ 的面积是六边形 $AC_1BA_1CB_1$ 的一半.

10.2 圆型

1. 欧拉线

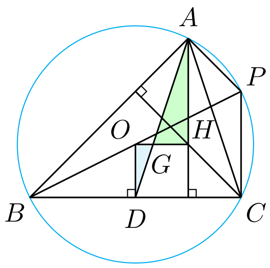
   连接三角形外心与垂心的线段叫做欧拉线．三角形的重心在欧拉线上，且位于靠近外心的三等分点处[1]．欧拉线蕴含的数量关系以及证明欧拉线时用到的几何图形都是圆型几何问题中经常用到的．

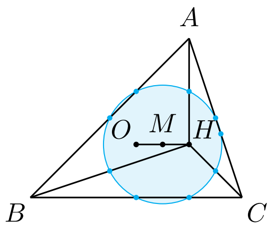
2. 九点圆

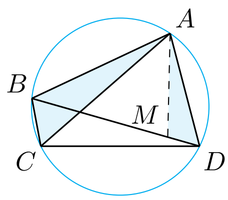
   三角形的三边中点、三边上高线的垂足、连接垂心与三角形顶点的线段中点 (共九点) 共圆，且圆心为欧拉线的中点，这个圆称为九点圆．

3. 托勒密定理 (Ptolemy theorem)

   圆内接四边形[2]对角线的乘积等于两组对边的乘积之和．





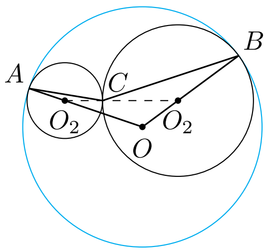


例题 10.5 **(2011 年华约)** $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 外切于点 C，$\odot O_1,\odot O_2$ 都和 $\odot O$ 内切，切点分别为 A,B．设 $\angle AOB=\alpha$，$\angle ACB=\beta$，则下列结论不正确的是 (　　)

A. $\cos\beta+\sin\dfrac{\alpha}{2}=0$　　**B.** $\sin\beta-\cos\dfrac{\alpha}{2}=0$

C. $\sin 2\beta+\sin\alpha=0$　　**D.** $\sin 2\beta-\sin\alpha=0$

解　连接 OC,O_1O_2．



设 $\angle OAC=\angle O_1CA=\theta_1$，$\angle O_2CB=\angle OBC=\theta_2$，则

$$\alpha=\pi-2\theta_1-2\theta_2,\beta=\alpha+\theta_1+\theta_2=\pi-\theta_1-\theta_2,$$

于是 $\pi-\alpha=2(\pi-\beta)$，即 $2\beta=\alpha+\pi$．

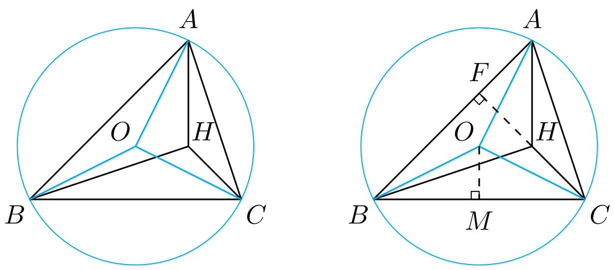
[1]如图，O,H 分别为三角形的外心和垂心，连接 BO 并延长交的外接圆于 P，连接 CP．设三角形的中线 AD 与 OH 交于点 G，则 $\triangle OGD$ 与 $\triangle HGA$ 相似，所以只需要证明 $\dfrac{OD}{AH}=\dfrac{1}{2}$．事实上，$APCH$ 为平行四边形 (即 $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{PC}$，这个结论非常重要)，$OD=\dfrac{1}{2}CP=\dfrac{1}{2}AH$，所以命题成立．

[2]对共线的四点也成立，可以通过取对角线上一点构造相似证得

例题 10.6 设 H,P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上的两点，用 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{h}$ 分别表示向量 $\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC},\overrightarrow{PH}$. 已知 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{h}$ 均为非零向量，满足

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{h}=\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{h}=\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{h},$$

并且 $\left|\overrightarrow{AH}\right|=1$, $\left|\overrightarrow{BH}\right|=\sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{3}$. 点 O 为 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心，则 $\triangle AOB,\triangle BOC,\triangle AOC$ 的面积之比是________.



解 根据题意，有 $(\vec{a}-\vec{c})\cdot\left(\vec{b}-\vec{h}\right)=0$ ，即 $BH\perp AC$ ，不难推得 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心. 取 BC 的中点 M . 根据欧拉线的性质有 $AH=2OM$ ，于是不难得到

$$A=\angle BOM=\frac{\pi}{3},$$

进而由垂心的性质，有 $\angle BHF=A=\dfrac{\pi}{3}$ ，从而 $FH=\dfrac{1}{2}BH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ，这样我们得到了

$$A=\frac{\pi}{3},B=\frac{\pi}{4},C=\frac{5\pi}{12},$$

进而 $\triangle AOB$ ，$\triangle BOC$ ，$\triangle AOC$ 面积之比为

$$\sin 2C:\sin 2A:\sin 2B=1:\sqrt{3}:2.$$

例题 10.7 (欧拉不等式) 三角形 ABC 的外接圆和内切圆的半径分别为 R,r ，求证：$R\geqslant 2r$.

解 设 O 到三角形三边的距离分别为 r_a,r_b,r_c ，三边上的高分别为 h_a,h_b,h_c ，三角形的面积为 S . 由 $R+r_a>h_a$ ，得 $Ra+ar_a>2S$ ，类似的，可得其余各式，然后相加得

$$R(a+b+c)+2S>6S,$$

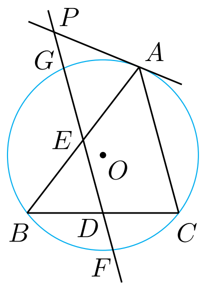
即

$$R(a+b+c)>4S=2r(a+b+c),$$

于是不等式得证. 也可以利用 I 对 $\triangle ABC$ 外接圆的圆幂为 $-2Rr$ 证明.

例题 10.8 **(2011 年卓越联盟)** 如图，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ，过 BC 中点 D 作平行于边 AC 的直线 l ，l 交 AB 于 E ，交 $\odot O$ 于 G,F ，交 $\odot O$ 在 A 点处的切线于 P ，若 $PE=3$ ，$ED=2$ ，

$EF=3$，则 PA 的长为________.



解 $ED=2$，$DF=1$，$AC=4$．$AE=BE$．设 $GE=x$，则 $PG=3-x$．由相交弦定理，有

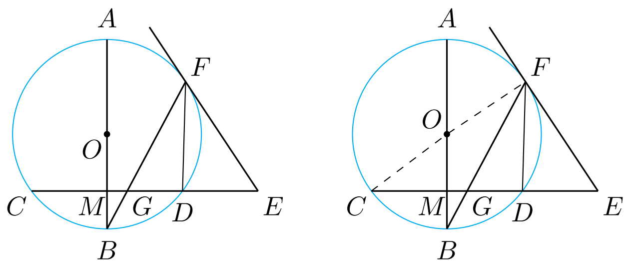
$$GE\cdot EF=AE\cdot BE,$$

于是 $AE=BE=\sqrt{3x}$，又 PA 为切线，因此 $\triangle PAE$ 与 $\triangle BDE$ 相似，于是

$$\frac{PE}{AE}=\frac{BE}{ED},\ \text{即}\ \frac{3}{\sqrt{3x}}=\frac{\sqrt{3x}}{2},$$

解得 $x=2$[1]．由切割线定理，$PA^2=PG\cdot PF=6$，于是 $PA=\sqrt{6}$．

例题 10.9 **(2012 年卓越联盟)** 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 CD 垂直 AB 于点 M，E 是 CD 延长线上一点，$AB=10$，$CD=8$，$3ED=4OM$，EF 是 $\odot O$ 的切线，F 是切点，BF 与 CD 相交于点 G，



(1) 求线段 EG 的长；

(2) 连接 DF，判断 DF 是否平行于 AB，并证明你的结论．

解 (1) 连接 OC,AF[2]，由 $CM=4$，$OM=\sqrt{OC^2-CM^2}=3$，知 $ED=\dfrac{4}{3}OM=4$．由 $EF^2=DE\cdot EC$ 可得 $EF=4\sqrt{3}$．由

$$\angle BFE=\angle FAB=\angle MGB=\angle FGE,$$

可得 $EF=EG=4\sqrt{3}$．

[1]或者由 $\angle PAE=\angle C=\angle EPB$ 可得 P,A,D,B 四点共圆，所以 $PE\cdot ED=AE\cdot EB=GE\cdot EF$，进而 $GE=2$

[2]此题的一个常见错误为直接认为 C,O,F 三点共线

(2) 若 $FD \parallel AB$，有 $FD \perp CE$，则

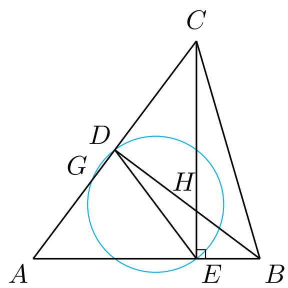
$$\frac{FD}{MB}=\frac{GD}{MG} \text{ 即 } \frac{FD}{2}=\frac{4\sqrt{3}-4}{8-4\sqrt{3}},$$

从而 $FD=2\left(\sqrt{3}+1\right)$．而由 $\triangle FDE$ 为直角三角形，知

$$FD=\sqrt{EF^2-DE^2}=4\sqrt{2},$$

矛盾．故 DF 与 AB 不平行．

例题 10.10 **(2012 年华约)** 如图，在锐角 $\triangle ABC$ 中，AB 边上的高 CE 与 AC 边上的高 BD 交于点 H，以 DE 为直径作圆与 AC 的另一个交点为 G．已知 $BC=25$，$BD=20$，$BE=7$，求 AG 的长．



解　几何法

显然 B,C,D,E 四点共圆，于是

$$\left.\begin{array}{l} BC=25, BD=20 \Rightarrow CD=15 \\ BC=25, BE=7 \Rightarrow CE=24 \\ BC=25, BE=7, BD=20 \end{array}\right\} \Rightarrow DE=\frac{BD\cdot CE-CD\cdot BE}{BC}=15.$$

注意到 $DE=DC$，于是 $\angle DCE=\angle DEC$，于是 $AD=DC=15$．

连接 GE，则 $\angle DGE=90^\circ$ (DE 为直径)，从而 $\triangle GDE$ 与 $\triangle EBC$ 相似，所以

$$GD=\frac{DE\cdot BE}{BC}=\frac{21}{5},$$

进而 $AG=AD-GD=\dfrac{54}{5}$．

复数法

以 E 为原点建立平面直角坐标系，则 $B(7,0)$，$C(0,24)$，$\overrightarrow{BC}$ 对应的复数为 $-7+24\mathrm{i}$，于是 $\overrightarrow{BD}$ 对应的复数为

$$(-7+24\mathrm{i})\cdot\frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}\right)=-16+12\mathrm{i}.$$

因此 $D(-9,12)$，以下略．

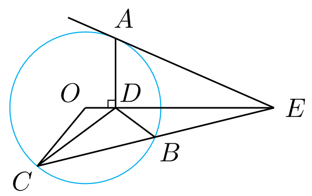
10.3 习题

习题 10.1 (2007 年复旦) 在边长为 a 的等边三角形 ABC 的边 AB 和 BC 上分别取 D,E 两点使得 $AD=BE=\dfrac{a}{3}$，连接 AE,CD，AE 和 CD 的夹角为________.

习题 10.2 (2004 年交大) 将一根长为 l 的钢丝折成三段与另一墙面合成封闭矩形，则封闭矩形的面积的最大值是________.

习题 10.3 (2003 年交大) 用长度为 12 的篱笆围成四边形，一边靠墙，则所围成面积 S 的最大值是________.

习题 10.4 (2013 年卓越联盟) 如图，AE 是 $\odot O$ 的切线，A 是切点，$AD\perp OE$ 于点 D，割线 EC 交 $\odot O$ 于 B,C 两点，设 $\angle ODC=\alpha$，$\angle DBC=\beta$，则 $\angle OEC=$________(用 α,β 表示).

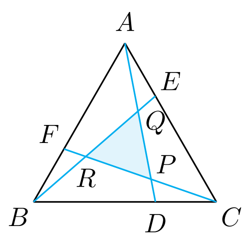


习题 10.5 (2010 年清华) $\triangle ABC$ 的两条高线 AD,BE 交于 H，其外接圆圆心为 O，过 O 作 OF 垂直 BC 于 F，OH 与 AF 相交于 G，则 $\triangle OFG$ 与 $\triangle GAH$ 面积之比为________.

习题 10.6 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(-2,0)$，$B(0,4)$，欧拉线所在的方程为 $l:x+y-2=0$，则顶点 C 的坐标是________.

习题 10.7 已知 F 为椭圆 $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$ 的右焦点，第一象限内的点 M 在椭圆上，若 MF 与 x 轴垂直，直线 MN 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切于第四象限内的点 N，则 NF 的长度为________.

习题 10.8 (2009 年中科大) 已知 $\triangle ABC$ 面积为 1，D,E,F 分别在 BC,CA,AB 上，$BD=2DC$，$CE=2EA$，$AF=2FB$，AD,BE,CF 两两相交于 P,Q,R. 求 $\triangle PQR$ 的面积.



习题 10.9 (2012 年北约) 圆的内接五边形，其内角都相等，求证：这个五边形为正五边形.

习题 10.10 (2008 年北大) 求证：边长为 1 的正五边形对角线长为 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

习题 10.11 (2015 年北大化学营) 设 A,B,C,D,X 为圆周上依次排列的五个点，已知 $\angle AXB=\angle BXC=\angle CXD$，$AX=a$，$BX=b$，$CX=c$，求 DX 的长.

10.4 习题参考答案及提示

习题 10.1 $\dfrac{\pi}{3}$.

习题 10.2 $\dfrac{1}{8}$.

习题 10.3 $12\sqrt{3}$. 提示：对称为六边形考虑.

习题 10.4 $\beta-\alpha$.

习题 10.5 由 $OF \parallel AH$ ，可得 $\triangle OFG$ 与 $\triangle HGA$ 相似，又 OGH 是 $\triangle ABC$ 的欧拉线，所以 $\dfrac{OG}{GH}=\dfrac{1}{2}$ [1]，于是所求比值为 $1:4$.

习题 10.6 $(4,0)$.

习题 10.7 半通径 $MF=\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ， $OF=2$ ， $OM=\sqrt{\dfrac{21}{5}}$ ， $ON=1$ ， $MN=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.
于是由 Ptolemy 定理 $OM\cdot NF+ON\cdot MF=OF\cdot MN$ ，代入数据计算可得 $MF=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

习题 10.8 $\dfrac{1}{7}$ [2].

习题 10.9 略.

习题 10.10 略.

习题 10.11 设 $AB=BC=CD=m$ ， $AC=BD=n$ ，则由 A,B,C,X 四点共圆，由托勒密定理可得

$$am+cm=bn,$$

由 B,C,D,X 四点共圆，由托勒密定理可得

$$bm+dm=cn,$$

两式相除即得 $d=\dfrac{c^2+ac-b^2}{b}$.

[1] 或 $AH=2R\cos A=2OF$ ，其中 R 为外接圆半径

[2] 若比例关系由 2 变为 k ，则 $\triangle PQR$ 的面积为 $\dfrac{(k-1)^3}{k^3-1}=\dfrac{k^2-2k+1}{k^2+k+1}$.

第十一章　立体几何

1. 空间中距离的一般求法

   利用数量积求投影分量

2. 空间中角度的一般求法

   法向量与计算法向量的方法

3. 空间中面积与体积的一般求法

   外积，混合积

4. 面积射影定理

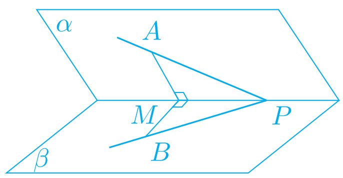
   平面 α 内的封闭几何图形 Γ_1 在平面 β 内的投影为封闭几何图形 Γ_2，则平面 α 与 β 所成角的余弦值为 Γ_2 与 Γ_1 的面积之比.

5. 三面角定理

   如图，设 $\angle APM=\theta_1$，$\angle BPM=\theta_2$，$\angle APB=\gamma$，则 α,β 形成的二面角 θ 满足

$$\cos\theta=\frac{\cos\gamma-\cos\theta_1\cos\theta_2}{\sin\theta_1\sin\theta_2},$$

   也写作 $\cos\gamma=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta$.



6. 空间余弦定理

$$\cos<AB,CD>=\frac{\left|\left(AC^2+BD^2\right)-\left(AD^2+BC\right)^2\right|}{2\cdot AB\cdot CD}.$$

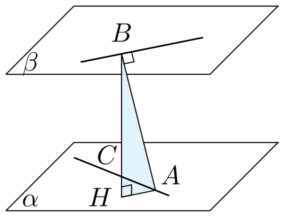
11.1　三面角定理及空间余弦定理

例题 11.1 证明三面角定理.

解　可以利用空间向量或者余弦定理证明.

例题 11.2 (2010 年华约) 如果平面 α,β，直线 m,n，点 A,B 满足：$\alpha\parallel\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，$A\in m$，$B\in n$ 且 AB 与 α 所成的角为 $\dfrac{\pi}{4}$，$n\perp AB$，m 与 AB 所成的角为 $\dfrac{\pi}{3}$，那么 m 与 n 所成角的大小为________.

解 如图，设 B 在 α 内的射影为 H，则 $\angle BAH=\dfrac{\pi}{4}$，



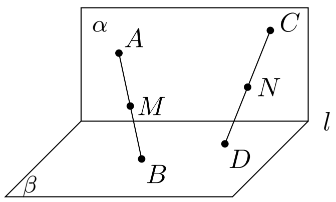
由三面角定理，$\cos\angle BAH\cdot\cos\angle CAH=\cos\angle BAC$，于是
$$\cos\angle CAH=\frac{\cos\angle BAC}{\cos\angle BAH}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$
从而 $\angle CAH=\dfrac{\pi}{4}$.

例题 11.3 (2008 年清华) 四面体一个顶点处的三个角分别是 $\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{3},\arctan 2$，求 $\dfrac{\pi}{3}$ 的面和 $\arctan 2$ 的面所成的二面角的大小.

解 设所求角为 θ，则
$$\cos\theta=\frac{\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos(\arctan 2)}{\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin(\arctan 2)}=\frac{0-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}}=-\frac{\sqrt{3}}{6},$$
从而 $\pi-\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 为所求.

11.2 空间位置关系与几何量

例题 11.4 如图，平面 α 与平面 β 垂直，直线 l 为两个平面的交线．A、C 是平面 α 内不同的两点，B、D 是平面 β 内不同的两点，且 $A,B,C,D\notin l$，M、N 分别是线段 AB、CD 的中点，下列判断正确的是 (　　)



A. 当 $|CD|=2|AB|$ 时，M、N 两点不可能重合

B. M,N 两点可能重合，但此时直线 AC 与直线 l 不可能相交

C. 当 AB 与 CD 相交，直线 AC 平行于 l 时，直线 BD 可以与 l 相交

D. 当 AB、CD 是异面直线时，MN 可能与 l 平行

解　B.

选项 A，取与 l 平行的平面，与 α 和 β 分别相交，在两条交线上取一条线段 AB，然后将这条线段绕其中点 M 旋转，那么在旋转过程中必然可以找到长度是起始长度 2 倍的位置，即线段 CD. 因此选项 A 错误.

选项 B，由对选项 A 的分析可知，M、N 可以重合，若 M 与 N 重合，那么 AB 与 CD 互相平分，因此 $ADBC$ 为平行四边形. 对平行四边形所在平面与 α、β 应用引理即得 $AC \parallel BD \parallel l$，因此选项 B 正确.

选项 C，若 AB 与 CD 相交，那么它们构成一个平面，对该平面与 α、β 应用引理即得 $AC \parallel l \parallel BD$，因此选项 C 错误.

选项 D，当 MN 与 l 平行时，将线段 AB 沿向量 $\overrightarrow{MN}$ 平移到 $A'B'$，则根据对选项 B 的分析，有 $CA' \parallel B'D \parallel l$，又 $AA' \parallel BB' \parallel MN \parallel l$，于是在平面 α 内，过 A' 的平行线 CA' 与 AA' 重合，于是 A 在平面 $A'CB'D$ 内，类似的，B 也在平面 $A'CB'D$ 内，因此 AB 与 CD 共面.

例题 **11.5** **(2011 年华约)** 已知异面直线 a,b 成 60° 角. A 为空间一点，则过 A 与 a,b 都成 45° 角的平面 (　　)

A. 有且只有一个　　**B.** 有且只有两个　　**C.** 有且只有三个　　**D.** 有且只有四个

解　B. 考虑平面的法向量.

例题 **11.6** 已知 A,B 分别为异面直线 a,b 上的点，且直线 AB 与 a,b 均垂直，动点 $P \in a$，$Q \in b$.

(1) 若 $a \perp b$，描述线段 PQ 中点 M 的轨迹形状；

(2) 若 $PA+QB$ 为定值，描述线段 PQ 中点 M 的轨迹形状.

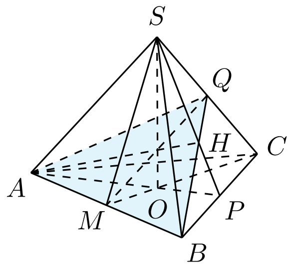
解　(1) 圆；(2) 平行四边形.

例题 **11.7** **(2012 年华约)** 已知三棱锥 $S-ABC$ 的底面 ABC 为正三角形，点 A 在侧面 SBC 上的射影 H 是 $\triangle SBC$ 的垂心，二面角 $H-AB-C$ 为 30°，且 $SA=2$，则此三棱锥的体积为________.

解　作 S 在底面上的投影，设为 O，则 $AO \perp BC$，进而

$$\left.\begin{array}{l} AH \perp SBC \Rightarrow ABQ \perp SBC \\ SC \perp BQ \end{array}\right\} \Rightarrow SC \perp ABQ \Rightarrow OC \perp AB,$$

因此 O 为 $\triangle ABC$ 的垂心，即中心. 也即 $S-ABC$ 为正三棱锥. 取 AB 的中点 M，则 $\angle QMC$ 为二面角 $H-AB-C$ 的平面角，$\angle QMC=30^\circ$，$\angle QCM=60^\circ$. 于是 $OC=SC\cos\angle QCM=2\cdot\cos 60^\circ=1$，底面 $\triangle ABC$ 边长为 $\sqrt{3}$. 因此三棱锥体积为 $\dfrac{3}{4}$.



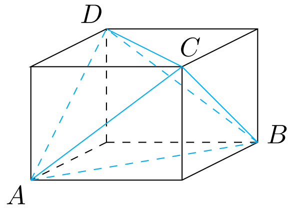
例题 11.8 **(2009 年清华)** 四面体 $ABCD$ 中，$AB=CD$，$AC=BD$，$AD=BC$.

(1) 求证：四面体每个面的三角形为锐角三角形；

(2) 设三个面与底面 BCD 所成的角分别为 α,β,γ，求证：$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1$.

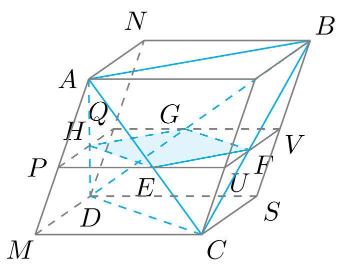
解 *(1) 将四面体补成一个长方体，或由各个面均全等分析所有三面角.*

(2) 利用面积射影定理即得.



例题 11.9 **(2009 年南大)** 在四面体 $ABCD$ 中，平面 Γ 截四面体所得截面为 $EFGH$，AB 到平面 Γ 的距离为 d_1，CD 到平面 Γ 的距离为 d_2，且 $\dfrac{d_1}{d_2}=k$，求立方体图形 $ABEFGH$ 与四面体 $ABCD$ 体积之比（用 k 表示）.

解 如图，将四面体补成平行六面体，然后利用割补法（补三棱锥和三棱台）即可得，体积之比为 $\dfrac{k^3+3k^2}{(k+1)^3}$.



11.3 习题

习题 11.1 (2012 年华约) 正四棱锥 $S-ABCD$ 中，侧棱与底面所成角为 α，侧面与底面所成二面角为 β. 侧棱 SB 与底面正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 所成角为 γ，相邻两侧面所成二面角为 θ，则 $\alpha,\beta,\gamma,\theta$ 之间的大小关系是 (　　)

A. $\alpha<\beta<\theta<\gamma$　　B. $\alpha<\beta<\gamma<\theta$　　C. $\alpha<\gamma<\beta<\theta$　　D. $\beta<\alpha<\gamma<\theta$

习题 11.2 在直角三角形 ABC 中，C 为直角，$BC=3$，$AC=6$，D、E 分别是 AC、AB 上的点，且 $DE\parallel BC$，$DE=2$，将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起到 $\triangle A_1DE$ 的位置，使 $A_1D\perp CD$，则平面 A_1CD 与平面 A_1BE 所成锐角的余弦值为________.

习题 11.3 在长方形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=1$，E 为 DC 中点，F 为线段 EC (端点除外) 上一动点. 现将 $\triangle AFD$ 沿 AF 折起，使平面 ABD 与平面 ABC 垂直. 在平面 ABD 内过点 D 作 $DK\perp AB$，K 为垂足. 设 $AK=t$，则 t 的取值范围是________.

习题 11.4 O 是半径为 1 的球的球心，点 A、B、C 在球面上，OA、OB、OC 两两垂直，E、F 分别是大圆弧 AB 与 AC 的中点，则点 E、F 在该球面上的球面距离是________.

习题 11.5 (2011 年卓越联盟) 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 AA_1 的中点，F 是棱 A_1B_1 上的点，且 $A_1F:FB_1=1:3$，则异面直线 EF 与 BC_1 所成角的正弦值为________.

习题 11.6 (2011 年华约) 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，M,N 分别为 PA,PB 的中点，且侧面与底面所成二面角的正切为 $\sqrt{2}$. 则异面直线 DM 与 AN 所成角的余弦为________.

习题 11.7 (2011 年卓越联盟) 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面边长与侧棱长均等于 2，且 E 为 CC_1 的中点，则点 C_1 到平面 AB_1E 的距离为________.

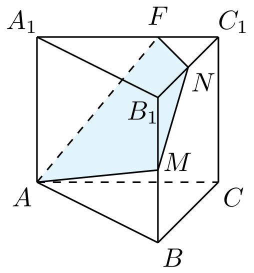
习题 11.8 (2010 年复旦) 设 $ABC-A_1B_1C_1$ 是正三棱柱，底面边长和高都是 1，P 是侧面 ABB_1A_1 的中心点，则 P 到侧面 ACC_1A_1 的对角线的距离是________.

习题 11.9 (2008 年复旦) 在棱长均为 1 的正四面体 $ABCD$ 中，点 M,N 分别是边 AB,CD 的中点，则线段 MN 的长度为________.

习题 11.10 (2010 年清华) 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，B_1,D_1 分别为侧棱 PB,PD 的中点，则四面体 AB_1CD_1 的体积与四棱锥 $P-ABCD$ 的体积之比为________.

习题 11.11 (2000 年复旦) 已知平行六面体的底面是一个菱形且其锐角等于 60°，又过此锐角的侧棱与锐角两边成等角，和底面成 60° 角，则两对角面面积之比为________.

习题 11.12 (2008 年复旦) 在如图所示的三棱柱中，点 A，BB_1 的中点 M，以及 B_1C_1 的中点 N 所决定的平面把三棱柱切割成体积不相同的两部分，问小部分的体积和大部分的体积比为________.



习题 **11.13** 证明：所有棱长均相等的三棱锥和正四棱锥可以拼接成一个三棱柱.

习题 **11.14** (2013 年卓越联盟) 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 底面 ABC，$BC\perp AC$，$BC=AC=2$，$AA_1=3$，D 为棱 AC 的中点.

(1) 证明 $AB_1\parallel$ 平面 BDC_1；

(2) 求直线 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正切值.

习题 **11.15** (2012 年卓越联盟) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是直角梯形，$AD\parallel BC$，$AB\perp BC$，侧面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=AD=AB=1$，$BC=2$.

(1) 证明：平面 $PBC\perp$ 平面 PDC；

(2) 若 $\angle PAB=120^\circ$，求二面角 $B-PD-C$ 的正切值.

11.4 习题参考答案及提示

习题 11.1 B.

习题 11.2 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

习题 11.3 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

习题 11.4 $\dfrac{\pi}{3}$.

习题 11.5 $\dfrac{15}{5}$.

习题 11.6 $\dfrac{1}{6}$.

习题 11.7 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

习题 11.8 $\dfrac{\sqrt{14}}{8}$.

习题 11.9 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

习题 11.10 $\dfrac{1}{4}$.

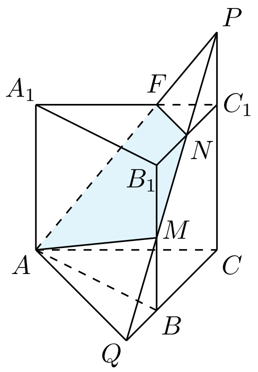
习题 11.11 2． 提示：由 $\dfrac{S_{BDD_1B_1}}{S_{ACC_1A_1}}=\dfrac{D_1D\cdot DB\cdot\sin\angle D_1DB}{AA_1\cdot AC\cdot\sin\angle A_1AC}=\dfrac{DB}{AC}\cdot\dfrac{\sin\angle D_1DB}{\sin\angle A_1AC}$，又

$$\angle A_1AC=60^\circ, AA_1\perp BD,$$

因此 $DD_1\perp BD$，进而 $\angle D_1DB=90^\circ$，于是

$$\frac{S_{BDD_1B_1}}{S_{ACC_1A}}=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2:1.$$

习题 11.12 $\dfrac{13}{23}$． 提示：



习题 11.13 略． 提示：利用三面角定理即得．

习题 11.14 *(1)* 延长 AB,CD，使其相交于点 F，连接 PF．容易知道，AD 为 $\triangle ABC$ 的中位线，于是有 $PA=AF=AB=1$，$\angle FPB=\dfrac{\pi}{2}$，即 $PF\perp PB$．而 $BC\perp AB$，面 $PFB\perp$ 面 ABC 知 $BC\perp$ 面 PFB．而 $PF\subset PFB$，有 $PF\perp BC$，于是 $PF\perp PBC$，于是 $PBC\perp PDC$．

(2) 过点 B 作 $BQ\perp PD$ 交 PD 于 Q，过点 B 作 $BH\perp PC$ 交 PC 于 H．由面 $PBC\perp$ 面 PDC 知 $\angle BQH$ 即为二面角 $B-PD-C$ 的平面角，$\tan\angle PQH=\dfrac{BH}{QH}$．下面来求解 BH,HQ,BQ 的值．

容易知道 $PF=PA=AF=AB=1$，$PB=\sqrt{3}$，$BC=2$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle PBC$ 中容易解得斜边上的高 $BH=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$，进而 $PD=\sqrt{PA^2+AQ^2}=\sqrt{2}$，$PB=\sqrt{3}$，$BD=\sqrt{2}$．

在 $\triangle PBD$ 中容易解得 $BQ=\dfrac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$．而 $\triangle BHQ$ 为直角三角形，于是

$$QH=\sqrt{BQ^2-BH^2}=\frac{3}{2\sqrt{14}},$$

从而 $\tan\angle PQH=\dfrac{BH}{QH}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$．

习题 11.15 *(1)* 连接 B_1C，交 BC_1 于点 E，则 E 为 B_1C 中点．连接 DE，由于 D 为棱 AC 的中点，所以在 $\triangle ACB_1$ 中，$AB_1\parallel DE$，又因为 $DE\subset$ 平面 BDC_1，而且 $AB_1\not\subset$ 平面 BDC_1，所以 $AB_1\parallel$ 平面 BDC_1．

(2) 因为 $AA_1\perp$ 底面 ABC，$CC_1\parallel AA_1$，所以 $CC_1\perp$ 底面 ABC，故 $CC_1\perp AC$．又因 $BC\perp AC$，于是 $AC\perp$ 平面 BCC_1B_1，所以 $\angle AB_1C$ 是直线 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成的角．$\mathrm{Rt}\triangle ACB_1$ 中，$AC=2$，$B_1C=\sqrt{BC^2+BB_1^2}=\sqrt{13}$，于是

$$\tan\angle AB_1C=\frac{AC}{B_1C}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13},$$

所以直线 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正切值为 $\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$．

第十二章　解析几何

1. 线段的定比分点坐标公式

   设 $P_1(x_1,y_1)$ ，$P_2(x_2,y_2)$ ，点 $P(x,y)$ 是直线 P_1P_2 上异于 P_1 ，P_2 的一点，且 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$ ，λ 叫 P 分 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 所成的比，若 O 为平面内任意一点，则 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OP_1}+\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OP_2}$. 由此可得若 P_1,P,P_2 的坐标分别为 (x_1,y_1) ，(x,y) ，(x_2,y_2) ，则

   $$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \end{cases}$$

   其中 $\lambda=\dfrac{x-x_1}{x_2-x}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y}$, 且 $\lambda\neq-1$.

2. 两直线的到角公式与夹角公式

   - 到角公式：l_1 到 l_2 的到角为 θ ，则 $\tan\theta=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ ，$0^\circ\leqslant\theta\leqslant180^\circ$ ，注意 $\theta\neq90^\circ$

   - 夹角公式：l_1 与 l_2 的夹角为 θ ，则 $\tan\theta=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$ ，$0^\circ\leqslant\theta<90^\circ$.

3. 三角形面积坐标公式

   坐标平面内由点 $A(x_1,y_1)$ ，$B(x_2,y_2)$ ，$C(x_3,y_3)$ 围成的三角形 ABC 的面积为

   $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

   特别的，设坐标原点为 O ，那么三角形 OAB 的面积为 $|x_1y_2-x_2y_1|$.

4. 截距坐标公式

   过点 $A(x_1,y_1)$ 和点 $B(x_2,y_2)$ 的直线 AB 的横截距和纵截距分别为

   $$\frac{x_1y_2-x_2y_1}{y_2-y_1},\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}.$$

5. 圆锥曲线的切线方程

   设 $P(x_0,y_0)$ 是圆锥曲线 C 上的一点，曲线 C 在点 P 处的切线 l 的方程为

(a) 当 C 为圆 $x^2+y^2=r^2$ 时，切线 l 的方程为 $x_0x+y_0y=r^2$；

(b) 当 C 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(\,a\neq b\,)$ 时，切线 l 的方程为 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$；

(c) 当 C 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 时，切线 l 的方程为 $\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$；

(d) 当 C 为双曲线 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ 时，切线 l 的方程为 $\dfrac{y_0y}{a^2}-\dfrac{x_0x}{b^2}=1$；

(e) 当 C 为抛物线 $y^2=2px\,(\,p\neq 0\,)$ 时，切线 l 的方程为 $y_0y=p(x+x_0)$；

(f) 当 C 为抛物线 $x^2=2py\,(\,p\neq 0\,)$ 时，切线 l 的方程为 $x_0x=p(y+y_0)$；

(g) 一般的，当 C 为 $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ 时，切线 l 的方程为

$$Ax_0x+By_0y+\frac{1}{2}D(x+x_0)+\frac{1}{2}E(y+y_0)+F=0,$$

即[1]

$$\left(Ax_0+\frac{1}{2}D\right)x+\left(By_0+\frac{1}{2}E\right)y+\frac{1}{2}Dx_0+\frac{1}{2}Ey_0+F=0.$$

6. 圆锥曲线第二定义

平面内到一个定点 F 的距离和到一条定直线 $l\,(\,F$ 不在 l 上) 的距离的比等于常数 e 的点的轨迹．当 $0<e<1$ 时，它表示椭圆；当 $e>1$ 时，它表示双曲线；当 $e=1$ 时，它表示抛物线．

(a) 椭圆

- 第一定义：与两个定点的距离的和等于常数
- 标准方程：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 或 $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$
- 准线：$x=\pm\dfrac{a^2}{c}$ 或 $y=\pm\dfrac{a^2}{c}$
- 焦半径：$|PF_1|=a+ex_0,|PF_2|=a-ex_0$ 或 $|PF_1|=a+ey_0,|PF_2|=a-ey_0$

(b) 双曲线

- 第一定义：与两个定点的距离的差的绝对值等于常数
- 标准方程：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 或 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$
- 准线：$x=\pm\dfrac{a^2}{c}$ 或 $y=\pm\dfrac{a^2}{c}$
- 焦半径：$|PF_1|=-ex_0-a,|PF_2|=-ex_0+a$ 或 $|PF_1|=-ey_0-a,|PF_2|=-ey_0+a$

(c) 抛物线

- 第一定义：与一个定点和一条定直线的距离相等
- 标准方程：$y^2=2px$ 或 $x^2=2py$
- 准线：$x=-\dfrac{p}{2}$ 或 $y=-\dfrac{p}{2}$
- 焦半径：$|PF|=x_0+\dfrac{p}{2}$ 或 $|PF|=y_0+\dfrac{p}{2}$

[1] 也即，圆锥曲线的切线方程可以通过对圆锥曲线的方程进行“改写”得到．首先，将 x^2 改写为 $x\cdot x$，将 y^2 改写为 $y\cdot y$，将单独的 x 改写为 $\dfrac{1}{2}(x+x)$，将单独的 y 改写为 $\dfrac{1}{2}(y+y)$；然后将成对出现的 x,y 中的某一个对应改为切点的横坐标及纵坐标即得．

7. 韦达定理

对二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0$ 而言：

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a},\qquad |x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|},\qquad b^2=\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}+2\right)ac,$$

其中 $\lambda=\dfrac{x_1}{x_2}$.

8. 等效判别式

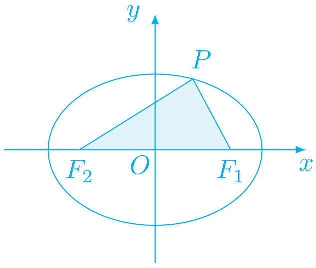
对椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 和双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ ，以及直线 $Ax+By+C=0$ 而言，有

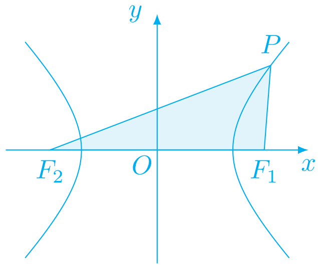
$$\Delta_0=a^2A^2+b^2B^2-C^2,\Delta_x=C^2-\left(a^2A^2-b^2B^2\right).$$

9. 焦点三角形面积公式[1]

椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 P 与两焦点 F_1,F_2 形成的夹角 $\angle F_1PF_2=\theta$ ，则三角形 F_1PF_2 的面积为 $b^2\tan\dfrac{\theta}{2}$ ；

双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 P 与两焦点 F_1,F_2 形成的夹角 $\angle F_1PF_2=\theta$ ，则三角形 F_1PF_2 的面积为 $b^2\cot\dfrac{\theta}{2}$.





10. 椭圆的参数方程

设 $A(a\cos 2\alpha,b\sin 2\alpha)$ ， $B(a\cos 2\beta,b\sin 2\beta)$ ，则直线 AB 的方程为

$$y=-\frac{b}{c}\cdot\frac{1}{\tan(\alpha+\beta)}x+b\cdot\frac{1+\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta},$$

特别的，如果直线 AB 过点 $(m,0)$ ，那么有

$$\tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{m-a}{m+a}.$$

11. 一般圆锥曲线的“垂径定理”

一般圆锥曲线 (除抛物线外) 的弦与其中点和中心的连线的斜率之积为 e^2-1 .

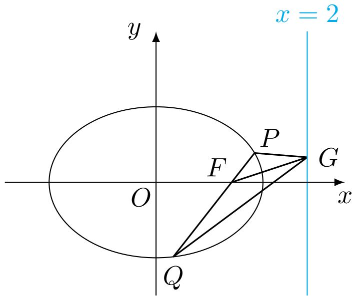
12. 交点曲线系对于曲线 $F:f(x,y)=0$ 和 $G:g(x,y)=0$ ，曲线系 $f(x,y)+\lambda g(x,y)=0\,(\lambda\in\mathbb{R})$ 恒过 F 与 G 的所有交点，这种曲线系称为交点曲线系数，适合处理三曲线共点的问题.

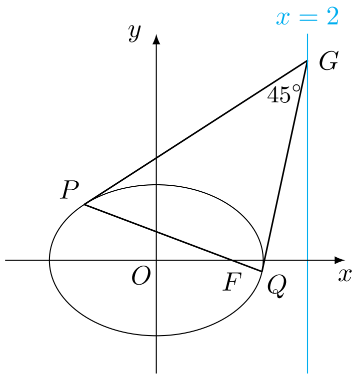
[1]2015 年北大夏令营中有证明椭圆的焦半径公式的试题

例题 12.1 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F，过 F 的直线交椭圆与 P,Q 两点.

(1) 设 G 为直线 l 上的任意一点，直线 PG,FG,QG 的斜率分别为 k_1,k_2,k_3，求证：k_1,k_2,k_3 成等差数列；

(2) 设 $H\left(2,\sqrt{7}\right)$ 为直线 $l:x=2$ 上一点，若 $\overrightarrow{HP}$ 与 $\overrightarrow{HQ}$ 的夹角为 45°，求直线 PQ 的斜率[1].





解 *(1)* 略；*(2)* 可以直接利用到角公式计算，下面给出利用 *(1)* 的作法.

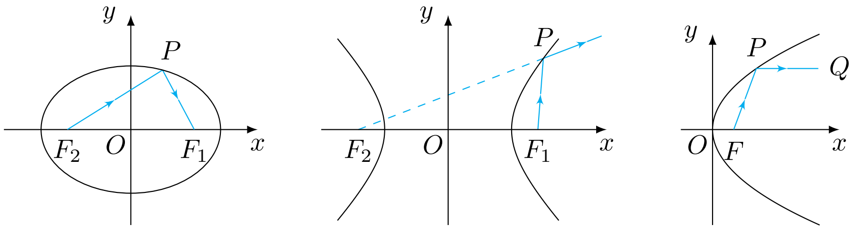
设直线 HP,HQ 的斜率分别为 k_1,k_2，则根据题意有
$$\left|\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|=1,\ \text{即}\ (k_1+k_2)^2-4k_1k_2=(k_1k_2+1)^2,$$
根据第 *(1)* 小题结论有 $k_1+k_2=2\sqrt{7}$，由以上两方程可得
$$(k_1k_2)^2+6\cdot k_1k_2-27=0,$$
从而
$$k_1k_2=3\ \text{且}\ k_1k_2=-9,$$
显然 $k_1,k_2>0$，因此 $k_1k_2=3$.

设过点 H 的直线方程为 $y-\sqrt{7}=k(x-2)$，则根据等效判别式，可得该直线与椭圆 E 相切即
$$2k^2+1-(-2k+\sqrt{7})^2=0,\ \text{即}\ k^2-2\sqrt{7}k+3=0.$$
因此 k_1,k_2 是该方程的两个根，也即直线 HP,HQ 均为椭圆的切线，而直线 PQ 为点 H 对应的极线为 $x+\sqrt{7}y=1$，因此直线 PQ 的斜率为 $-\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

12.1 第一定义、光学性质与切线

例题 12.2 分别利用椭圆、双曲线和抛物线的第一定义证明它们的光学性质.

[1]本题的一般结论为从准线上一点看椭圆的张角 θ 满足 $\tan\theta=\dfrac{2e}{(1-e^2)\sqrt{1+m^2}}$，其中 m 为该点对应的极线斜率之倒数

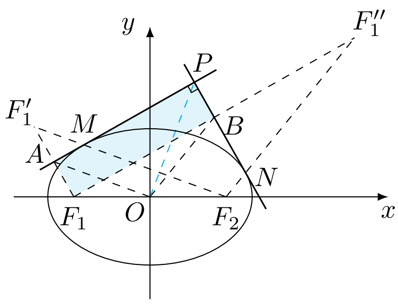


解 略.

例题 12.3 (2004 年交大，2014 年广东高考) 对于两条互相垂直的直线和一个椭圆，已知椭圆无论如何滑动都与两条直线相切，求椭圆中心的轨迹.

解 光学性质

设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$. 如图，设两个切点分别 M,N，作椭圆的左焦点 F_1 关于两条切线 PM,PN 的对称点，分别为 F_1',F_1''，连接 $F_1F_1',F_1F_1'',F_2F_1',F_2F_1''$，$A,B$ 分别为线段 F_1F_1',F_1F_1'' 的中点，连接 OA,OB,OP.



根据椭圆的光学性质，F_2,M,F_1' 以及 F_2,N,F_1'' 均三点共线，因此 $|OA|=|OB|=a$. 由于四边形 $APBF_1$ 为矩形，因此[1] $|OP|^2+|OF_1|^2=|OA|^2+|OB|^2$，即 $|OP|^2=2a^2-c^2=a^2+b^2$，从而点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2=a^2+b^2$.

等效判别式

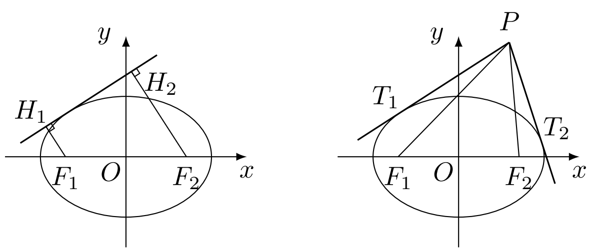
设 $P(x_0,y_0)$，切线为 $y-y_0=k(x-x_0)$，用等效判别式得到关于 k 的二次方程，韦达定理即得.

切线方程 设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$，则 $\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=-\dfrac{b^4}{a^4}$，将直线 AB 的方程与椭圆方程化齐次联立即得.

例题 12.4 (2006 年北大) F_1,F_2 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点.

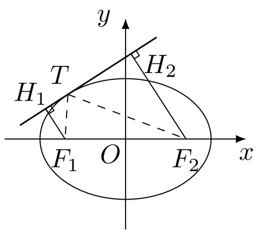
(1) 设 l 是该椭圆的一条切线，H_1,H_2 分别是 F_1,F_2 在 l 上的垂足，证明：$F_1H_1\cdot F_2H_2=b^2$.

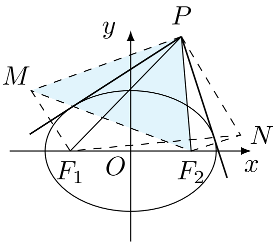
(2) 设 l_1,l_2 是该椭圆过椭圆外的一点 P 的两条切线，切点分别为 T_1,T_2，证明：$\angle F_1PT_1=\angle F_2PT_2$.



[1]矩形的性质：矩形所在的平面上一点到矩形的两条对角线的端点的距离的平方和相等

解 (1) 如图，连接 F_1T, F_2T，设 $\angle F_1TF_2=\theta$，$F_1T=m$，$F_2T=n$．





根据题意，有

$$F_1H\cdot F_2H=\sin^2\frac{\pi-\theta}{2}\cdot mn=\frac{1+\cos\theta}{2}\cdot mn=\frac{1+\dfrac{m^2+n^2-4c^2}{2mn}}{2}\cdot mn=\frac{(m+n)^2-4c^2}{4}=b^2,$$

于是原命题得证．

(2) 如图，作 F_1,F_2 分别关于切线 PT_1,PT_2 对称的点 M,N．根据椭圆的光学性质得

$$PM=PF_1, PF_2=PN, MF_2=F_1N=2a,$$

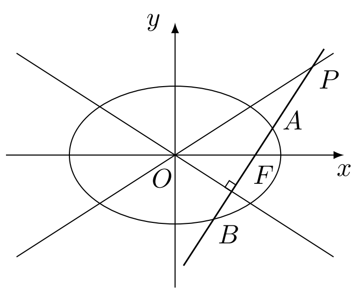
所以 $\triangle PMF_2$ 与 $\triangle PF_1N$ 全等．于是 $\angle MPF_2=\angle F_1PN$，从而

$$\angle MPF_1=\angle F_2PN,\text{ 也即 }2\angle F_1PT_1=2\angle F_2PT_2,$$

因此 $\angle F_1PT_1=\angle F_2PT_2$，原命题得证．

12.2 第二定义与极坐标方程

例题 12.5 已知椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的两条渐近线为 l_1,l_2，过椭圆 C 的右焦点 F 作直线 l，使 $l\perp l_1$，又 l 与 l_2 交于点 P，设 l 与椭圆 C 的两个交点从上至下依次是 A,B，求 $\dfrac{|FA|}{|AP|}$ 的最大值．



解 直线 $l_2: y=\dfrac{b}{a}x$，直线 $AB: y=\dfrac{a}{b}(x-c)$，于是 $x_P=\dfrac{a^2}{c}$．注意到 P 在右准线上，设 A 到右准线的距离为 d，则 $|AF|=\dfrac{c}{a}\cdot d$，于是

$$\frac{|AF|}{|AP|}=\frac{c}{a}\cdot\frac{d}{|AP|}=\frac{c}{a}\cdot\cos\theta,$$

其中 $\theta=\angle AFx$，$\tan\theta=\dfrac{a}{b}$，于是

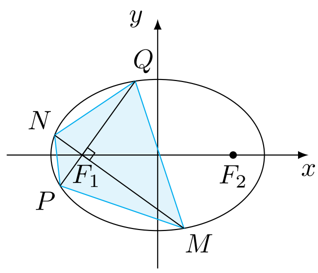
$$\begin{aligned}\frac{|AF|}{|AP|}&=\frac{c}{a}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{\frac{\left(a^2-b^2\right)b^2}{a^2\left(a^2+b^2\right)}}=\sqrt{\frac{x-1}{x^2+x}}\\&=\sqrt{\frac{t}{(t+1)^2+(t+1)}}=\sqrt{\frac{1}{t+\dfrac{2}{t}+3}}\\&\leqslant\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}+3}}=\sqrt{2}-1,\end{aligned}$$

其中 $x=\dfrac{a^2}{b^2}$，$t=x-1$，等号当且仅当 $t=\sqrt{2}$，$x=1+\sqrt{2}$，$a^2=\left(\sqrt{2}+1\right)b^2$，即离心率为 $2-\sqrt{2}$ 时取得．于是 $\dfrac{|FA|}{|AP|}$ 的最大值为 $\sqrt{2}-1$．

例题 12.6 已知椭圆的两个焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，且椭圆与直线 $y=x-\sqrt{3}$ 相切．

(1) 求椭圆的方程；

(2) 过 F_1 作两条互相垂直的直线 l_1,l_2，与椭圆分别交于 P,Q,M,N，求四边形 $PNQM$ 面积的最大值与最小值．



解　(1) 设椭圆为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，则

$$\begin{cases}a^2+b^2=3\\a^2-b^2=1\end{cases}，解得\begin{cases}a^2=2,\\b^2=1,\end{cases}$$

于是椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$；

(2) 根据焦点弦长公式

$$l=\frac{2ab^2}{b^2+c^2\sin^2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{1+\sin^2\alpha},$$

设 l_1,l_2 与焦点连线所成角分别为 $\theta,\theta+\dfrac{\pi}{2}$，$\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$S_{PNQM}=\frac{1}{2}|PQ|\cdot|MN|=\frac{4}{\left(1+\sin^2\theta\right)\left(1+\cos^2\theta\right)}=\frac{4}{2+\dfrac{1}{4}\sin^2 2\theta},$$

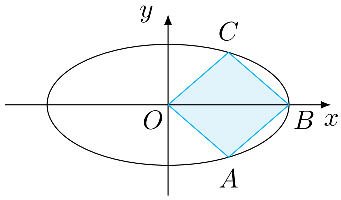
由于 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin^2 2\theta\in[0,1]$，于是 S_{PNQM} 的最大值为 $\dfrac{4}{2}=2$，最小值为 $\dfrac{4}{2+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{16}{9}$.

12.3 第三定义与垂径定理

例题 12.7 **(2013 年北京高考)** 已知 A,B,C 是椭圆 $E:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的三个点，O 为坐标原点.

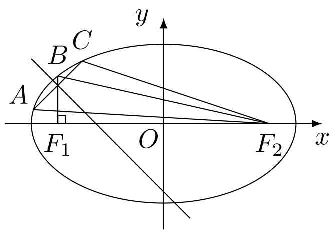
(1) 当 B 是 E 的右顶点，且四边形 $OABC$ 为菱形时，求此菱形的面积；

(2) 当点 B 不是 E 的顶点时，判断四边形 $OABC$ 是否可能是菱形[1]，并说明理由.



解 *(1)* $\sqrt{3}$. *(2)* 不可能，由椭圆的“垂径定理”可得对角线互相平分时不可能垂直.

例题 12.8 已知某椭圆的焦点是 $F_1(-4,0)$，$F_2(4,0)$，过点 F_2 并垂直于 x 轴的直线与椭圆的一个交点为 B，且 $|F_1B|+|F_2B|=10$. 椭圆上不同的两点 $A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$ 满足条件：$|F_2A|,|F_2B|,|F_2C|$ 成等差数列.



(1) 求该椭圆的方程；

(2) 求弦 AC 中点的横坐标；

(3) 设弦 AC 的垂直平分线的方程为 $y=kx+m$，求 m 的取值范围[2].

解 *(1)* $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$；

(2) 由椭圆的焦半径公式以及椭圆的通径长公式

$$(a+ex_1)+(a+ex_2)=2\cdot\frac{b^2}{a}$$

不难得到 $x_1+x_2=8$. 于是弦 AC 中点 $M(x_0,y_0)$ 的横坐标 $x_0=4$；

(3) 由椭圆的垂径定理，得 $k_{AC}\cdot k_{OM}=-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{9}{25}$，根据题意又有 $k\cdot k_{AC}=-1$. 两式相除，得

$$k=\frac{25}{9}\cdot k_{OM}=\frac{25y_0}{36}.$$

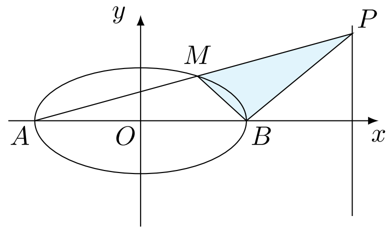
---

[1] 可以思考四边形 $OABC$ 是否可能为矩形. 当 $a^2>3b^2$ 时，四边形 $OABC$ 可能为矩形

[2] 顺便指出，弦 AC 的垂直平分线过 x 轴上的定点

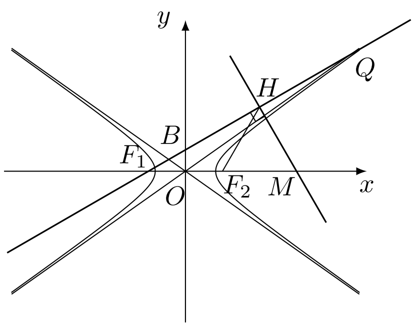
另一方面，由于 M 在弦 AC 的垂直平分线上，于是 $m=y_0-4k=-\dfrac{16y_0}{9}$. 因为 y_0 的取值范围为 $\left(-\dfrac{9}{5},\dfrac{9}{5}\right)$，因此 m 的取值范围是 $\left(-\dfrac{16}{5},\dfrac{16}{5}\right)$.

例题 12.9 设 A,B 分别为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右顶点，设 $P(4,a)$，$a\neq 0$，若直线 AP 与椭圆相交于异于 A 的点 M，证明：ΔMBP 为钝角三角形.



解 由题意，$k_{PA}=\dfrac{a}{6}$，$k_{PB}=\dfrac{a}{2}$. 注意到 $k_{MA}\cdot k_{MB}=-\dfrac{3}{4}$，于是 $k_{BM}=-\dfrac{9}{2a}$，而 $k_{BN}=k_{PB}=\dfrac{a}{2}$. 因此 $\overrightarrow{BM}$，$\overrightarrow{BN}$ 方向上的方向向量分别为 $\left(1,-\dfrac{9}{2a}\right)$，$\left(1,\dfrac{a}{2}\right)$. 它们的数量积为 $1-\dfrac{9}{4}<0$，因此原命题得证.

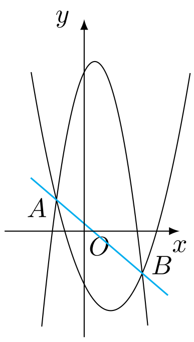
例题 12.10 **(2012 年浙江高考)** F_1,F_2 分别是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左、右焦点，B 是虚轴的端点，直线 F_1B 与 C 的两条渐近线分别交于 P,Q 两点，线段 PQ 的垂直平分线与 x 轴交于点 M . 若 $|MF_2|=|F_1F_2|$，求 C 的离心率.



解 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. 应用双曲线的渐近线的“垂径定理”.

12.4 交点曲线系

例题 12.11 **(2011 年北约)** 求过抛物线 $y=2x^2-2x-1$，$y=-5x^2+2x+3$ 的两个交点的直线方程.

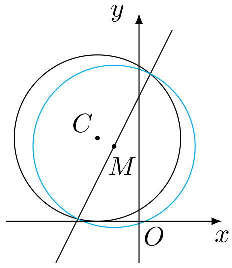


解 $F(x,y)=2x^2-2x-1-y$，$G(x,y)=-5x^2+2x+3-y$，过 F 与 G 交点的曲线系设为 $\lambda_1 F+\lambda_2 F=0$，则取 $\lambda_1=5,\lambda_2=2$，即得直线方程：

$$5\left(2x^2-2x-1-y\right)+2\left(-5x^2+2x+3-y\right)=0,$$

即 $-6x+1-7y=0$，也即 $6x+7y-1=0$．

例题 12.12 **(2008 年南大)** 过直线 $2x-y+3=0$ 和圆 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 的交点且面积最小的圆的方程为________.



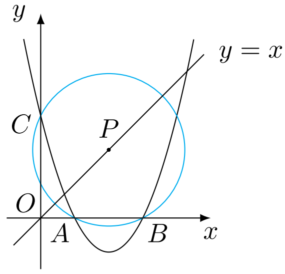
解 设圆的方程为 $x^2+y^2+2x-4y+1+\lambda(2x-y+3)=0$，则

$$(x+1+\lambda)^2+\left(y-2-\frac{\lambda}{2}\right)^2=(1+\lambda)^2+\left(2+\frac{\lambda}{2}\right)^2-1-3\lambda,$$

显然当圆心 $M\left(\lambda+1,2+\dfrac{\lambda}{2}\right)$ 在直线 $2x-y+3=0$ 上时，直径最小 (或对右边配方)，从而 $\lambda=-\dfrac{2}{5}$，于是圆的方程为

$$\left(x+\frac{3}{5}\right)^2+\left(y-\frac{9}{5}\right)^2=\frac{19}{5}.$$

例题 12.13 **(2013 年北大夏令营)** 函数 $y=x^2+ax+b$ 与坐标轴交于三个不同的点 A,B,C，已知 $\triangle ABC$ 的外心 P 在直线 $y=x$ 上，求 $a+b$ 的值.



解 三角形 ABC 的外接圆方程为

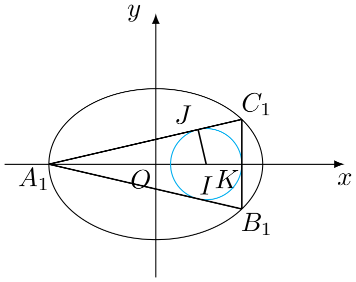
$$(x^2+ax+b-y)+y(y-b)=0,$$

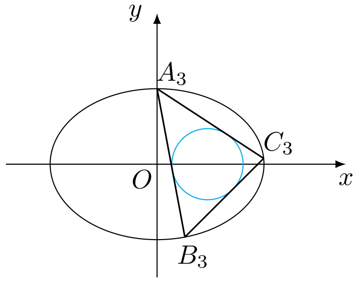
根据题意，有 $-\dfrac{a}{2}=\dfrac{b+1}{2}$，因此 $a+b=-1$．

例题 12.14 推导圆锥曲线的切线方程.

解 略.

例题 12.15 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. 设 A_2 为椭圆的右顶点，A_3 为椭圆的上顶点. 圆 $I:\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+y^2=r^2$ 是椭圆 E 的内接三角形 $A_1B_1C_1$ 的内切圆，过 A_3 作圆 I 的两条切线分别交椭圆于 B_3C_3 . 求 r 的值并证明直线 B_3C_3 与圆 I 相切.





解 设 $C_1(n+r,y)$ ，其中 $n=\dfrac{2}{3}$ ，则由 $\dfrac{IJ}{A_1J}=\dfrac{C_1K}{A_1K}$ 得

$$\frac{r}{\sqrt{\left(\sqrt{2}+n\right)^2-r^2}}=\frac{y}{\sqrt{2}+n+r},$$

所以

$$y=\frac{r\cdot\sqrt{(\sqrt{2}+n)+r}}{\sqrt{(\sqrt{2}+n)-r}},$$

又由

$$\frac{(n+r)^2}{2}+y^2=1,$$

得

$$y=\frac{\sqrt{\sqrt{2}-(n+r)}\cdot\sqrt{\sqrt{2}+(n+r)}}{\sqrt{2}},$$

由以上两式得

$$\frac{r}{\sqrt{(\sqrt{2}+n)-r}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{2}-n)-r}}{\sqrt{2}},$$

整理得

$$r^2+2\sqrt{2}r-2+n^2=0,$$

于是解得 $r=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

设圆 I 的过点 A_3 的切线为 $y=kx+1$ ，即

$$kx-y+1=0,$$

则 A_3B_3,A_3C_3 的斜率 k_1,k_2 是方程

$$\frac{\left|\dfrac{2}{3}k+1\right|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}\ \text{即}\ 2k^2+12k+7=0$$

的根，于是 $k_1+k_2=-6, k_1k_2=\dfrac{7}{2}$.

两切线方程为

$$(y-k_1x-1)(y-k_2x-1)=0,$$

即

$$(y-1)^2-x(y-1)(k_1+k_2)+k_1k_2x^2=0,\text{ 即 } -\frac{7}{2}x^2=(y-1)(y-1+6x).$$

将椭圆方程变形为

$$-\frac{x^2}{2}=(y-1)(y+1),$$

将以上两式联立（即相除）得直线 B_3C_3 的方程

$$7=\frac{y-1+6x}{y+1},\text{ 即 } 3x-3y-4=0,$$

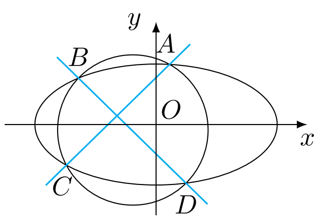
因此圆心 $I\left(\dfrac{2}{3},0\right)$ 到直线 B_3C_3 的距离

$$d=\frac{\left|3\times\dfrac{2}{3}-4\right|}{\sqrt{3^2+(-3)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{3},$$

与半径 r 相等，因此直线 B_3C_3 与圆 I 相切，命题得证[1].

12.5 参数方程

例题 12.16 已知两条相交直线的交点不在椭圆上，求证：这两条直线和椭圆的公共点共圆的充要条件是两条直线的平分线与椭圆的对称轴平行（或重合）.

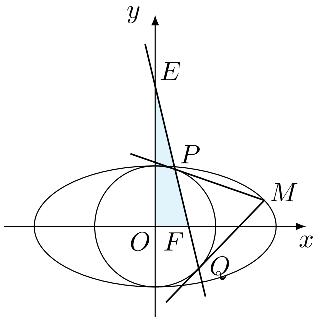


解 利用相交弦定理证明，或用交点曲线系证明[2].

例题 12.17 (2014 年华约) 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，圆 $x^2+y^2=b^2$，过椭圆上的动点 M 作圆的两条切线，切点分别为 P,Q，直线 PQ 与坐标轴的交点为 E,F，求 $\triangle EOF$ 面积的最小值.

[1] 此题的背景为圆锥曲线的彭赛列闭合性质

[2] 该结论对双曲线和抛物线同样成立



解 设 $M(a\cos\theta, b\sin\theta)$，则 $PQ: xa\cos\theta + yb\sin\theta = b^2$，即

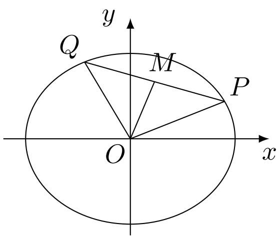
$$\frac{x}{\frac{b^2}{a\cos\theta}} + \frac{y}{\frac{b}{\sin\theta}} = 1,$$

于是

$$S_{\triangle EOF} = \left|\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{a\cos\theta}\cdot\frac{b}{\sin\theta}\right| = \frac{b^3}{a}\cdot\frac{1}{|\sin 2\theta|} \geqslant \frac{b^3}{a},$$

等号当且仅当 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ 时取得，因此 $\triangle EOF$ 面积的最小值为 $\dfrac{b^3}{a}$.

例题 12.18 **(2011 年山东高考)** 已知动直线 l 与椭圆 $C: \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ 交于 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$ 两个不同点，且 $\triangle OPQ$ 的面积 $S_{\triangle OPQ} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$，其中 O 为坐标原点.



(1) 证明：$x_1^2 + x_2^2$ 和 $y_1^2 + y_2^2$ 均为定值;

(2) 设线段 PQ 的中点为 M，求 $OM \cdot PQ$ 的最大值;

(3) 椭圆 C 上是否存在三点 D, E, G，使得 $S_{\triangle ODE} = S_{\triangle ODG} = S_{\triangle OEG} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$？若存在，判断 $\triangle DEG$ 的形状；若不存在，请说明理由.

解 参数方程解法

设 $P\left(\sqrt{3}\cos\alpha, \sqrt{2}\sin\alpha\right)$，$Q\left(\sqrt{3}\cos\beta, \sqrt{2}\sin\beta\right)$ 则由三角形的面积坐标公式，结合 $S_{\triangle OPQ} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 可得

$$\frac{1}{2}\left|\sqrt{3}\cos\alpha\cdot\sqrt{2}\sin\beta - \sqrt{2}\sin\alpha\cdot\sqrt{3}\cos\beta\right| = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

化简得 $\sin(\alpha-\beta) = \pm 1$. 考虑到 P、Q 的对称性，不妨设 $\beta = \alpha + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}$，于是有

$$\sin\beta = \cos\alpha, \cos\beta = -\sin\alpha.$$

(1) 根据上述推导，有

$$x_1^2+x_2^2=\left(\sqrt{3}\cos\alpha\right)^2+\left(\sqrt{3}\cos\beta\right)^2=3, y_1^2+y_2^2=\left(\sqrt{2}\sin\alpha\right)^2+\left(\sqrt{2}\sin\beta\right)^2=2,$$

因此命题得证.

(2) 根据上述推导，有 $M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\cos\alpha+\cos\beta),\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)\right)$，从而

$$OM^2=\frac{3}{4}(\cos\alpha+\cos\beta)^2+\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)^2=\frac{3}{4}(\cos\alpha-\sin\alpha)^2+\frac{1}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{1}{4}(5-\sin 2\alpha),$$

而

$$PQ^2=3(\cos\alpha-\cos\beta)^2+2(\sin\alpha-\sin\beta)^2=3(\cos\alpha+\sin\alpha)^2+2(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=5+\sin 2\alpha,$$

于是

$$OM\cdot PQ=\frac{1}{2}\sqrt{25-\sin^2 2\alpha}\leqslant\frac{5}{2},$$

等号当 $\alpha=0$ 时取得. 因此 $OM\cdot PQ$ 的最大值为 $\dfrac{5}{2}$. *(3)* 不存在. 因为不存在 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$，使得

$$|\sin(\alpha-\beta)|=1, |\sin(\beta-\gamma)|=1, |\sin(\gamma-\alpha)|=1$$

同时成立.

仿射变换解法

利用仿射变换 $\begin{cases}x'=x,\\ y'=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}y\end{cases}$ 将椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 拉伸成为圆 $x'^2+y'^2=3$，此时

$$S_{\triangle OP'Q'}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot S_{\triangle OPQ}=\frac{3}{2},$$

于是可知三角形 $OP'Q'$ 是以 $P'Q'$ 为斜边的直角三角形.

(1) 注意到 $P'\left(x_1,\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}y_1\right)$，$Q'\left(x_2,\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}y_2\right)$，且 $OP'\perp OQ'$，于是有

$$x_1^2+x_2^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}y_1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}y_2\right)^2=3,$$

进而可得

$$x_1^2+x_2^2=3, y_1^2+y_2^2=2$$

均为定值，命题得证.

(2) 当直线 OM 与直线 PQ 的斜率均存在时，设直线 OM 的斜率为 k，则根据椭圆的“垂径定理”，可

得直线 PQ 的斜率为 $-\dfrac{2}{3k}$，于是根据弦长公式，可得

$$\begin{aligned}OM\cdot PQ&=\frac{\sqrt{1+k_{OM}^2}}{\sqrt{1+k_{OM'}^2}}\cdot OM'\cdot\frac{\sqrt{1+k_{PQ}^2}}{\sqrt{1+k_{P'Q'}^2}}\cdot P'Q'\\&=\frac{\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1+\frac{3}{2}k^2}}\cdot OM'\cdot\frac{\sqrt{1+\left(-\dfrac{2}{3k}\right)^2}}{\sqrt{1+\frac{3}{2}\left(-\dfrac{2}{3k}\right)^2}}\cdot P'Q'\\&=\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{1}{9(t+2)}}\cdot OM'\cdot P'Q',\end{aligned}$$

其中 $t=\dfrac{3}{2}k^2+\dfrac{2}{3k^2}$．注意到 $\dfrac{1}{2}OM'\cdot P'Q'=S_{\triangle OP'Q'}=\dfrac{3}{2}$，于是 $OM'\cdot P'Q'=3$，又 $t=\dfrac{3}{2}k^2+\dfrac{2}{3k^2}\geqslant 2$，等号当 $k^2=\dfrac{2}{3}$ 时取得，因此有

$$OM\cdot PQ=3\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{1}{9(t+2)}}\leqslant\frac{5}{2},$$

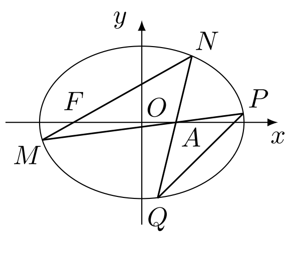
等号当 $k^2=\dfrac{2}{3}$ 时取得．当直线 OM 或直线 PQ 的斜率不存在时，可计算得

$$OM\cdot OQ=\sqrt{6}<\frac{5}{2}.$$

综上，所求最大值为 $\dfrac{5}{2}$．

(3) 由于圆 $x'^2+y'^2=3$ 上的任意三点 D'、E'、G' 的连线 $D'E'$、$E'G'$、$D'G'$ 对圆心 O 的张角不可能同时为直角，于是符合题意的三点 D、E、G 不存在．

例题 12.19 已知 MN 是过椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的左焦点 F 的直线（M,N 在椭圆上），$A(1,0)$ 是椭圆长轴上的一个定点．直线 MA,NA 分别交椭圆于 P,Q，求证：直线 PQ 与直线 MN 的斜率之比为定值．



解　参数方程解法

首先对椭圆的参数方程，有以下常用引理．

设点 $A(a\cos 2\alpha, b\sin 2\alpha)$，$B(b\cos 2\beta, b\sin 2\beta)$，则直线 AB 的方程为

$$AB: y=-\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\tan(\alpha+\beta)}x+b\cdot\frac{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta},$$

特别的，若直线 AB 过点 $(m,0)$，那么有

$$\tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{m-a}{m+a}.$$

由此引理，很容易证明并推广本题结论.

普通方程解法

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$P(x_3,y_3)$，$Q(x_4,y_4)$. 由 M,F,N 三点共线，有 $\dfrac{y_1}{x_1+2}=\dfrac{y_2}{x_2+2}$，化简得

$$x_1y_2-x_2y_1=2(y_2-y_1).$$

直线 MA 的方程为 $MA:x=\dfrac{x_1-1}{y_1}y+1$，代入椭圆方程中得

$$\frac{5(x_1-1)^2+9y_1^2}{y_1^2}\cdot y^2+\frac{10(x_1-1)}{y_1}\cdot y-40=0,$$

将 $9y_1^2=45-5x_1^2$ 代入，有

$$\frac{5-x_1}{y_1^2}\cdot y^2+\frac{x_1-1}{y_1}\cdot y-4=0,$$

从而 $y_1\cdot y_3=\dfrac{4y_1}{x_1-5}$，于是 $y_3=\dfrac{4y_1}{x_1-5}$. 将 y_3 代入直线 MA 的方程，有 $x_3=\dfrac{5x_1-9}{x_1-5}$.

同理可得

$$x_4=\frac{5x_2-9}{x_2-5},y_4=\frac{4y_2}{x_2-5}.$$

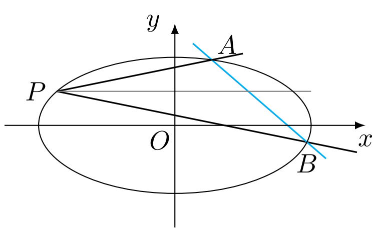
因此直线 PQ 的斜率为

$$\frac{\dfrac{4y_1}{x_1-5}-\dfrac{4y_2}{x_2-5}}{\dfrac{5x_1-9}{x_1-5}-\dfrac{5x_2-9}{x_2-5}}=\frac{-20(y_1-y_2)-4(x_1y_2-x_2y_1)}{-16(x_1-x_2)},$$

将之前的结果代入，即得直线 PQ 与直线 MN 的斜率之比为 $\dfrac{7}{4}$ 是定值.

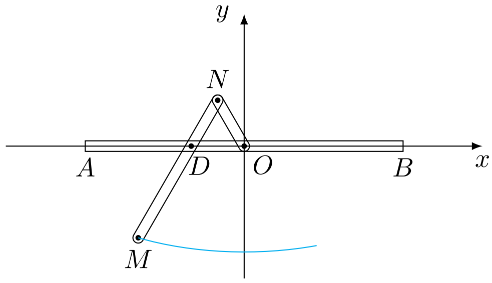
12.6 仿射变换

例题 12.20 过椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的一定点 $P(x_0,y_0)(y_0>0)$，作两条直线分别交椭圆于不同于 P 的点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$. 若 PA 与 PB 的斜率存在且倾斜角互补，证明：直线 AB 的斜率是常数.



解 利用仿射变换即得常数为 $\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$.

例题 12.21 **(2015 年湖南高考)** 一种作图工具如图所示. O 是滑槽 AB 的中点, 短杆 ON 可绕 O 转动, 长杆 MN 通过 N 处铰链与 ON 连接, MN 上的栓子 D 可沿滑槽 AB 滑动, 且 $DN=ON=1$, $MN=3$. 当栓子 D 在滑槽 AB 内作往复运动时, 带动 N 绕 O 转动一周 (D 不动时, N 也不动), M 处的笔尖画出的曲线记为 C. 以 O 为原点, AB 所在的直线为 x 轴建立平面直角坐标系.



(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 设动直线 l 与两定直线 $l_1:x-2y=0$ 和 $l_2:x+2y=0$ 分别交于 P、Q 两点. 若直线 l 总与曲线 C 有且只有一个公共点, 试探究: $\triangle OPQ$ 的面积是否存在最小值? 若存在, 求出该最小值; 若不存在, 说明理由.

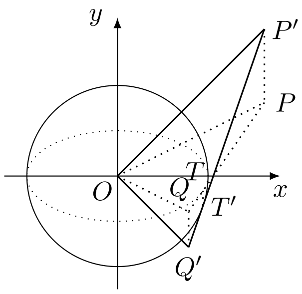
解 *(1)* 设 $N(\cos\theta,\sin\theta)$, 则 $D(2\cos\theta,0)$, 于是由 $\overrightarrow{NM}=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{MD}$ 得

$$M\left(\frac{x_N-\frac{3}{2}x_D}{1-\frac{3}{2}},\frac{y_N-\frac{3}{2}y_D}{1-\frac{3}{2}}\right),\text{ 即 } M(4\cos\theta,-2\sin\theta),$$

于是可得曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

(2) 存在最小值, 最小值为 8. 证明如下:

在伸缩变换 $x'=x$, $y'=2y$ 下, 椭圆 C 变为圆 $x'^2+y'^2=16$. 在变换后直线 l_1' 和 l_2' 则变为互相垂直的直线 $x'-y'=0$ 和 $x'+y'=0$, 记切点 T 变换后的点为 T', 则 $P'Q'$ 与圆相切于 T', 如图.



从而变换后的三角形 $OP'Q'$ 的面积

$$S_{\triangle OP'Q'}=\frac{1}{2}OT'\cdot P'Q'=2(P'T'+Q'T')\geqslant 4\sqrt{P'T'\cdot Q'T'}=4OT'=16,$$

等号当 $P'T'=Q'T'$ 时取得．因此 $\triangle OPQ$ 的面积

$$S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}S_{\triangle OP'Q'}\geqslant 8,$$

于是其最小值存在，且为 8．

例题 12.22 **(2015 年山东高考)** 平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，左、右焦点分别是 F_1,F_2．以 F_1 为圆心，以 3 为半径的圆与以 F_2 为圆心，以 1 为半径的圆相交，且交点在椭圆 C 上．

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设椭圆 $E:\dfrac{x^2}{4a^2}+\dfrac{y^2}{4b^2}=1$，$P$ 为椭圆 C 上任意一点，过点 P 的直线 $y=kx+m$ 交椭圆 E 于 A,B 两点，射线 PO 交椭圆 E 于点 Q．① 求 $\dfrac{|OQ|}{|OP|}$ 的值；② 求 $\triangle ABQ$ 面积的最大值．

解 *(1)* 由椭圆的定义可得 $2a=4$，进而可以求得椭圆 C 的方程为

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1.$$

(2)(i) 由 *(1)* 的结论，可得椭圆 $E:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$．

设 $\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OP}$ ($\lambda<0$)，$P(x_0,y_0)$，则 $Q(\lambda x_0,\lambda y_0)$．

由于 P,Q 两点分别在椭圆 C,E 上，因此

$$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1,\frac{(\lambda x_0)^2}{16}+\frac{(\lambda y_0)^2}{4}=1,$$

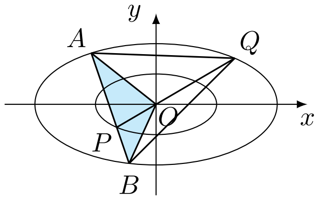
两式相除，解得 $\lambda=-2$，因此

$$\frac{|OQ|}{|OP|}=|\lambda|=2.$$

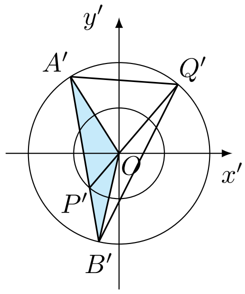
(ii) 注意到在运动过程中，QO 与 OP 的比始终不变 (第 *(i)* 小问中的结论)，于是可以得到

$$S_{\triangle ABQ}=3S_{\triangle ABO},$$

这样原来的动点 Q 就转化成了现在的定点 O，如图．



作保持横坐标不变，纵坐标变为原来的 2 倍的伸缩变换 $\begin{cases}x'=x,\\ y'=2y,\end{cases}$ 则椭圆 E 变为圆 $E':x'^2+y'^2=16$，椭圆 C 变为圆 $C':x'^2+y'^2=4$，与此同时，三角形 $A'B'O$ 的面积为三角形 ABO 面积的 2 倍，如图．



设原点 O 到弦 $A'B'$ 的距离为 d，则由弦 $A'B'$ 与圆 C' 有公共点可得 d 的取值范围是 $(0,2]$，于是在圆 E' 中应用垂径定理求弦长

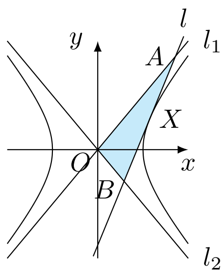
$$|A'B'| = 2\sqrt{4^2 - d^2},$$

进而

$$S_{\triangle A'B'O} = \frac{1}{2}\cdot|A'B'|\cdot d = \sqrt{d^2(16-d^2)},$$

结合 d 的取值范围可得 $S_{\triangle A'B'O}$ 的最大值为 $4\sqrt{3}$，进而可得 $S_{\triangle ABO}$ 的最大值为 $2\sqrt{3}$，于是 $S_{\triangle ABQ}$ 的最大值为 $6\sqrt{3}$.

例题 12.23 **(2012 年北大保送)** 两射线 l_1,l_2，直线 l 与两者相交，围成三角形面积为定值 c，两交点中点记为 X， X 轨迹为 Γ. 求证：Γ 关于 l_1,l_2 的角平分线对称，并为双曲线.



解 以 l_1,l_2 的角平分线所在直线为 x 轴建立直角坐标系. 设 $\angle AOx = \angle BOx = \alpha$，$OA = a, OB = b$，$X(x,y)$，则

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}ab\sin 2\alpha = c, ab = \frac{2c}{\sin 2\alpha},$$

于是

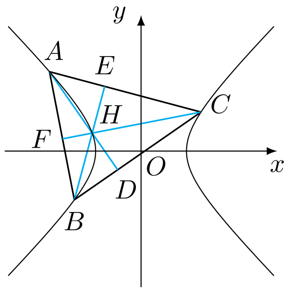
$$\begin{cases} x = \dfrac{a\cos\alpha + b\cos\alpha}{2}, \\ y = \dfrac{a\sin\alpha - b\sin\alpha}{2}, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{\cos\alpha} = \dfrac{a+b}{2}, \\ \dfrac{y}{\sin\alpha} = \dfrac{a-b}{2}, \end{cases}$$

消参得

$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha} - \frac{y^2}{\sin^2\alpha} = ab = \frac{2c}{\sin 2\alpha},$$

因此 X 的轨迹为双曲线.

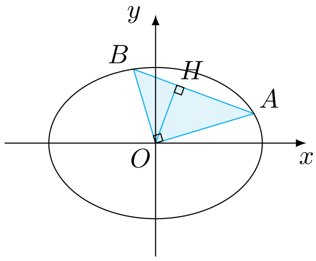
例题 12.24 求证：双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的内接三角形的垂心仍然在该双曲线上.



解 设双曲线方程为 $y=\dfrac{1}{x}$ 可以简化运算.

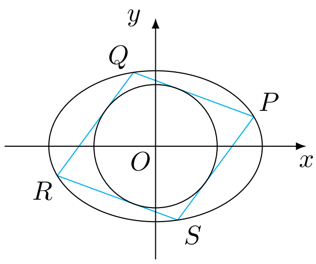
12.7 极坐标系

例题 12.25 已知直角 $\triangle OAB$ 的斜边端点 A,B 均在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上，O 为坐标原点，求证：$\triangle OAB$ 斜边上的高为定值.



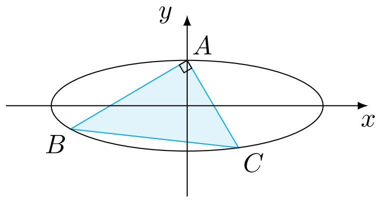
解 定值 h 满足 $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$.

例题 12.26 已知圆 $C:x^2+y^2=1$ 和椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，是否存在实数 a,b 使得对椭圆 E 上的任意一点 P，均存在四边均与圆 C 相切的椭圆内接平行四边形 $PQRS$？若存在，请求出 a,b 满足的关系式；若不存在，请说明理由.



解 存在，$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$ 且 $a^2\neq b^2$. 先利用垂径定理证明椭圆的内接平行四边形的中心必然为原点，然后利用姐妹圆即得.

例题 12.27 **(2006 年交大改)** 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$，$\triangle ABC$ 以 $A(0,1)$ 为直角顶点，B,C 在椭圆上，$\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\dfrac{27}{8}$，求 a 的值.



解 作仿射变换 $\begin{cases} x' = x \\ y' = y - 1 \end{cases}$，则椭圆为 $\dfrac{x'^2}{a^2} + y'^2 + 2y' = 0$，$A'(0,0)$，设 $B'(r_1\cos\theta, r_1\sin\theta)$，$C'\left(r_2\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right), r_2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)\right) = (-r_2\sin\theta, r_2\cos\theta)$，则

$$\frac{{r_1}^2\cos^2\theta}{a^2} + {r_1}^2\sin^2\theta + 2r_1\sin\theta = 0, \frac{{r_2}^2\sin^2\theta}{a^2} + r_2\cos^2\theta + 2r_2\cos\theta = 0,$$

解得

$$r_1 = -\frac{2\sin\theta}{\dfrac{\cos^2\theta}{a^2} + \sin^2\theta}, r_2 = -\frac{2\cos\theta}{\dfrac{\sin^2\theta}{a^2} + \cos^2\theta},$$

于是

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}r_1r_2 \\ &= \frac{2a^4\sin\theta\cos\theta}{\left(\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta\right)\left(\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta\right)} \\ &= \frac{4a^4}{\left(a^2 - 1\right)^2\sin 2\theta + \dfrac{4a^2}{\sin 2\theta}} \\ &\leqslant \frac{a^3}{a^2 - 1}, \end{aligned}$$

当且仅当 $\sin^2 2\theta = \left(\dfrac{2a}{a^2 - 1}\right)^2$ 时取得．根据题意 $\dfrac{a^3}{a^2 - 1} = \dfrac{27}{8}$，解得 $a = 3$．经检验，此时 $\sin^2 2\theta = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2$，于是等号可以取得，$a = 3$ 为符合题意的解．

12.8 习题

习题 12.1 (2015 年北大博雅) 已知点集 $M=\left\{(x,y)\middle|\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}\geqslant xy\right\}$，则平面直角坐标系中区域 M 的面积为________.

习题 12.2 (2011 年卓越) 已知抛物线的顶点在原点，焦点在 x 轴上，$\triangle ABC$ 三个顶点都在抛物线上，且 $\triangle ABC$ 的重心为抛物线的焦点，若 BC 边所在直线的方程为 $4x+y-20=0$，则抛物线方程为________.

习题 12.3 (2011 年北约) AB 为过抛物线 $y^2=4x$ 焦点 F 的弦，O 为坐标原点，且 C 为抛物线准线与 x 轴的交点，则 $\angle ACB$ 的正切值为________.

习题 12.4 (2010 年清华) 设双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{4}=k\,(a>2,k>0)$，椭圆 $C_2:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{4}=1$，若 C_2 的短轴长与 C_1 的实轴长的比值等于 C_2 的离心率，则 C_1 在 C_2 的一条准线上截得线段的长为________.

习题 12.5 (2010 年复旦) 已知常数 k_1,k_2 满足 $0<k_1<k_2$，$k_1k_2=1$. 设 C_1 和 C_2 分别是以 $y=\pm k_1(x-1)+1$ 和 $y=\pm k_2(x-1)+1$ 为渐近线且通过原点的双曲线，则 C_1 和 C_2 的离心率之比 $\dfrac{e_1}{e_2}$ 等于________.

习题 12.6 (2011 年北约) 平面上给定两定圆，动圆与两定圆均相切，求动圆圆心轨迹.

习题 12.7 已知椭圆 $C:9x^2+y^2=m^2(m>0)$，直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴，l 与 C 有两个交点 A,B，线段 AB 的中点为 M.

(1) 证明：直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值；

(2) 若 l 过点 $\left(\dfrac{m}{3},m\right)$，延长线段 OM 与 C 交于点 P，四边形 $OAPB$ 能否为平行四边形? 若能，求此时 l 的斜率；若不能，说明理由.

习题 12.8 (2014 年浙江高考) 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 和圆 $O:x^2+y^2=r^2$，且 $b<r<a$，直线 l 与椭圆 C 和圆 O 分别切于点 A,B，求 $|AB|$ 的最大值.

习题 12.9 (2012 年华约) 已知两点 $A(-2,0)$，$B(2,0)$. 动点 P 在 y 轴上的射影是 H，且 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=2\left|\overrightarrow{PH}\right|^2$.

(1) 求动点 P 的轨迹 C 的方程；

(2) 已知过点 B 的直线交曲线 C 于 x 轴下方不同的两点 M,N，设 MN 的中点为 R，过 R 与点 $Q(0,-2)$ 作直线 RQ，求直线 RQ 斜率的取值范围.

习题 12.10 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，A 是椭圆上位于第一象限内的一点，直线 AF_1,AF_2 分别与椭圆交于点 C,B，直线 BF_1 与椭圆交于点 P，连接 CD，直线 AD 与 BC 交于点 E. 设直线 AF_2 的斜率为 k，直线 CD 的斜率为 k'. 证明：

(1) $|AF_1|\cdot|AF_2|<2$；(2) $\dfrac{k'}{k}$ 为常数；(3) 点 E 在定直线上.

习题 12.11 (2012 年清华保送) $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 与 $y=x+4$ 围成区域中有矩形 $ABCD$，且 A,B 在抛物线上，D 在直线上，其中 B 在 AB 轴右侧，且 AB 长为 $2t\,(t>0)$.

(1) 当 AB 与 x 轴平行时，求矩形 $ABCD$ 面积 $S(t)$ 的函数表达式；

(2) 当边 CD 与 $y=x+4$ 重合时，求矩形 $ABCD$ 面积的最大值.

习题 12.12 (2012 年卓越联盟) 设抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点是 F， A， B 是抛物线上互异的两点，直线 AB 与 x 轴不垂直，线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 $D(a,0)$，记 $m=|AF|+|BF|$.

(1) 证明： a 是 p 与 m 的等差中项；

(2) 设 $m=3p$，直线 l 平行 y 轴，且 l 被以 AD 为直径的动圆截得的弦长恒为定值，求直线 l 方程.

习题 12.13 (2011 年华约) 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a,b>0)$， F_1,F_2 分别为 C 的左、右焦点. P 为 C 右支上一点，且使 $\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{3}$，又 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 $3\sqrt{3}a^2$.

(1) 求 C 的离心率 e；

(2) 设 A 为 C 的左顶点，Q 为第一象限内 C 上的任意一点，问是否存在常数使得 $\angle QF_2A=\lambda\angle QAF_2$ 恒成立. 若存在，求出 λ 的值；若不存在，请说明理由.

习题 12.14 (2013 年卓越) 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{4}=1\,(a>2)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 斜率为 k 的直线 l 过点 $E(0,1)$，且与椭圆相交于 C,D 两点.

(1) 求椭圆方程；

(2) 若直线 l 与 x 轴相交于点 G，且 $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{DE}$，求 k 的值；

(3) 设 A 为椭圆的下顶点，k_{AC},k_{AD} 分别为直线 AC,AD 的斜率. 证明对任意的 k，恒有 $k_{AC}\cdot k_{AD}=-2$.

习题 12.15 (2010 年北大夏令营) 已知抛物线 $P_1:y=x^2+b_1x+c_1$， $P_2:y=x^2+b_2x+c_2$，抛物线 P 与抛物线 P_1,P_2 分别相切于点 M,N. 求证： P_1,P_2 的公切线与直线 MN 平行.

习题 12.16 求抛物线 $y^2=2px\,(p>0)$ 的内接等腰直角三角形的面积的最小值.

习题 12.17 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，直线 $y=\dfrac{1}{2}x+1$ 与椭圆交于 A,B 两点，点 M 在椭圆上， $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OB}$，求椭圆方程.

习题 12.18 $A(0,-1)$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\,(a>1)$ 的一个顶点，是否存在以 A 为直角顶点的内接于椭圆的等腰直角三角形? 若存在，求出共有几个；若不存在，请说明理由.

习题 12.19 (2013 年华约) 在直线 $y=kx$ 与 $y=-kx$ 上分别取点 $A(x_A,y_A)$ 与 $B(x_B,y_B)$，使 $x_Ax_B>0$ 且 $|OA|\cdot|OB|=1+k^2$，其中 $k>0$， O 是坐标原点. 记 AB 中点 M 的轨迹为 C.

(1) 求 C 的方程；

(2) 若抛物线 $x^2=2py\,(p>0)$ 与 C 在两点相切，证明：两个切点分别在两条定直线上，并求在这两切点处的切线方程.

习题 12.20 (2010 年清华) 设 A,B,C,D 为抛物线 $x^2=4y$ 上不同的四点， A,D 关于该抛物线的对称轴对称，BC 平行于该抛物线在点 D 处的切线 l. 设 D 到直线 AB、直线 AC 的距离分别为 d_1,d_2. 已知 $d_1+d_2=\sqrt{2}|AD|$.

(1) 判断 $\triangle ABC$ 是锐角三角形、直角三角形、钝角三角形中的哪一种三角形，并说明理由；

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 240，求点 A 的坐标及直线 BC 的方程.

12.9 习题参考答案及提示

习题 12.1 $2+\dfrac{\pi}{2}$.

习题 12.2 $y^2=16x$.

习题 12.3 $2\sqrt{2}$.

习题 12.4 4 .

习题 12.5 1 .

习题 12.6 以下所有轨迹都不包含两个圆上的点以及圆心.

$r_1\neq r_2$ 时有 6 种情形:

1. 圆心重合时，两个圆;
2. 圆心不重合且内含时，两个椭圆;
3. 内切时，椭圆和直线;
4. 相交时，椭圆和双曲线;
5. 外切时，双曲线和直线;
6. 相离时，两条双曲线.

$r_1=r_2$ 时有 3 种情形:

1. 相交时，椭圆和直线;
2. 外切时，两条直线;
3. 相离时，一条直线和一条双曲线.

习题 12.7 (1) 定值为 -9 ; (2) $4\pm\sqrt{7}$.

习题 12.8 $a-b$.

习题 12.9 (1) $y^2-x^2=4$; (2) $\left(\sqrt{2}-1,1\right)$.

习题 12.10 略. 提示: 利用参数方程的引理.

习题 12.11 (1) $S(t)=2t\left(-t+4-\dfrac{1}{2}t^2\right)=-3t^3-2t^2+8t$ ，其中 $0<t<2$. (2) $3\sqrt{3}$.

习题 12.12 (1) 略; (2) $\sqrt{3}p$.

习题 12.13 (1) 2 ; (2) 2 .

习题 12.14 (1) $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{4}=1$; (2) $\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$; (3) 略.

习题 12.15 设 P_1, P_2 的公切线为 $y = kx + b_0$，则

$$(b_1 - k)^2 - 4(c_1 - b_0) = (b_2 - k)^2 - 4(c_2 - b_0) = 0,$$

解得

$$k = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) - 2 \cdot \frac{c_1 - c_2}{b_1 - b_2}.$$

P_1, P_2 与 P_3 的切点坐标设为 $(m_1, n_1), (m_2, n_2)$．则 m_1 为 $(a-1)x^2 + (b - b_1)x + c - c_1 = 0$ 的重根，于是

$$\Delta = (b - b_1)^2 - 4(a-1)(c - c_1) = 0,$$

且 $m_1 = -\dfrac{b - b_1}{2(a-1)}$；化简判别式，有

$$c - c_1 = \frac{(b - b_1)^2}{4(a-1)},$$

又

$$\begin{aligned}\frac{n_2 - n_1}{m_2 - m_1} &= \frac{a{m_2}^2 + bm_2 + c - a{m_1}^2 - bm_1 - c}{m_2 - m_1} \\ &= a(m_2 + m_1) + b \\ &= a \cdot \left[-\frac{b - b_1}{2(a-1)} - \frac{b - b_2}{2(a-1)}\right] + b,\end{aligned}$$

于是只需要证明

$$-a \cdot \frac{2b - (b_1 + b_2)}{2(a-1)} + b = \frac{b_1 + b_2}{2} - 2 \cdot \frac{c_1 - c_2}{b_1 - b_2},$$

也即

$$\frac{1}{a-1}\left(\frac{b - b_1 + b - b_2}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\dfrac{(b - b_2)^2}{4(a-1)} - \dfrac{(b - b_1)^2}{4(a-1)}}{b_1 - b_2}.$$

因此原命题得证．

习题 12.16 $\dfrac{1}{2p^2}$．

习题 12.17 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$．

习题 12.18 当 $0 < a \leqslant \sqrt{3}$ 时，存在一个满足题意的等腰直角三角形，当 $a > \sqrt{3}$ 时，存在三个满足题意的等腰直角三角形．

习题 12.19 *(1)* 由 $|OA| \cdot |OB| = 1 + k^2$ 得

$$\sqrt{\left(x_A^2 + k^2 x_A^2\right)\left(x_B^2 + k^2 x_B^2\right)} = 1 + k^2,$$

因为 $x_A x_B > 0$，所以 $x_A x_B = 1$．由于 $M(x_M, y_M)$ 满足 $x_M = \dfrac{1}{2}(x_A + x_B)$，$y_M = \dfrac{k}{2}(x_A - x_B)$，

因此 $x_A=x_M+\frac{1}{k}y_M$ ， $x_B=x_M-\frac{1}{k}y_M$ ，

$$x_Ax_B=\left(x_M+\frac{1}{k}y_M\right)\left(x_M-\frac{1}{k}y_M\right)=x_M^2-\frac{1}{k^2}y_M^2,$$

所以 $x_M^2-\frac{1}{k^2}y_M^2=1$ ，故 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{k^2}=1$.

(2) 记抛物线 $x^2=2py$ 与双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{k^2}=1$ 的一个切点为 (x_0,y_0) . 联立抛物线与双曲线方程得 $\frac{y^2}{k^2}-2py+1=0$ ，解得 $y=pk^2\pm k\sqrt{p^2k^2-1}$.

又

$$\begin{cases}2x=2py'\\ 2x-\dfrac{2yy'}{k^2}=0,\end{cases}$$

因此 $y_0=pk^2$. 所以两曲线相切时，$p^2k^2=1$ ，即 $p=\frac{1}{k}$.

由 $x_0^2=2py_0=2p^2k^2=2$ 得 $x_0=\pm\sqrt{2}$ ，故两切点分别在直线 $x=\sqrt{2}$ 和 $x=-\sqrt{2}$ 上. 因为

$$x_0=\pm\sqrt{2},y_0=k,y'|_{x=x_0}=\frac{x_0}{p}=\pm\sqrt{2}k,$$

故所求切线方程为

$$y=k\pm\sqrt{2}k\left(x\mp\sqrt{2}\right).$$

习题 12.20 *(1)* 直角三角形；*(2)* $(\pm8,16)$ ，$y=\pm4x-12$.

第十三章　数论初步

1. 奇偶分析

将全体整数分为两类，凡是 2 的倍数的数称为偶数，否则称为奇数．因此，任一偶数可表为 $2m\,(m\in\mathbb{Z})$，任一奇数可表为 $2m+1$ 或 $2m-1$ 的形式．奇偶数的主要性质：

- 奇数 $\pm$ 奇数 $=$ 偶数; 偶数 $\pm$ 偶数 $=$ 偶数;
  奇数 $\pm$ 偶数 $=$ 奇数; 偶数 $\times$ 偶数 $=$ 偶数;
  奇数 $\times$ 偶数 $=$ 偶数; 奇数 $\times$ 奇数 $=$ 奇数;
- 奇数的平方都可表为 $8m+1$ 形式，偶数的平方都可表为 $8m$ 或 $8m+4$ 的形式 $m\in\mathbb{Z}$
- 任何一个整数 n，都可以写成 $n=2^m\cdot l$ 的形式，其中 m 为非负整数，l 为奇数，此时又记为 $2^m\|n$．

2. 高斯函数

设 x 是实数，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，称为 x 的整数部分，即 $[x]$ 是一个使得不等式 $[x]\leqslant x<[x]+1$ 成立的唯一整数．例如：$[1.2]=1$，$[-1.2]=-2$，$[3]=3$，$[-4]=-4$．记 $\{x\}=x-[x]$，称为 x 的小数部分．

高斯函数的主要性质：

- 若 $x\leqslant y$，则 $[x]\leqslant[y]$；
- 对任意整数 m，有 $[x+m]=[x]+m$，$\{x+m\}=\{x\}$，$\{x\}$ 是周期为 1 的周期函数；
- $[x]+[y]\leqslant[x+y]\leqslant[x]+[y]+1$，其中等号有且只有一个成立；
- $[-x]=\begin{cases}-[x],x\in\mathbb{Z}\\-[x]-1,x\notin\mathbb{Z},\end{cases}$ 及 $-x=\begin{cases}-[x]=0,x\in\mathbb{Z}\\1-[x],x\notin\mathbb{Z};\end{cases}$
- 对正整数 m 有 $\left[\dfrac{[x]}{m}\right]=\left[\dfrac{x}{m}\right]$；
- 不小于 x 的最小整数是 $-[-x]$；
- 小于 x 的最大整数 $-[-x]-1$；
- 大于 x 的最小整数 $[x]+1$．

3. 整除问题

(带余除法) 对于任一整数 a 和任一整数 b，必有唯一的一对整数 q，r 使得

$$a=bq+r,0\leqslant r<b,$$

并且整数 q 和 r 由上述条件唯一确定，则 q 称为 b 除 a 的不完全商，r 称为 b 除 a 的余数．

若 $r=0$，则称 b 整除 a，或 a 被 b 整除，或称 a 是 b 的倍数，或称 b 是 a 的约数 (又叫因子)，记为 $b\mid a$．否则，$b\nmid a$．

整除的主要性质：

- 若 $a\mid b$，$b\mid c$，则 $a\mid c$．
- 若 $a\mid b_i$，则 $a\mid \sum\limits_{i=1}^{n} c_ib_i$，其中 $c_i\in\mathbb{Z}, i=1,2,\cdots,n$．
- 若 $a\mid c$，则 $ab\mid cd$．反之，亦成立．
- 若 $a\mid b$，则 $|a|\leqslant|b|$．因此，若 $a\mid b$，又 $b\mid a$，则 $a=\pm b$．
- a,b 互质，若 $a\mid c$，$b\mid c$，则 $ab\mid c$．
- p 为质数，若 $p\mid a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$，则 p 必能整除 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中的某一个．特别地，若 p 为质数，$p\mid a^n$，则 $p\mid a$．
- 如在等式 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i=\sum\limits_{k=1}^{m} b_k$ 中除开某一项外，其余各项都是 c 的倍数，则这一项也是 c 的倍数．
- n 个连续整数中有且只有一个是 n 的倍数．
- 任何 n 个连续整数之积一定是 n 的倍数．

4. 算数基本定理

若一个大于 1 的整数除了 1 和本身外再无其它的正约数，则称这个数为素数 (质数)．设整数 $a>1$，那么必有 $a=p_1p_2\cdots p_n$，其中 p_j $(1\leqslant j\leqslant n)$ 是素数，且在不计次序的意义下，该表达式是唯一的．

若把上述表达式式中相同的素数合并，即得 $a=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_s^{a_s}$，$a_1+a_2+\cdots+a_s=n$，$p_1<p_2<\cdots<p_s$，(这里 p_i 互不相同，$i=1,2,\cdots,s$)，称为 a 的标准素因数分解式．

5. 未知数的个数多于方程个数的方程 (组) 称为不定方程 (组)．常用的解不等式的方法有：配方法、因式分解法、不等式法、奇偶分析法、判别式法和余数分析法．

6. 同余设 $m\neq 0$，若 $m\mid a-b$，即 $a-b=km$，则称 a 同余于 b 模 m，b 是 a 模 m 的剩余，记作 $a\equiv b\pmod m$；不然，则称 a 不同余于 b 模 m，b 不是 a 对模 m 的剩余，记作 $a\not\equiv b\pmod m$．

同余有下列性质：

- 同余是一种等价关系，即有

  自反性：$a\equiv a\pmod m$；

  对称性：$a\equiv b\pmod m\Leftrightarrow b\equiv a\pmod m$；

  传递性：$a\equiv b\pmod m, b\equiv c\pmod m\Rightarrow a\equiv c\pmod m$．

- 同余式可以相加，即若有 $a\equiv b\pmod m$，$c\equiv d\pmod m$，$(*)$ 则 $a+c\equiv b+d\pmod m$；

- 同余式可以相乘，即若 (∗) 式成立，则有 $ac \equiv bd \pmod m$.
- 同余式 $ac \equiv bd \pmod m (c \neq 0)$ 等价于 $a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ \dfrac{m}{(c,m)})$. 特别地，当 $(c,m)=1$ 时，两边可约去 c .

7. 多项式

余数定理：多项式 $f(x)$ 除以 $(x-a)$ 的余数为 $f(a)$.

因式定理：$f(a)=0$ (即 a 是 f 的根) 的充要条件是 $(x-a)$ 是多项式 $f(x)$ 的因子.

8. 裴蜀定理

若 a,b 都是整数，且 $(a,b)=d$ ，那么对于任意的整数 x,y ，$ax+by$ 都一定是 d 的倍数. 特别的，一定存在整数 x,y ，使得 $ax+by=d$ 成立. 裴蜀定理往往用来解不定方程 $ax+by=1$.

9. 佩尔方程

第 I 型佩尔方程：$x^2-dy^2=1$ ，其中 d 为正整数，且不为完全平方数. 该方程必然有无穷多组正整数解，其中基本解通常利用连分数求出.

第 II 型佩尔方程：$x^2-dy^2=-1$ ，其中 d 为正整数，且不为完全平方数. 该方程如果有基本解，则必然有无穷多组解.

13.1 有理数与无理数

例题 13.1 **(2014 年北约)** 证明：$\tan 1^\circ$ 为无理数.

解 略.

例题 13.2 **(2008 年清华)** 已知 a,b,c 都是有理数，$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 也是有理数，证明：$\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ 都是有理数.

解 用反证法. 若 $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ 不都是有理数，不妨设 $\sqrt{c}$ 是无理数.
设 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=p$ ，则

$$\begin{aligned}\sqrt{a}+\sqrt{b}=p-\sqrt{c} &\Rightarrow a+b+2\sqrt{ab}=p^2+c-2p\sqrt{c}\\ &\Rightarrow 2\sqrt{ab}=p^2+c-a-b-2p\sqrt{c}\\ &\Rightarrow 4ab=\left(p^2+c-a-b\right)^2+4p^2c-4p\left(p^2+c-a-b\right)\sqrt{c},\end{aligned}$$

显然 $p>0$ ，而

$$p^2=a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}>a+b+c,$$

于是 $4p\left(p^2+c-a-b\right)\neq 0$ ，因此 $\sqrt{c}=\dfrac{\left(p^2+c-a-b\right)^2+4p^2c-4ab}{4p\left(p^2+c-a-b\right)}$ 为有理数，矛盾.
因此 $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ 都是有理数.

例题 13.3 **(2009 年北大)** 是否存在实数 x 使 $\tan x+\sqrt{3}$ 与 $\cot x+\sqrt{3}$ 均为有理数?

解 不存在. 设 $p=\tan x+\sqrt{3}$，$q=\cot x+\sqrt{3}$，设 p 和 q 均为有理数，则 $pq-1$，$p+q$ 均为有理数，于是有

$$\begin{cases} p+q=0, \\ pq-1=0, \end{cases}$$

从而 $p^2+1=0$，矛盾.

例题 13.4 **(2015 年交大)** 平面直角坐标系内，若一个圆的圆心的横坐标和纵坐标均为无理数，求证：该圆上不可能存在 3 个整点.

解 利用整系数二元一次方程组的解一定为有理数求解.

例题 13.5 **(2010 年清华特色测试)** 设计一种为一维数轴的全体实数染色的方案，使得数轴上任意两个相距为 $1,\sqrt{2},\sqrt{5}$ 的点都不同色，要求使用颜色最少.

解 显然不可能只用一种颜色，下面给出用两种颜色染色的方案.

首先，考虑最简单的问题，设计一种为一维数轴的全体实数染色的方案，使得数轴上任意两个相距为 1 的点都不同色. 只需要把

$$\cdots,[-1,0),[0,1),[1,2),\cdots$$

交替染成两种不同颜色就可以了.

接下来思考上述方法的本质. 把每一小段的中点位置反色，仍然符合要求. 也就是说集合

$$\left\{\cdots,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\cdots\right\}$$

可以抽离出来单独染色，而不会对其他实数的染色产生影响.

我们把这个方案提炼一下:

第一步，先对数集

$$G=\left\{x|x=k+\frac{1}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$$

染色 (只需要 k 为偶数时染黑色，k 为奇数时染白色就可以了).

第二步，然后对其他实数染色，如果对于某个实数未被染色，即 $p\notin G$，那么写出集合

$$G_0=\{x|x=k+p,k\in\mathbb{Z}\},$$

按第一步中的方法染色. 同时已染色集合扩充到了 $G\cup G_0$.

重复第二步，就可以完成对任意实数染色.

之所以能够成功用两种颜色染色，实质上就是:

①把实数集写成了无数个形如 $G(p)$ 的集合的并集，且这些集合是互不相交的;

②这些集合中任意两个不同的集合 $G(p_1)$ 和 $G(p_2)$ 中的元素 x_1,x_2 (设 $x_1\in G(p_1)$，$x_2\in G(p_2)$) 的距离 $|x_1-x_2|\neq 1$;

③每个集合 $G(p)$ 都可以只用两种颜色染色.

最后用同样的方案处理问题.

第一步，先对数集

$$G=\left\{x|x=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{5},a,b,c\in\mathbb{Z}\right\}$$

染色 (只需要 $a+b+c$ 为偶数时染黑色，$a+b+c$ 为奇数时染白色就可以了).

第二步，然后对其他实数染色，如果对于某个实数未被染色，即 $p\notin G$，那么写出集合

$$G_0=\left\{x|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{5}+p,a,b,c\in\mathbb{Z}\right\},$$

按第一步中的方法染色. 同时已染色集合扩充到了 $G\cup G_0$.

重复第二步，就可以完成对任意实数染色.

由于这种染色方案仍然满足①、③且满足这些集合中任意两个不同的集合 $G(p_1)$ 和 $G(p_2)$ 中的元素 x_1,x_2 (设 $x_1\in G(p_1)$，$x_2\in G(p_2)$) 的距离

$$|x_1-x_2|\neq 1,|x_1-x_2|\neq\sqrt{2},|x_1-x_2|\neq\sqrt{5}.$$

所以是符合题意的.

综合以上，就得到了满足题意的用两种颜色将全体实数染色的方案.

例题 **13.6** **(2012 年北约)** 求证：$\forall n\in\mathbb{N}^*$，$\left(\sqrt{2}+1\right)^n$ 都能写成 $\sqrt{m}+\sqrt{m-1}$ ($m\in\mathbb{N}^*$) 的形式.

解 可以利用二项式定理或数学归纳法证明.

13.2 整除、同余与不定方程

例题 **13.7** **(2015 年北大博雅)** 已知 $x,y\in\mathbb{N}^*$，且 $x\leqslant y$，则满足 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2015}$ 的 (x,y) 的个数为________.

解 14 . 题中条件可以变形为

$$(x-2015)(y-2015)=2015^2=5^2\cdot 13^2\cdot 31^2,$$

于是考虑 $5^2\cdot 13^2\cdot 31^2$ 的不超过 $5\cdot 13\cdot 31$ 的不同因数个数即可.

例题 **13.8** **(2009 年清华)** 请写出所有三个数均为质数，且公差为 8 的等差数列，并证明你的结论.

解 考虑模 3 的余数，$3,11,19$ 为唯一符合条件的等差数列.

例题 **13.9** 已知 x,y 为不相等的正整数，求证：x^2+y 和 y^2+x 中至少有一个不是完全平方数.

解 不妨设 $0<x<y$，则

$$y^2<y^2+x<y^2+y<(y+1)^2,$$

于是 y^2+x 不是完全平方数.

例题 13.10 **(2012 年北约)** 从 $1,2,\cdots,2012$ 中选出 n 个数，使得其中任意两个数的差都不能整除这两个数的和，则 n 的最大值为________.

解 取 $1,4,7,\cdots,2011$，共 671 个数，则任意两数之和均模 3 余 2，任意两数之差均模 3 余 0，符合题意；

下面证明不存在 672 个数的取法.

将 $\{1,2,\cdots,2012\}$ 分成 671 个集合

$$\{1,2,3\},\{4,5,6\},\cdots,\{2011,2012\},$$

如果可取 672 个数，那么必然有两个数同属某一集合，此时这两数之差为 1 或 2.

若两数之差为 1，那么显然不符合要求；

若两数之差为 2，那么这两数同为奇数或同为偶数，它们的和为偶数，亦不符合要求.

因此不存在 672 个数的取法，最多能取 671 个数.

例题 13.11 证明：若 m 是任一正整数，则 $a_m=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^m}$ 不是整数.

解 设右边的公分母为

$$[2,3,4,\cdots,2^m]=2^m\cdot p,$$

其中 p 是一个奇数，两边同时乘以公分母，则左边是偶数，而右边为奇数. 利用这个方法可以证明 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i}$，其中 $n\in\mathbb{N}^*$ 且 $n\geqslant 2$ 均不是整数. 另外，这个方法中从 2 的方幂出发也不是必须的[1].

例题 13.12 **(2015 年北京高考)** 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1\in\mathbb{N}^*$，$a_1\leqslant 36$，且

$$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & a_n\leqslant 18,\\ 2a_n-36, & a_n>18.\end{cases},n=1,2,\cdots$$

记集合 $M=\{a_n\,|n\in\mathbb{N}^*\}$.

(1) 若 $a_1=6$，写出集合 M 的所有元素；

(2) 若集合 M 存在一个元素是 3 的倍数，证明：M 的所有元素都是 3 的倍数；

(3) 求集合 M 的元素个数的最大值.

解 *(1)* $\{6,12,24\}$；*(2)* 略；*(3)* 8. 注意数列从第三项开始必然均为 4 的倍数，因此集合 M 的元素个数不超过 8，而当 $a_1=1$ 时，有

$$M=\{1,2,4,8,16,32,28,20\}$$

共有 8 个元素.

[1] 也可以两边同时乘以 $\dfrac{[2,3,\cdots,2^m]}{p}$，其中 p 为右边各分母分解质因数后的最大奇素数因子，根据伯特兰-切比雪夫定理（当 $n\geqslant 4$ 时，必然存在质数 p 满足 $n<p<2n-3$），含 p 的项唯一，进而即得.

例题 13.13 **(2006 年清华)** 求正整数集合 S (元素个数不少于 2)，使 S 中的元素之和等于元素之积.

解 设 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，其中 $a_1<a_2<\cdots<a_n\ (n\geqslant 3)$ 则

$$na_n>a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1\cdot a_2\cdots a_{n-1}\cdot a_n,$$

于是 $a_1\cdot a_2\cdots a_{n-1}<n$，而 $a_1\cdot a_2\cdots a_{n-1}>(n-1)!$，于是 $n>(n-1)!$，从而 $n=3$.
此时 $a_1=1$，$a_2=2$，不难解得 $a_3=3$.

例题 13.14 **(2013 年华约)** 设 x,y,z 是三个两两不等且都大于 1 的正整数,若 $xyz|\,(xy-1)\,(yz-1)\,(zx-1)$，求 x,y,z 的所有可能值.

解 根据题意，条件 $xyz|\,(xy-1)\,(yz-1)\,(zx-1)$ 即

$$xyz|\left(x^2y^2z^2-xy^2z-x^2yz-xyz^2+xy+yz+zx-1\right),$$

也即

$$xyz|\,(xy+yz+zx-1)\,,$$

设 $xy+yz+zx-1=m\cdot xyz$，$m\in\mathbb{N}^*$，不妨先设 $x<y<z$，则

$$mx\cdot yz=xy+yz+zx-1\leqslant 3yz,$$

于是 $mx\leqslant 3$，因此 $m=1,x=2$．此时

$$2y+2z+yz-1=2yz \text{ 即 } y=2+\frac{3}{z-2},$$

从而 $z=5$，$y=3$．因此 (x,y,z) 为 $(2,3,5)$ 或其排列.

例题 13.15 **(2014 年北大夏令营)** 求出所有实数 x，使得 $\dfrac{x^2+4x-1}{7x^2-6x-5}$ 与 $\dfrac{1-x}{1+x}$ 同时为整数.

解 显然 $\dfrac{x^2+4x-1}{7x^2-6x-5}\neq 0$，于是

$$\left|x^2+4x-1\right|\geqslant\left|7x^2-6x-5\right|,$$

解得 $-\dfrac{3}{4}\leqslant x\leqslant -\dfrac{1}{3}$ 或 $1\leqslant x\leqslant 2$．考虑到 $\dfrac{1-x}{1+x}$ 为整数，于是 $x=\dfrac{2}{k}-1$，其中 $k\in\mathbb{Z}$．于是 x 的所有可能的值为

$$1,0,-\frac{1}{3},-\frac{1}{2},-\frac{3}{5},-\frac{2}{3},-\frac{5}{7},-\frac{3}{4},$$

逐一验证即得所有解为 $-\dfrac{3}{4},-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3},1$.

例题 13.16 **(2009 年科大)** 已知 $A=\{x\,|x=n!+n\}$，B 是 A 在正整数集 $\mathbb{N}^*$ 上的补集.

(1) 求证：无法从 B 中取出无限个数组成等差数列；

(2) 能否从 B 中取出无限个数组成等比数列?

解 (1) 若能从 B 中取出无限个数组成等差数列 $\{a_m\}$，并设公差为 d 则 $a_m = a_1 + (n-1)\,d$，而 $n > d$ 时，有

$$n! + n, (n+1)! + (n+1)\,, \cdots,$$

被 d 除，其余数分别与

$$n, (n+1)\,, (n+2)\,, \cdots,$$

被 d 除的相同. 而这些余数应该是逐一递增的, 取得 $d-1$ 后, 又以周期性出现, 所以存在 n_0, 使 $n_0!+n_0$ 被 d 除与 a_m 被 d 除的余数相同. 这就说明 $n_0! + n_0$ 是等差数列 $\{a_m\}$ 中的项. 而 $n_0! + n_0 \in A$，故 $n_0! + n_0 \notin B$，于是矛盾就产生了，故假设不成立要证明的结论成立.

(2) 能从 B 中取出无限个数组成等比数列，例如 $b_m = 5^m$. 由于

$$n! + n = n\,[(n-1)! + 1]\,,$$

并且当 $n > 5$ 时，5 不能整除 $(n-1)! + 1$，故 $5^m \notin A$，因此，$5^m \in B$，故数列 $\{b_m\}$ 是从 B 中取出无限个数组成的等比数列.

13.3 习题

习题 13.1 平面上的点 $P(x,y)$ 的坐标满足 $x\in\mathbb{Q}$，且 $y\in\mathbb{Q}$ 时，称 P 为“有理点”. 设 r 是给定的正实数，则圆 $(x-1)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2=r^2$ 上的有理点的个数（　　）

A. 最多有 1 个　　B. 最多有 2 个　　C. 最多有 4 个　　D. 可以有无穷多个

习题 13.2 (2015 年清华领军) 一个以 O 为圆心的圆上的整数格点的个数可能是（　　）

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 12

习题 13.3 (2015 年北大博雅) 已知 $a,b,c\in\mathbb{Z}$，且 $(a-b)(b-c)(c-a)=a+b+c$，则 $a+b+c$ 可能为（　　）

A. 126　　B. 144　　C. 162　　D. 以上都不对

习题 13.4 (2015 年北大博雅) 已知 $n\in\mathbb{N}^*$，且 $n\leqslant 2015$，则使得 $1^n+2^n+3^n+4^n$ 的个位数为 0 的 n 的个数为________.

习题 13.5 (2013 年北约) 以 $\sqrt{2}$ 和 $1-\sqrt[3]{2}$ 为根的有理系数方程的最小次数为________.

习题 13.6 (2004 年交大) $6\overline{xyzabc}=7\overline{abcxyz}$，则 $\overline{xyzabc}=$________.

习题 13.7 (2014 年华中科大) 证明下列命题：

(1) 若 a 为正整数，而 $\sqrt{a}$ 不为整数，则 $\sqrt{a}$ 为无理数；

(2) 若 $m,n,p\in\mathbb{Z}$，且 $m+n\sqrt{2}+p\sqrt{3}=0$，则 $m=n=p=0$.

习题 13.8 (2009 年清华) 证明当 p,q 均为奇数时，曲线 $y=x^2-2px+2q$ 与 x 轴的交点横坐标为无理数.

习题 13.9 证明：如果整系数二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 存在有理根，那么 a,b,c 三个数中至少有一个是偶数.

习题 13.10 (2011 年北约) 是否存在四个正实数，使其两两乘积为 $2,3,5,6,10,16$？

习题 13.11 是否存在正整数 m 和 n，使得 $\left(5+3\sqrt{2}\right)^m=\left(3+5\sqrt{2}\right)^n$.

习题 13.12 (2011 年复旦) 设正整数 n 可以等于 4 个不同的正整数的倒数之和，求 n 的所有取值.

习题 13.13 求使得 x^2+3y 和 y^2+3x 均为完全平方数的所有正整数解.

习题 13.14 (2015 年交大) 已知 p 是一个不为 2 的质数，求证：$\dfrac{2}{p}$ 拆分为两个不同的正整数的倒数之和的方式存在且唯一.

习题 13.15 (2010 年清华夏令营) 求证：对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$，$\left(\sqrt{2}-1\right)^n$ 一定可以写成 $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ 的形式.

习题 13.16 (2013 年北约) 至多可以找到多少个两两不同的正整数使得它们中任意三个的和都是质数? 证明你的结论.

习题 13.17 (2012 年重庆高考) 对正整数 n , 记 $I_n=\{1,2,\cdots,n\}$, $P_n=\left\{\dfrac{m}{\sqrt{k}}\,\middle|\, m\in I_n,k\in I_n\right\}$.

(1) 求集合 P_7 中元素的个数;

(2) 若 P_n 的子集 A 中任意两个元素之和不是整数的平方, 则称 A 为"稀疏集". 求 n 的最大值, 使 P_n 能分成两个不相交的稀疏集的并.

习题 13.18 证明: $f(x)=ax+b$, $x\in\mathbb{N}^*$, 其中 $a,b\in\mathbb{N}^*$ 的值域中必有三个不同的数构成等比数列.

习题 13.19 (2011 年对外经贸) 设 $\{a_n\}$ 是可以表示为两个或两个以上连续正整数之和的正整数从小到大排成的数列, 设此数列的前 n 项和为 S_n .

(1) 求 a_{100} , S_{100} ;

(2) 若将 k 表示为两个或两个以上的连续正整数之和的形式, 恰有 i 种表示法, 则称 k 为 i 形态数, 如 15 为 3 形态数. 试求所有 5 形态数中的最小数.

13.4 习题参考答案及提示

习题 13.1 B. 若 (x_1,y_1) 为有理点，则 $(2-x_1,y_1)$ 为有理点，如取

$$(x-1)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2=\frac{9}{4},$$

则圆上有两个有理点 $\left(\frac{1}{2},2\right)$，$\left(\frac{3}{2},2\right)$．
下面证明不可能有两个有理点 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，其中 $x_1,x_2\leqslant 1$．
否则，一方面，直线 AB 的斜率存在 (显然 $x_1\neq x_2$，否则 AB 为直径，$y_1+y_2=2\sqrt{2}$，矛盾) 且为非零有理数；另一方面，线段中点 M 为有理点，因此 OM 的斜率不为有理数．事实上，$k_{AB}\cdot k_{OM}=-1$，矛盾．

习题 13.2 ACD. 提示：分别取 $r=1,\sqrt{5},5$．

习题 13.3 C. 提示：注意 $a+b+c$ 可以分解为三个和为 0 的整数之积．

习题 13.4 1512． 提示：n 模 4 余 $1,2,3$ 均可．

习题 13.5 5

习题 13.6 538461．设 $\overline{xyz}=m$，$\overline{abc}=n$，则

$$6\left(1000m+n\right)=7\left(1000n+m\right)，\text{即 } 5993m=6994n,$$

注意到 $(5993,6994)=13$，所以 $m=\dfrac{6994}{13}=538$，$n=\dfrac{5993}{13}=461$．

习题 13.7 略． 提示：用反证法．

习题 13.8 曲线与 x 轴的交点为 $x^2-2px+2q=0$，解得

$$x=\frac{2p\pm\sqrt{4p^2-8q}}{2}=p\pm\sqrt{p^2-2q},$$

p,q 均为奇数，设 $p=2m+1$，$q=2n+1$，则

$$\sqrt{p^2-2q}=\sqrt{\left(2m+1\right)^2-2\left(2n+1\right)}=\sqrt{4m^2+4m+1-4n-2}=\sqrt{4\left(m^2+m-n\right)-1},$$

而 $4\left(m^2+m-n\right)-1\equiv 3\left(\bmod 4\right)$，不可能是完全平方数．
因此 $x=p\pm\sqrt{p^2-2q^2}$ 是无理数，原命题得证．

习题 13.9 用反证法，假设 a,b,c 都是奇数．
原方程存在有理根，于是 b^2-4ac 是完全平方数，设 $b^2-4ac=m^2$，则显然 m 为奇数．
由于当 b,m 均为奇数时，$8|\left(b^2-m^2\right)$．设

$$b^2-m^2=\left(2k_1+1\right)^2-\left(2k_2+1\right)^2=4\left(k_1+k_2+1\right)\left(k_1-k_2\right),$$

而 k_1+k_2+1 与 k_1-k_2 为一奇一偶矛盾，因此原命题得证.

习题 13.10 **法一** 假设存在．由于四个正实数的两两乘积都不同，因此这四个正实数均不相等．设这四个正实数为 a,b,c,d ，且 $a>b>c>d$ ，则

$$ab>ac>\cdots>bd>cd.$$

于是 $ab=16,ac=10,bd=3,cd=2$ ，矛盾．因此不存在满足条件的四个正实数.

法二

由于

$$abcd=ab\cdot cd=ac\cdot bd=ad\cdot bc=\sqrt[3]{2\times3\times5\times6\times10\times16}=\sqrt[3]{450},$$

而这 6 个数中没有任何两个数的乘积为 $\sqrt[3]{450}$ ，因此不存在满足题意的四个正实数.

习题 13.11 若 $\left(a+b\sqrt{2}\right)^n=p+q\sqrt{2}$ ，则 $\left(a-b\sqrt{2}\right)^n=p-q\sqrt{2}$.

因此若存在正整数 m 和 n ，使得 $\left(5+3\sqrt{2}\right)^m=\left(3+5\sqrt{2}\right)^n$ ，则

$$\left(5-3\sqrt{2}\right)^m=\left(3-5\sqrt{2}\right)^n,$$

此时 $7^m=(-41)^n$ ，而 7 与 -41 互质，于是不存在满足题意的正整数 m,n .

习题 13.12 不妨设 $n=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}$ ，其中 $a<b<c<d$ ， $a,b,c,d\in\mathbb{N}^*$.

若 $a\geqslant3$ ，则

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\leqslant\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{19}{20}<1,$$

无解；

若 $a=2$ ，则

$$n=\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}<2,$$

于是 $n=1$ ．此时 $1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}$ 是符合条件的解；

若 $a=1$ ，则

$$n=1+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\leqslant1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12},$$

于是 $n=1$ 或 $n=2$ ，又 $2=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}$ ，所以 n 可以取 1 或 2 .

习题 13.13 不妨设 $x\leqslant y$ ，则 $y^2<y^2+3x<(y+2)^2$ ，于是 $y^2+3x=(y+1)^2$ ，于是 $3x=2y+1$.

进而设 $x=2k+1$ ， $y=3k+1$ ，于是

$$x^2+3y=4k^2+13k+4,$$

类似可得 $4k^2+13k+4=(2k+2)^2$ 或 $4k^2+13k+4=(2k+3)^2$，解得 $k=0$ 或 $k=5$．于是

$$(x,y)=(1,1),(11,16),(16,11).$$

习题 13.14 略． 提示：$(2x-p)(2y-p)=p^2$．

习题 13.15 略．

习题 13.16 至多可以找到 4 个，如 $1,3,7,9$．下面证明不能找到 5 个符合题意的正整数．
考虑它们模 3 的余数，设余数为 $0,1,2$ 的分别有 a,b,c 个，则
情形一 若 a,b,c 均不为零，则存在三个数，它们的和为 3 的倍数，一定不是质数；
情形二 若 a,b,c 中有零，则根据抽屉原理，至少存在三个数，它们的余数相同．
此时它们的和为 3 的倍数，一定不是质数．
综上，不能找到 5 个符合题意的正整数．

习题 13.17 *(1)* 当 $k=4$ 时，$\left\{\dfrac{m}{\sqrt{k}}\middle|m\in I_7\right\}$ 中有 *3* 个数与 I_7 中的 *3* 个数重复，因此 P_7 中元素的个数为 $7\times 7-3=46$．
(2) 先证：当 $n\geqslant 15$ 时，P_n 不能分成两个不相等的稀疏集并．若不然，设 A,B 为不相交的稀疏集，使 $A\cup B=P_n\supseteq I_n$，不妨设 $I\in A$，则因为 $1+3=2^2$，故 $3\notin A$，即 $3\in B$．同理，$6\in A$，$10\in B$，又推得 $15\in A$，但 $1+15=4^2$，这与 A 为稀疏集矛盾．
再证 P_{14} 符合要求，当 $k=1$ 时，$\left\{\dfrac{m}{\sqrt{k}}\middle|m\in I_{14}\right\}=I_{14}$ 可分成两个稀疏集之并，事实上，只要取

$$A_1=\{1,2,4,6,9,11,13\},B_1=\{3,5,7,8,9,10,12,14\},$$

则 A_1, B_1 为稀疏集，且 $A_1\cup B_1=I_{14}$．
当 $k=4$ 时，集合 $\left\{\dfrac{m}{\sqrt{k}}\middle|m\in I_{14}\right\}$ 中除整数外剩下的数组成集 $\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2},\cdots,\dfrac{13}{2}\right\}$，可求解为下面两稀疏集的并：

$$A_2=\left\{\frac{1}{2},\frac{5}{2},\frac{9}{2},\frac{11}{2}\right\},B_2=\left\{\frac{3}{2},\frac{7}{2},\frac{13}{2}\right\},$$

当 $k=9$ 时，集合 $\left\{\dfrac{m}{\sqrt{k}}\middle|m\in I_{14}\right\}$ 中除正整数外剩下的数组成集 $\left\{\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{5}{3},\cdots,\dfrac{13}{3},\dfrac{14}{3}\right\}$，可分解为下面两稀疏集的并：

$$A_3=\left\{\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{10}{3},\frac{13}{3}\right\},B_3=\left\{\frac{2}{3},\frac{7}{3},\frac{8}{3},\frac{11}{3},\frac{14}{3}\right\}.$$

最后，集合 $C=\left\{\dfrac{m}{\sqrt{k}}\middle|m\in I_{14},k\in I_{14},k\neq 1,4,9\right\}$ 中的数的分母均为无理数，它与 P_{14} 中的任何其他数之和都不是整数，因此，令 $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup C$，$B=B_1\cup B_2\cup B_3$，则综上可知，所求 n 的最大值为 14．

习题 13.18 利用 $b(1+a)^n$ 进行构造．

习题 13.19 *(1)* $13=6+7,26=5+6+7+8$，故 $13,26$ 是 $\{a_n\}$ 中的项．

32 不是数列中的项，否则，设 $32=n+(n+1)+\cdots+(n+k-1)$，其中 $k\geqslant 2,n\in\mathbb{N}^*$，于是

$$32=\frac{k(2n+k-1)}{2}, \text{ 即 } k(2n+k-1)=64=2^6,$$

而 k 与 $2n+k-1$ 一奇一偶，所以奇数必定是 1，但 $2n+k-1>1$，所以只能 $k=1$，矛盾，故 32 不是数列中的项.

(2) 首先 $a_1=3$，其次形如 $2^k(k\in\mathbb{N}^*)$ 的数不是数列 $\{a_n\}$ 中的项 *(*证明类似于 *(1))*，下证其余的数都是数列 $\{a_n\}$ 中的项.

剩下的数都可以表示成 $2^m(2k+1)$ 的形式，其中 $m,k\in\mathbb{N}*,k\geqslant 1$.

第一种情况，当 $2^m>k$ 时，$2^m(2k+1)=(2^m-k)+(2^m-k+1)+\cdots+(2^m+k)$；

第二种情况，当 $2^m\leqslant k$ 时，有

$$2^m(2k+1)=[k-(2^m-1)]+[k-(2^m-2)]+\cdots+k+(k+1)+\cdots+[(k+1)+(2^m-1)],$$

所以形如 $2^m(2k+1)$ 的数都可以表示成两个或两个以上连续正整数的和，即是数列 $\{a_n\}$ 中的项. $2^6<100<2^7$，$a_{100}=107$，进而

$$S_{100}=(1+2+\cdots+107)-\left(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6\right)=5651.$$

(3) 设最小的 5 形态数为 m，且 $m=n+(n+1)+\cdots+(n+k-1)$，其中 $k\geqslant 2$，$k,n\in\mathbb{N}^*$，则 $k(2n+k-1)=2m$，且 $2n+k-1\geqslant k+1>k$.

m 是 i 形态数等价于方程 $k(2n+k-1)=2m$ 的解恰有 i 个.

第一种情况，$2m$ 不是完全平方数，设它的因数个数为 $2r$，排序为

$$1=a_1<a_2<\cdots<a_{2r}=2m,$$

则 $a_ia_{2r+1-i}=2m(i=1,2,\cdots,r)$. 当 $k=a_i\,(i=2,3,\cdots,r)$ 时，$2n+k-1=a_{2r+1-i}$，此时的 (k,n) 满足要求，方程 $k(2n+k-1)=2m$ 满足 $k\geqslant 2$，$k,n\in\mathbb{N}^*$ 的解有 $r-1$ 个. 由 $r-1=5$ 得 $r=6$，所以 $2m$ 的因数个数有 12 个.

考虑到 $12=2\times 6=3\times 4=3\times 2\times 2$ *(*1×12 不满足要求*)*，显然 $2m$ 含有因数 2，其次要想 m 最小，则其质因子应该尽量小，且较小的质因子的次数较大，由此可得

$$2m=2^5\times 3=2^3\times 3^2=2^2\times 3\times 5,$$

最小的 $m=30$；

第二种情况，$2m$ 是完全平方数，设因数个数为 $2r+1$，类似的，方程 $k(2n+k-1)=2m$ 的解有 $r-1$ 个，$r=6$，$2m$ 的因数个数为 13，只能 $m=2^{11}$，不满足要求.

综上，最小的 5 形态数为 30.

第十四章　计数与概率

1. 计数原理

   加法原理, 乘法原理;

2. 计数公式 (1) 排列; (2) 组合; (3) 可重复的排列; (4) 可重复的组合; (5) 不全相异元素的全排列; (6) 多组组合; (7) 圆排列与项链数; (8) 全错位排列等.

3. 容斥原理和逐步淘汰原理 (筛法公式)

   令 $|A|$ 表示集合 A 中元素的个数, 则 $|A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_m|$ 等于

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant m}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|A_i\cap A_j|+\sum_{1<i<j<k\leqslant m}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{m-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|.$$

4. 映射与映射法 (配对原理)

   将两个计数问题通过映射的方式对应起来，这样通过计算其中一个计数问题可以可得得到另外一个计数问题的结果.

5. 古典概型与递推模型

6. 几何概型与蒲丰掷针实验

14.1　排列组合

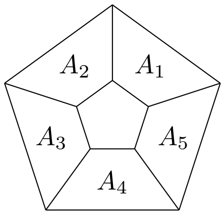
例题 **14.1** **(2013** 年北约**)** 在 6×6 棋盘上放 3 个完全相同的红色的车和 3 个完全相同的黑色的车，若这 6 个车不在同一行也不在同一列上，则不同的放法有________ 种.

解　视 6 枚棋子均相同，记落在第 i 行的的棋子在 a_i 列，则排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_6)$ 与放法对应，于是

$$\mathrm{A}_6^6\cdot\mathrm{C}_6^3\cdot\mathrm{C}_3^3=14400$$

为所求.

例题 **14.2** **(2013** 年卓越联盟**)** 如图，在 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 五个区域中栽种 3 种植物，要求同一区域中只种 1 种植物，相邻两区域所种植物不同，则不同的栽种方案的总数为________.



解 30 .

例题 14.3 **(2015 年北大化学营)** 集合 $M=\{1,2,\cdots,99\}$，集合 A 是集合 M 的子集，A 中的元素个数为偶数，且 A 中元素之和为奇数，求符合要求的集合 A 的个数．

解 易知集合 A 中奇元素的个数为奇数个，偶元素的个数也为奇数个．故符合要求的集合 A 的个数为

$$\left(\mathrm{C}_{50}^{1}+\mathrm{C}_{50}^{3}+\cdots+\mathrm{C}_{50}^{49}\right)\cdot\left(\mathrm{C}_{49}^{1}+\mathrm{C}_{49}^{3}+\cdots+\mathrm{C}_{49}^{49}\right)=2^{97}.$$

例题 14.4 **(2012 年复旦)** 将 1 张面值 100 元的人民币全部换成面值 1 角、2 角和 5 角的人民币，则换法总数为多少？

解 即求不等式 $2x+5y\leqslant 1000$ 的所有非负整数解．根据匹克公式[1]，有 $a=S+1-\dfrac{1}{2}b$，而 $S=5000$，$b=500+200+100=800$，于是

$$a+b=S+1+\frac{1}{2}b=5401$$

为所求．

例题 14.5 **(2009 年浙大)** 现有由数字 $1,2,3,4,5$ 排列而成的一个五位数组 (没有重复数字)．规定：前 i 个数不允许是 $1,2,\cdots,i$ 的一个排列 $(1\leqslant i\leqslant 4)$ (如 32154 就不可以，因为前三个数是 $1,2,3$ 的一个排列)．试求满足这种条件的数组共有多少个？

解 利用容斥原理．

设集合 A_i ($i=1,2,3,4$) 为由数字 $1,2,3,4,5$ 排列而成的一个五位数组 (没有重复数字) 组成的集合，且前 i 个数是 $1,2,\cdots,i$ 的一个排列．则 $\operatorname{card}(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)$ 为所求．

$\operatorname{card}A_1=4!=24$；$\operatorname{card}A_2=2!\times 3!=12$；$\operatorname{card}A_3=3!\times 2!=12$；$\operatorname{card}A_4=4!=24$；

$\operatorname{card}(A_1\cap A_2)=3!=6$；$\operatorname{card}(A_1\cap A_3)=2!\times 2!=4$；$\operatorname{card}(A_1\cap A_4)=3!=6$；

$\operatorname{card}(A_2\cap A_3)=2!\times 2!=4$；$\operatorname{card}(A_2\cap A_4)=2!\times 2!=4$；$\operatorname{card}(A_3\cap A_4)=3!=6$；

$\operatorname{card}(A_1\cap A_2\cap A_3)=2!=2$；$\operatorname{card}(A_1\cap A_2\cap A_4)=2!=2$；

$\operatorname{card}(A_1\cap A_3\cap A_4)=2!=2$；$\operatorname{card}(A_2\cap A_3\cap A_4)=2!=2$；

$\operatorname{card}(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)=1$．

$\operatorname{card}(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)=49$

因此求满足这种条件的数组共有 $5!-49=71$．

例题 14.6 **(2015 年清华领军)** 一个正十五边形，任取其三个顶点构成三角形，可构成多少个钝角三角形？

[1] 以平面上的若干格点围成的多边形面积 S 可以由其内部包含的格点数 a 与边界包含的格点数 b 计算：$S=a+\dfrac{1}{2}b-1$

解 315．一般地，对正 $2k+1$ 边形，锐角三角形有 $\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$ 个，钝角三角形有 $\frac{1}{2}k(k-1)(2k+1)$ 个；对正 $2k$ 边形，锐角三角形有 $\frac{1}{3}k(k-1)(k-2)$ 个，直角三角形有 $2k(k-1)$ 个，钝角三角形有 $k(k-1)(k-2)$ 个．

例题 14.7 从 $1,2,3,\cdots,20$ 这 20 个自然数中，每次任取 3 个不同的数．

(1) 这 3 个数能组成的等差数列共有多少个？若组成等比数列，则这样的等比数列共有多少个？

(2) 若 3 个数的和为 3 的倍数，则这样的数组有多少个？若其和是大于 10 的偶数，则这样的数组有多少个？

(3) 若所取 3 个数中每两个数之间至少相隔两个自然数，则这样的数组有多少个？

解 *(1)* 180；*(2)* 22；*(3)* 560．

例题 14.8 计数：

(1) $m\times n$ 的矩形网格中小矩形的个数；

(2) 圆上 n 个点两两连成弦后，弦与弦的交点个数；

(3) 圆上 n 个点两两连成弦后，将圆划分成的区域数；

(4) n 层的三角形网格中的平行四边形个数．

解 *(1)* $\mathrm{C}_m^2\mathrm{C}_n^2$；*(2)* C_n^4；*(3)* $1+\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^4$；*(4)* $3\mathrm{C}_{n+2}^4$．[1]

14.2 古典概型

例题 14.9 **(2005 年交大)** 4 封不同的信放入 4 只写好地址的信封中，完全装错的概率为________；恰好只有一封装错的概率为________．

解 $\frac{9}{24}$；0．

例题 14.10 (错排问题) 若有 n 封不同的信放入 n 只写好地址的信封中，完全装错的概率是多少？

解 贝努利装错信笺问题（分贺卡问题）：n 封信与 n 个信封全部错位的组合数 $f(n)$．

① $f(2)=1$，$f(3)=2$，$f(4)=9$，$f(5)=44$；

② 对于一般情形

$$f(n)=\mathrm{A}_n^{n-2}-\mathrm{A}_n^{n-3}+\mathrm{A}_n^{n-4}-\cdots=n!\cdot\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right].$$

③ 推广：n 个元素与 n 个位置，其中至少有 m 个元素错位的不同组合总数为

$$\begin{aligned}f(n,m)&=n!-\mathrm{C}_m^1(n-1)!+\mathrm{C}_m^2(n-2)!-\cdots+(-1)^p\mathrm{C}_m^p(n-p)!+\cdots+(-1)^m\mathrm{C}_m^m(n-m)!\\&=n!\cdot\left[1-\frac{\mathrm{C}_m^1}{\mathrm{A}_n^1}+\frac{\mathrm{C}_m^2}{\mathrm{A}_n^2}-\cdots+(-1)^p\frac{\mathrm{C}_m^p}{\mathrm{A}_n^p}+\cdots+(-1)^m\frac{\mathrm{C}_m^m}{\mathrm{A}_n^m}\right].\end{aligned}$$

[1] n 层的三角形网格中的三角形个数为 $\begin{cases}\frac{1}{8}(n+1)\left(2n^2+3n-1\right), & 2\mid n,\\ \frac{1}{8}n(n+2)(2n+1), & 2|n.\end{cases}$

例题 14.11 有 10 场百米比赛，冠军的成绩分别是 9 秒，9.1 秒，9.2 秒，9.3 秒，$\cdots$，9.9 秒，但顺序随机．若原记录是 10 秒，问平均有多少场比赛打破了记录 (精确到 0.1)?

解 分别考虑成绩为 9 秒，9.1 秒，9.2 秒，9.3 秒,$\cdots$, 9.9 秒破记录的数学期望.
成绩为 9 秒破记录的数学期望为 1 ;
成绩为 9.1 秒破纪录，即 9.1 秒的成绩出现在 9 秒的成绩之前，其概率为 $\dfrac{1}{2}$，因此数学期望为 $\dfrac{1}{2}$；
成绩为 9.2 秒破纪录，即 9.2 秒的成绩出现在 9 秒和 9.1 秒的成绩之前，其概率为 $\dfrac{\mathrm{A}_2^2}{\mathrm{A}_3^3}=\dfrac{1}{3}$，因此数学期望为 $\dfrac{1}{3}$；
……
于是所求期望为 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{10}\approx 2.9$.

例题 14.12 **(2011 年清华夏令营)** 北京采用摇号买车的方式．有 20 万人摇号，每个月有 2 万个名额．
(1) 如果每个月摇上的退出摇号，没有摇上的继续进入下月摇号，则平均每个人摇上需要多长时间；
(2) 如果每个月都有 2 万人补充进摇号队伍，则平均每个人摇上需要多长时间；
(3) 如果交管所可以控制摇上号的人的比例，使其成为每个季度第一个月摇上的概率为 $\dfrac{1}{10}$，第二个月为 $\dfrac{1}{9}$，第三个月为 $\dfrac{1}{8}$，则平均每个人摇上需要多长时间.

解 *(1)* $\dfrac{1}{10}\times(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)=5.5$;
(2) 令

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{10}\cdot 1+\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot 2+\left(\frac{9}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{10}\cdot 3+\cdots+\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{10}\cdot n\\&=\frac{1}{10}\left[1+\frac{9}{10}\cdot 2+\left(\frac{9}{10}\right)^2\cdot 3+\cdots+\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\cdot n\right],\end{aligned}$$

于是由差比数列求和，得 $S_n=10-(10+n)\cdot\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=10$，平均每个人摇上需要 10 个月.
(3) $\dfrac{1}{10}\cdot 1+\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{1}{9}\cdot 2+\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{1}{8}\cdot 3+\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{7}{8}\cdot\dfrac{1}{10}\cdot 4+\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{7}{8}\cdot\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{1}{9}\cdot 5+\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{7}{8}\cdot\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{1}{8}\cdot 6+\cdots$
令

$$\begin{aligned}T_n&=\frac{1}{10}(1+2+3)+\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{10}(4+5+6)+\left(\frac{7}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{10}(7+8+9)+\cdots+\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{10}(3n-2+3n-1+3n)\\&=\frac{3}{10}\left[2+\frac{7}{10}\cdot 5+\left(\frac{7}{10}\right)^2\cdot 8+\cdots+\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}\cdot(3n-1)\right],\end{aligned}$$

于是由差比数列求和，得 $T_n=9-(3n+9)\cdot\left(\dfrac{7}{10}\right)^n$，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=9$，平均每个人摇上需要 9 个月.

14.3 几何概型

例题 14.13 **(1)** 一根玻璃棒随机截成三段，三段能组成三角形的概率是________；

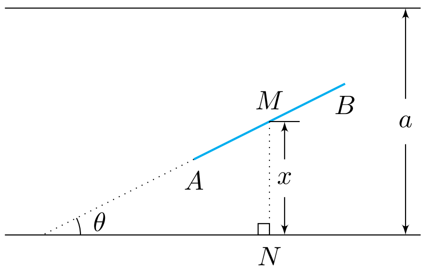
(2) 在圆周上随机选取 3 点，它们构成一个锐角三角形的概率是________；

(3) 设 a,b,c 为 $(0,1)$ 上的随机数，这样的一组 a,b,c 可以为某个三角形三边的概率是________．

解 *(1)* $\frac{1}{4}$；*(2)* $\frac{1}{4}$；*(3)* $\frac{1}{3}$．

例题 14.14 **(2010 年清华特色测试，2012 年清华保送)** 在蒲丰投针试验中，平行线间距为 a，针长为 b，试求针与线相交概率与 a,b 的关系，并求什么情况下概率是 $\frac{1}{\pi}$？

解 用针的中点到与之最近的的线的距离 x 以及平行线与针的夹角 θ 构成的有序数对 (x,θ) 表示针的位置．则 $0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2}$，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$．



此时事件 A“针与线相交”即 $x\leqslant\frac{b}{2}\sin\theta$，于是

$$P(A)=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{b}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\frac{a}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{b}{2}}{\frac{a\pi}{4}}=\frac{2b}{a\pi},$$

所以当 $a=2b$ 时，$P(A)=\frac{1}{\pi}$．

14.4 递推模型

例题 14.15 **(2010 年五校联考,2015 年交大)** 甲乙等 4 人相互传球，第一次由甲将球传出，每次传球时，传球者将球等可能地传给另外 3 人种的任何 1 人．

(1) 经过 2 次传球后，球在甲、乙两人手中的概率各是多少?

(2) 球经过 n 次传球后，球在甲手中的概率记为 p_n ($n=1,2,3,\cdots$)，试求出 p_{n+1} 和 p_n 的关系，并求 p_n 的表达式及 $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n$．

解 *(1)* 乙甲，乙丙，乙丁，丙甲，丙乙，丙丁，丁甲，丁乙，丁丙．

于是经过 2 次传球后，球在甲、乙两人手中的概率各是 $\frac{1}{3},\frac{2}{9}$．

(3) $p_{n+1}=0\cdot p_n+\frac{1}{3}\cdot(1-p_n)$，于是 $p_{n+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{4}\right)$，从而

$$p_n=\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{4},$$

有 $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n=\dfrac{1}{4}$ ，其意义为先手优势随着时间的推移会越来越少.

例题 14.16 **(2011 年 AAA 测试)** 将一枚均匀的硬币连续抛掷 n 次，以 p_n 表示未出现连续 3 次正面的概率.

(1) 求 p_1,p_2,p_3,p_4 ;

(2) 探究数列 $\{p_n\}$ 的递推公式，并给出证明；

(3) 讨论数列 $\{p_n\}$ 的单调性及其极限，并阐述该极限的概率意义.

解 *(1)* $p_1=p_2=1$ ，$p_3=\dfrac{7}{8}$ ，$p_4=\dfrac{13}{16}$;

(2) 根据第 n 次，第 $n-1$ 次，第 $n-2$ 次的结果进行讨论，根据全概率公式，有

$$p_n=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{4}p_{n-2}+\frac{1}{8}p_{n-3}.$$

(3) 因为

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{4}p_{n-1}+\frac{1}{8}p_{n-2},p_n=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{4}p_{n-2}+\frac{1}{8}p_{n-3},$$

于是有 $p_{n+1}-\dfrac{1}{2}p_n=\dfrac{1}{2}p_n-\dfrac{1}{16}p_{n-3}$ ，即

$$p_{n+1}-p_n=-\frac{1}{16}p_{n-3}<0$$

因此数列 $\{p_n\}$ 满足 $p_1=p_2$ ，从第 2 项起递减.

因为数列 $\{p_n\}$ 单调递减且有下界，因此必然存在极限，设为 P . 对

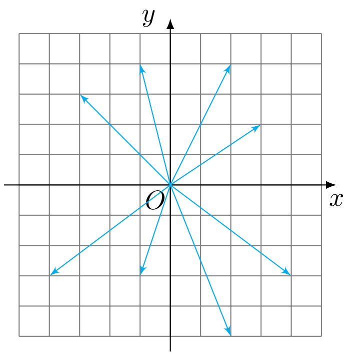
$$p_n=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{4}p_{n-2}+\frac{1}{8}p_{n-3}$$

两边取极限，有

$$P=\frac{1}{2}P+\frac{1}{4}P+\frac{1}{8}P,$$

得 $P=0$ ，其意义是小概率事件经过无数次试验后是必然发生的.

例题 14.17 若对平面上的某一格点 P ，连接原点 O 与该点的线段 OP 上没有其他格点，称格点 P 是自原点可见的. 求证：平面上任意一点 P 自原点可见的概率[1]大于 0.5 .



[1]这个概率为 $\dfrac{6}{\pi^2}$.

解 考虑第一象限内的格点 $P(a,b)$，其自原点可见即 a 与 b 互质，也即 $(a,b)=1$.
设任取两个正整数 a,b，其最大公约数为 x 的概率为 $p(x)$，则

$$p(x)=x|a\text{ 的概率 }\times x|b\text{ 的概率 }\times\left(\frac{a}{x},\frac{b}{x}\right)=1\text{ 的概率 }=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot p(1),$$

于是 $\sum\limits_{x=1}^{+\infty}\dfrac{p(1)}{x^2}=1$，即

$$p(1)=\frac{1}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{x^2}+\cdots}>\frac{1}{1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(x-1)x}+\cdots}>\frac{1}{2}.$$

14.5 习题

习题 14.1 (2010 年清华) 甲、乙、丙、丁等七人排成一排，要求甲在中间，乙丙相邻，且丁不在两端，则不同排法共有________.

习题 14.2 (2012 年清华) 红蓝两色车、马、炮棋子各一枚，将这 6 枚棋子排成一列，其中每对同字的棋子中，均为红旗子在前，蓝棋子在后，满足这种情况的不同条件的不同排列方式共有________.

习题 14.3 (2011 年卓越联盟) 数列 $\{a_n\}$ 共有 11 项，$a_1=0$，$a_{11}=4$，且 $|a_{k+1}-a_k|=1$，$k=1,2,\cdots,10$，满足这种条件的不同数列的个数为________.

习题 14.4 (2009 年复旦) 设有 $n+1$ 个不同颜色的球，放入 n 个不同的盒子中，要求每个盒子至少有一个球，则不同的方法有________ 种.

习题 14.5 (2012 年清华保送) 有一人进行投篮训练，投篮 5 次，进行一次得 1 分，失误一次扣 1 分，连进 2 次得 3 分，连进 3 次得 5 分，且投篮命中率为 $\dfrac{2}{5}$，则投 3 次恰好得 2 分的概率是________.

习题 14.6 (2013 年联赛) 从 $1,2,\cdots,20$ 中任取 5 个不同的数，其中至少有两个是相邻数的概率为________.

习题 14.7 (2013 年卓越联盟) 设曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 与 x 轴所围成的区域为 D，向区域 D 内随机投一点，该点落在 D 内任一小区域的概率只与该小区域的面积成比例，则该点落入区域 $\left\{(x,y)\in D|x^2+y^2<2\right\}$ 内的概率为________.

习题 14.8 (2013 年华约) 设集合 $A=\{x\in\mathbb{Z}|x\geqslant 10\}$，$B$ 是 A 的子集，且 B 中的元素满足：① 各个数字互不相同；② 任意两个数字之和不等于 9.

(1) 集合 B 中的两位数与三位数各有多少个?

(2) 集合 B 中是否有五位数? 是否有六位数?

(3) 将集合 B 中的数从小到大排列，第 1081 个数是什么?

习题 14.9 (2012 年华约) 系统中每个元件正常工作的概率都是 $p\,(0<p<1)$. 各个元件正常工作的时间相互独立. 如果系统中有多于一半的元件正常工作，系统就能正常工作. 系统正常工作的概率称为系统的可靠性.

(1) 某系统配置有 $2k-1$ 个元件，k 为正整数，求系统正常工作的概率 p_k；

(2) 为改善 (1) 中系统的性能，拟增加两个元件. 试讨论增加两个元件后，能否提高系统的可靠性.

习题 14.10 (2011 年卓越联盟) 一个袋子里有 a 个白球和 b 个黑球，从中任取一个球，如果取出白球，则把它放回袋中；如果取出黑球，则该黑球不再放回，另补一个白球放到袋中. 在重复 n 次这样的操作后，记袋中白球的个数为 x_n.

(1) 求 Ex_1；

(2) 设 $P\left(x_n=a+k\right)=p_k$，求 $P\left(x_{n+1}=a+k\right)$，$k=0,1,2,\cdots,b$；

(3) 证明：$Ex_{n+1}=\left(1-\dfrac{1}{a+b}\right)Ex_n+1$.

习题 14.11 (2013 年华约) 袋中装有 7 个红球和 8 个黑球，一次取出 4 个球.

(1) 求取出的球中恰好只有 1 个红球的概率;

(2) 取出的球中黑球的个数记为 X ，求 X 的分布列及 EX ;

(3) 当取出的 4 个球是同一种颜色时，求这种颜色是黑色的概率.

习题 14.12 (2010 年五校联考) 假定亲本总体中三种基因型 AA,Aa,aa 的比例为 $u:2v:w$ ($u,v,w>0$ 且 $u+2v+w=1$) 且数量充分多，参与交配的亲本是该总体中随机的两个.

(1) 子一代中，三种基因型的比例是多少?

(2) 子二代中三种基因型的比例与子一代中三种基因型的比例相同吗? 请说明理由.

14.6 习题参考答案及提示

习题 14.1 120 .

习题 14.2 90 .

习题 14.3 120 .

习题 14.4 $\dfrac{1}{2}n(n+1)!$.

习题 14.5 $\dfrac{24}{125}$.

习题 14.6 $\dfrac{232}{323}$.

习题 14.7 $1-\dfrac{1}{\pi}$.

习题 14.8 (1) 集合 B 中的两位数，十位数字为 1 的数，个位数字不能为 1 和 8，所以有 8 个．同理，十位数字为 2 的数，个位数字不能为 2 和 7，所以有 8 个．依次类推，集合 B 中的两位数共有 $9\times 8=72$ 个．

集合 B 中的三位数，百位数字共有 9 种选择．选定了百位数字后，十位数字有 8 种选择，个位数字有 6 种选择，所以 B 中的三位数共有 $9\times 8\times 6=432$ 个．

(2) B 中有五位数，没有六位数．

(3) 在集合 B 中，两位数与三位数共有 504 个；四位数中千位数字相同的数各有 $8\times 6\times 4=192$ 个．因此第 1081 个数是千位数字为 4 的第一个数，它是 4012 .

习题 14.9 (1) $p_k=\sum\limits_{n=0}^{k-1}\mathrm{C}_{2k-1}^{n}(1-p)^n p^{2k-1-n}$.

(2) 当 $p>\dfrac{1}{2}$ 时可靠性增加；当 $p<\dfrac{1}{2}$ 时可靠性减小；当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时可靠性不变．

习题 14.10 (1) $Ex_1=\dfrac{a}{a+b}\cdot a+\dfrac{b}{a+b}\cdot(a+1)=\dfrac{a^2+ab+b}{a+b}$;

(2) $k=0$ 时，$P\left(x_{n+1}=a\right)=p_0\cdot\dfrac{a}{a+b}$;

$k\geqslant 1$ 时，根据全概率公式：

$$\begin{aligned}P\left(x_{n+1}=a+k\right)&=P\left(x_n=a+k\right)\cdot\frac{a+k}{a+b}+P\left(x_n=a+k-1\right)\cdot\frac{(a+b)-(a+k-1)}{a+b}\\&=p_k\cdot\frac{a+k}{a+b}+p_{k-1}\cdot\frac{b-k+1}{a+b}.\end{aligned}$$

(3) $Ex_{n+1}=\dfrac{Ex_n}{a+b}\cdot Ex_n+\dfrac{(a+b)-Ex_n}{a+b}\cdot\left(Ex_n+1\right)=\left(1-\dfrac{1}{a+b}\right)Ex_n+1$.

习题 14.11 (1) $(u+v)^2:2(u+v)(v+w):(v+w)^2$. (2) 相同．

第十五章　组合杂题

1. 抽屉原理（鸽巢原理、狄利克雷原则）

   原理 1：把多于 n 个的物体放到 n 个抽屉里，则至少有一个抽屉里的东西不少于两件.

   原理 2：把多于 mn 个物体放到 n 个抽屉里，则至少有一个抽屉里有不少于 $m+1$ 个物体.

2. 局部调整法

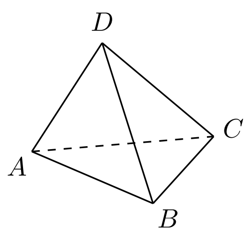
   局部调整法就是按照题目的要求逐步进行调整（或作变换），以减少与目标的差别，逐步逼近目标，从而保证经过有限步可以达到预定目标.

3. 算两次原理（富比尼 (fubini) 原理）

   运用算两次原理的方法主要体现在对同一对象从两种不同的角度去进行计数，再加以综合，以便推出所欲取得的结果.

15.1　极端情形

例题 **15.1** **(2008 年清华)** 任意一个四面体，证明：至少存在一个顶点，从其出发的三条棱可以组成一个三角形.



解　设四面体为 $ABCD$.

法一

设 AD 是最长棱，则只需要证明 $AB+AC>AD$ 或 $DB+DC>DA$ 就可以了. 由于

$$BD+BA>AD, CA+CD>AD$$

于是 $(BD+BA)+(CA+CD)>AD$ ，因此命题得证.

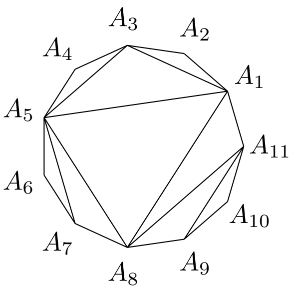
法二

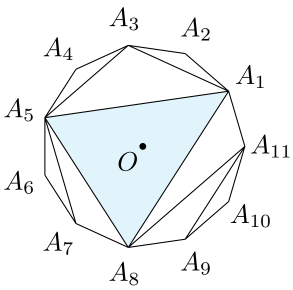
设 $DA+DB+DC$ 最大，不妨设 $DA \geqslant DB \geqslant DC$，为了证明 DA,DB,DC 构成三角形，考虑反证法，设 $DA+DB \leqslant DC$，则 $DA+DB > CB+CA$ 于是

$$2CD \geqslant 2(DA+DB) > DA+CA+DB+BC$$

而在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$ 中，$(DA+CA)+(DB+BC) > 2DC$，矛盾，因此命题得证.

例题 15.2 **(2011 年华约)** 将一个正十一边形用对角线划分为 9 个三角形，这些对角线在正十一边形内两两不相交，则 (　　)





A. 存在某种分法，所分出的三角形都不是锐角三角形

B. 存在某种分法，所分出的三角形恰有两个锐角三角形

C. 存在某种分法，所分出的三有形至少有 3 个锐角三角形

D. 任何一种分法所分出的三角形都恰有 1 个锐角三角形

解　*D*. 注意到所有三角形的外心均为正十一边形的中心，而当且仅当三角形的外心在三角形内部时为锐角三角形.

例题 15.3 **(2012 年清华保送)** 在 $\triangle AOB$ 内 (含边界)，其中 O 为坐标原点，A 在 x 轴正向，B 在 y 轴正向，且有 $OA=OB=2$.

(1) 用不等式组表示 $\triangle AOB$ 的区域;

(2) 求证：在 $\triangle AOB$ 内的任意 11 个点，总可以分为两组，使一组的横坐标之和不大于 6，另外一组的纵坐标之和不大于 6.

解　(1) 表示 $\triangle AOB$ 的区域的不等式组为

$$\begin{cases} x+y \leqslant 2, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

(2) 只需要证明线段 $x+y=2\,(x \geqslant 0$ 且 $y \geqslant 0)$ 上的任意 11 个点总可以按照题意分成两组即可.

设这 11 个点为 $P_i\,(x_i, 2-x_i)$，$i=1,2,\cdots,11$. 不妨设 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_{11}$，且 $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \leqslant 6$ 但

$\sum_{i=1}^{k+1} x_i > 6$．则

$$(k+1)\,x_{k+1} \geqslant \sum_{i=1}^{k+1} x_i > 6,$$

从而 $x_{k+1} > \dfrac{6}{k+1}$．此时只需要证明 $\sum_{i=k+1}^{11}(2-x_i) \leqslant 6$，用分析法：

$$\begin{aligned}\sum_{i=k+1}^{11}(2-x_i) \leqslant 6 &\Leftarrow \sum_{i=k+1}^{11} x_i > 16-2k\\ &\Leftarrow (11-k)\,x_{k+1} > 16-2k\\ &\Leftarrow x_{k+1} > \frac{16-2k}{11-k}\end{aligned}$$

综上，只需要证明 $\dfrac{6}{k+1} \geqslant \dfrac{16-2k}{11-k}$，容易证明该不等式成立．
因此原命题得证．

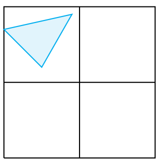
15.2 论证与构造

例题 15.4 证明：不存在所有顶点均为格点，且每条边都相等的奇数边多边形．

解 根据奇偶证明．

例题 15.5 (2015 年华中) 在边长为 1 的正方形 (含边界) 中取 9 个点，其中必有 3 个点，它们构成的三角形面积不超过________．

解 $\dfrac{1}{8}$．将正方形划分为 4 个小正方形，利用抽屉原理．



例题 15.6 已知平面上 n 个圆两两相交，求证：平面上存在与所有圆均相交的直线．

解 在平面上任取一条直线，则平面上的所有圆在该直线上的投影均为线段．可以证明这些线段有公共部分，因此取公共部分内的一点作该直线的垂线就得到了符合题意的直线．

例题 15.7 有 99 只筐，筐里装了苹果和香蕉，但各筐庄的苹果数、香蕉数都不一定，证明可以取 50 只筐，这些筐中的苹果数之和不少于苹果数总和的一半，香蕉数之和也不少于香蕉总数的一半．

解 先考虑从 3 只筐中挑 2 只筐．
第一步，从 3 只筐中挑选苹果最多的一筐；
第二步，从剩下的 2 筐中挑选香蕉较多的一筐．

再考虑从 5 只筐中挑选 3 只筐.

第一步，从 5 只筐中挑选苹果最多的一筐；

第二步，将剩下的 4 只筐分成两组，挑选香蕉较多的一组和第一步得到的那筐放在一起就可以保证香蕉数之和不少于香蕉总数的一半. 接下来思考如何保证苹果数之和不少于苹果总数的一半.

从分组入手：将剩下的 4 只筐按苹果数排序（设为 $a>b>c>d$），然后轮流分为两组（如 (a,c) 与 (b,d)），这样就可以保证任意一组的苹果数之和加上第一步得到的那筐的苹果数一定大于另外一组的苹果数之和，因此满足题意.

最后考虑原题.

将 99 只筐按苹果数从多到少编号，设为 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant\cdots\geqslant x_{99}$.

取出第 1 筐，将剩下的 98 只筐分为两组 $(2,4,\cdots,98)$ 和 $(3,5,\cdots,99)$，挑选两组筐中香蕉数总和较大的一组与第 1 筐合并就得到满足题意的 50 只筐.

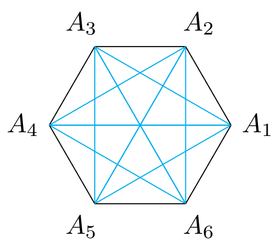
例题 15.8 (2010 年华约) 欲将正六边形的各边和各条对角线都染为 n 种颜色之一，使得以正六边形的任何 3 个顶点作为顶点的三角形有 3 种不同颜色的边，并且不同的三角形使用不同的 3 色组合，则 n 的最小值为________.

解 6 种颜色时，由于共有 15 条边，于是必然存在某种颜色 A 染了 3 条边.

此时某边染了颜色 A 的三角形有 $3\times4=12$ 个.

而其他颜色组合只有 $\mathrm{C}_5^2=10$ 种组合，必然存在相同的 3 色组合，矛盾.

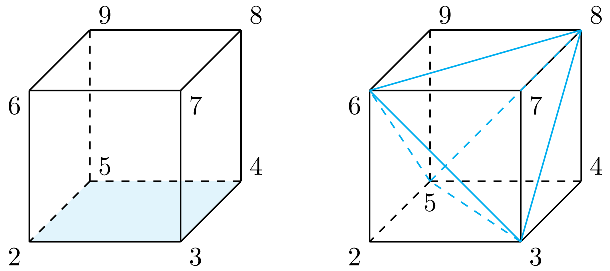
7 种颜色时，如图，用 6 种颜色分别染 $A_iA_{i+1}\,(i=1,2,3,4,5,6)$，以及 $A_iA_{i+2}\,(i=1,2,3,4,5,6)$，其中 $A_7=A_1$，$A_8=A_2$，剩下的 3 条对角线染第 7 种颜色，则满足要求.



例题 15.9 有 10 个同学，每天都有 5 个人一起相约去看电影，他们都喜新厌旧，任意 2 个人最多一起看两场电影 (比如第一天 5 个人中有韩梅梅和李雷，第二天里也有韩梅梅和李雷，那么之后韩梅梅和李雷就再也不会一起看电影了)，10 个同学总共最多可以看几场电影呢?

解 8 场. 每人至多出场 4 次，否则需要见至少 20 人次，必然会有人见超过 2 次. 于是 10 个同学最多可以看 8 场电影，下面构造 8 场的例子.

如图，将 1 和 0 取出，剩下的 8 个点看成正方体的 8 个顶点，形成 6 个面：



(2345)， (6789)， (2367)， (4589)， (2569)， (3478).

再取两个正四面体的顶点 (2479)， (3568).

然后将 1 和 0 放入其中就构造出了 8 场的例子：

(12345), (16789), (12367), (14589), (34780), (25690), (24790), (35680).

例题 15.10 **(2012 年北大夏令营)** 将 $1,2,\cdots,4n$ 分成 n 组，满足每组中有一个数是另三个数之算术平均数，求所有可能的 $n\in\mathbb{N}^*$.

解 (1) n 为全体正偶数，证明如下.

若 $a=\dfrac{b+c+d}{3}$，则 $a+b+c+d=4a$. 而

$$S_n=1+2+\cdots+4n=2n(4n+1),$$

于是 n 必为偶数. 将 $1,2,3,4,5,6,7,8$ 分为 $(2,3,7,4),(1,6,8,4)$ 两组，然后每组数依次加 8 即可构造所有的符合题意的情形.

例题 15.11 **(2012 年清华)** 某乒乓球培训班共有 n 位学员，在班内双打训练赛期间，每两名学员都作为搭档恰好参加过一场双打比赛. 试确定 n 的所有可能值并分别给出对应的一种安排比赛的方案.

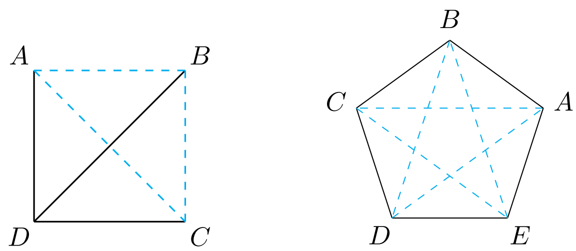
解 n 的所有可能值为 $n=4k$ 或 $n=4k+1$，$k\in N^*$.

双打比赛总共进行的场次为 $\dfrac{1}{2}C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{4}$，因此 $n=4k$ 或 $n=4k+1$，$k\in\mathbb{N}^*$.

下面证明任意 $n=4k$ 或 $n=4k+1\ (k\in\mathbb{N}^*)$ 时，都可以构造出满足要求的比赛方案.

将 n 个人看作平面上的 n 个不同的点，则每场双打比赛可以看成是两条无公共端点的线段 P_1P_2,P_3P_4 形成的线段组 $P_1P_2-P_3P_4$，题意即 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 条线段可以组成 $\dfrac{n(n-1)}{4}$ 个无公共端点的线段组.

当 $k=1$ 时，即 $n=4$ 或 $n=5$ 时，可以如图构造出符合题意的线段组：



$n=4$ 时，将 6 条线段分为 3 个线段组：$AB-CD$，$AD-BC$，$BD-AC$；

$n=5$ 时，将 10 条线段分为 5 个线段组：$AB-CE$，$BC-AD$，$CD-BE$，$DE-AC$，$AE-BD$.

假设当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 可以构造出符合题意的线段组.
第一种情况，$n=4k+4$ 时.
设端点为 $A,B,C,D,P_1,Q_1,P_2,Q_2,\cdots,P_{2k},Q_{2k}$，则
① 根据 $n=4$ 的情形，可以安排 A,B,C,D 之间的比赛；
② 根据 $n=4k$ 的情形，可以安排 $P_1,Q_1,P_2,Q_2,\cdots,P_{2k},Q_{2k}$ 之间的比赛；
③ 安排组间比赛 $P_iA-Q_iB,P_iC-Q_iD,P_iB-Q_iA,P_iD-Q_iC$，$i=1,2,\cdots,2k$.
此时从每个点出发的线段都在线段组中出现过，且所有线段组都无公共端点.
这就证明了当 $n=4k+4$ 时可以构造出符合题意的线段组.
第二种情况，$n=4k+5$ 时.
设端点为 $A,B,C,D,E,P_1,Q_1,P_2,Q_2,\cdots,P_{2k},Q_{2k}$，则
① 根据 $n=5$ 的情形，可以安排 A,B,C,D,E 之间的比赛；
② 根据 $n=4k+1$ 的情形，可以安排 $E,P_1,Q_1,P_2,Q_2,\cdots,P_{2k},Q_{2k}$ 之间的比赛；
③ 安排组间比赛 $P_iA-Q_iB,P_iC-Q_iD,P_iB-Q_iA,P_iD-Q_iC$，$i=1,2,\cdots,2k$.
此时从每个点出发的线段都在线段组中出现过，且所有线段组都无公共端点.
这就证明了当 $n=4k+5$ 时可以构造出符合题意的线段组.
综合两种情况，由归纳法原理，命题得证.

例题 15.12 如果平面内的一条直线将该平面内的一个区域分成面积相等的两个区域，则称这条直线平分这个区域．现在给出平面 α 内的任意一个封闭区域 M．请问：
(1) 过平面内的任意一点是否至少存在一条直线平分区域 M？证明你的结论.
(2) 平面内是否存在互相垂直的两条直线平分区域 M 成四等份？证明你的结论.

解 *(1) 存在；(2) 存在.*

例题 15.13 **(IMO29 预选题)** 平面上有 $2m$ 个红点和 $2n$ 个蓝点，任意三点都不共线，求证：存在一条直线 l，其两侧各有 m 个红点和 n 个蓝点.

解 略.

例题 15.14 **(2013 年北约)** 设有 mn 个实数排成一个 m 行 n 列的阵列 $\{a_{ij}\}_{m\times n}$，使得每一行上的 n 个数从左到右都按递增的顺序排列，即对任意 $1\leqslant i\leqslant m$，当 $j_1<j_2$ 时有 $a_{ij_1}\leqslant a_{ij_2}$．下面把每列上的 m 个数都从上到下都按递增的顺序重排得到阵列 $\{a'_{ij}\}_{m\times n}$，即对任意的 $1\leqslant j\leqslant n$，当 $i_1<i_2$ 时有 $a'_{i_1j}\leqslant a'_{i_2j}$，问这个新的阵列 $\{a'_{ij}\}_{m\times n}$ 每一行中的 n 个数的大小顺序如何？给出结论并说明理由.

解 新的阵列 $\{a'{}_{ij}\}_{m\times n}$ 中，每一行上的 n 个数从左到右还是按递增的顺序排列.
反证如下，若有某一行不是这样，不妨设第 i 行上存在 $j<k$ 且 $a'_{ij}>a_{ik}{}'$.
由新阵列的排法知 $a_{1k}{}'\leqslant a_{2k}{}'\leqslant\cdots\leqslant a'_{ik}\leqslant a'_{ij}\leqslant a'_{(i+1)j}\leqslant\cdots\leqslant a'_{mj}$.
返回到原阵列 $\{a_{ij}\}_{m\times n}$ 讨论，i 个数 a'_{1k}，a'_{2k}，$\cdots$，a'_{ik} 都在原阵列的第 k 列上，而剩余的 $(m-i+1)$ 个数 a'_{ij}，$a'_{(i+1)j}$，$\cdots$，a'_{mj} 都在原阵列的第 j 列上，由于这些数共有 $m+1$ 个而总共有 m 行，所以一定有 a'_{1k}，a'_{2k}，$\cdots$，a'_{ik} 中的某个数与 a'_{ij}，$a'_{(i+1)j}$，$\cdots$，a'_{mj} 中的某个数在原阵列的同一行.

故在原阵列的此行上，第 j 列上的数大于第 k 列上的数，与原阵列的排法矛盾.

15.3 “单循环赛”

例题 15.15 **(2012 年北大夏令营)** 有 n 支队伍参加单循环比赛，设每支队伍获胜的场数分别为 $x_i\ (i=1,2,3,\cdots,n)$，失败的场数分别为 $y_i\ (i=1,2,3,\cdots,n)$，若 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3=\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^3$，求证：$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4=\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^4$.

解 由单循环赛得，$x_i+y_i=n-1\ (i=1,2,3,\cdots,n)$，$\sum\limits_{k=1}^{n} x_i=\sum\limits_{k=1}^{n} y_i=\mathrm{C}_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$. 令 $n-1=k$，则 $y_i=k-x_i\ (i=1,2,3,\cdots,n)$，此时

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^3-{y_i}^3\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[x_i^3-(k-x_i)^3\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(2x_i^3-3kx_i^2+3k^2x_i-k^3\right),$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^4-y_i^4\right)&=\sum_{i=1}^{n}\left[x_i^4-(k-x_i)^4\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(4kx_i^3-6k^2x_i^2+4k^3x_i-k^4\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(6k^2x_i^2-6k^3x_i+2k^4\right)-6k^2x_i^2+4k^3x_i-k^4\right]\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(k^4-2k^3x_i\right)=k^3\sum_{i=1}^{n}(k-2x_i)=0.\end{aligned}$$

从而原命题得证.

例题 15.16 有 n 支队伍参加单循环比赛，若某三支队伍 A,B,C 出现 A 击败 B，B 击败 C，C 击败 A，则称三支队伍 A,B,C 构成一个“循环小组”.

(1) 证明：如果没有人全胜，那么必然存在“循环小组”；

(2) 请问“循环小组”的最大和最小值分别是多少?

解 *(1)*法一

假设 A 的获胜场次最多，为 k 场. 由于 A 没有全胜，于是在剩下的 $(n-k)$ 个人中一定有 C 胜 A. 在 A 胜的 k 个人中，如果没有人胜 C，那么 C 至少胜了 $(k+1)$ 场，与假设矛盾，于是存在这样的三个人.

法二

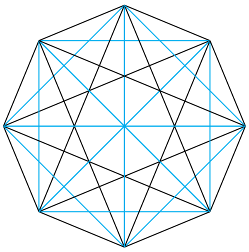
从 n 个人中任意选取一人，将所有胜了该人称为胜者组. 若胜者组中的某人对组外的选手对不为全胜，则出现了所要求的三个人. 若胜者组组外的选手保持全胜，则在组内再选一人，将组内所有胜了该人的的作为新的胜者组，显然此时的胜者组应仍对组外的选手保持全胜，否则就出现了所要求的三个人. 此过程一直进行下去，直到胜者组只剩一人，此时该人全胜，矛盾. 于是存在这样的三个人.

(2) 设 n 支队伍分别赢了 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 场比赛，则 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k=\mathrm{C}_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$. 若某三支队伍的内部比赛中，有一支队伍赢了两场，那么它就不是“循环小组”；若某三支队伍不是“循环小组”，那么就一定有且

仅有一支队伍赢了两场．因此“循环小组”数为

$$\mathrm{C}_n^3-\left(\mathrm{C}_{a_1}^2+\mathrm{C}_{a_2}^2+\cdots+\mathrm{C}_{a_n}^2\right).$$

不难通过调整法证明当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 尽量平均时 $(|a_i-a_j|\leqslant 1)$“循环小组”数最大．构造是容易的，将 n 支队伍排成一圈，然后间隔为奇数顺时针，间隔为偶数逆时针标记即可，如图．



此时可得“循环小组”的最大值为：

情形一，n 为奇数时，$a_1=a_2=\cdots=a_n=k=\dfrac{n-1}{2}$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_n^3-n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}^2&=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)-\frac{1}{8}n(n-1)(n-3)\\&=\frac{1}{24}n(n-1)(n+1),\end{aligned}$$

情形二，n 为偶数时，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有 $\dfrac{n}{2}$ 个 $\dfrac{n}{2}$ 和 $\dfrac{n}{2}$ 个 $\dfrac{n}{2}-1$．

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_n^3-\frac{n}{2}\mathrm{C}_{\frac{n}{2}}^2-\frac{n}{2}\mathrm{C}_{\frac{n}{2}-1}^2&=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)-\frac{1}{16}n^2(n-2)-\frac{1}{16}n(n-2)(n-4)\\&=\frac{1}{24}n(n-2)(n+2),\end{aligned}$$

而“循环小组”的最小值为 0，只需要将队伍从 $1,2,\cdots,n$ 编号，编号大的赢了编号小的即可．

例题 15.17 (2008 年北大) 排球单循环赛，胜得 1 分，负不得分，南方球队比北方球队多 9 支，南方球队的总得分是北方球队的 9 倍．求证：冠军是一直南方球队．

解 设北方球队共有 x 支，则南方球队有 $x+9$ 支．所有球队总得分为

$$\mathrm{C}_{2x+9}^2=\frac{(2x+9)(2x+8)}{2}=(2x+9)(x+4),$$

南方球队总得分为

$$\frac{9}{10}\frac{(2x+9)(2x+8)}{2}=\frac{9(2x+9)(x+4)}{10},$$

北方球队总得分为

$$\frac{(2x+9)(x+4)}{10},$$

南方球队内部比赛总得分 C_{x+9}^2，北方球队内部比赛总得分 C_x^2．于是

$$\frac{(2x+9)(x+4)}{10}-\frac{x(x-1)}{2}\geqslant 0,$$

解得

$$\frac{11-\sqrt{229}}{3}\leqslant x\leqslant\frac{11+\sqrt{229}}{3}<\frac{11+16}{3}=9,$$

因为 $\dfrac{(2x+9)(x+4)}{10}$ 为整数，解得 $x=6$ 或 $x=8$．

情形一，当 $x=6$ 时．

所有球队总得分为

$$C_{2x+9}^2=\frac{(2x+9)(2x+8)}{2}=(2x+9)(x+4)=210,$$

南方球队总得分为

$$\frac{9}{10}\frac{(2x+9)(2x+8)}{2}=\frac{9(2x+9)(x+4)}{10}=189,$$

北方球队总得分为

$$\frac{(2x+9)(x+4)}{10}=21,$$

南方球队内部比赛总得分 $C_{x+9}^2=105$；北方球队内部比赛总得分 $C_x^2=15$．于是北方胜南方得分 $21-15=6$；北方球队最高得分 $5+6=11$，因为 $11\times 15=165<189$．所以南方球队中至少有一支得分超过 11 分．冠军在南方球队中．

情形二，当 $x=8$ 时．

所有球队总得分为

$$C_{2x+9}^2=\frac{(2x+9)(2x+8)}{2}=(2x+9)(x+4)=300,$$

南方球队总得分为

$$\frac{9}{10}\frac{(2x+9)(2x+8)}{2}=\frac{9(2x+9)(x+4)}{10}=270,$$

北方球队总得分为

$$\frac{(2x+9)(x+4)}{10}=30,$$

南方球队内部比赛总得分 $C_{x+9}^2=136$，北方球队内部比赛总得分 $C_x^2=28$．北方胜南方得分 $30-28=2$，北方球队最高得分 $7+2=9$，因为 $9\times 17=153<270$，所以南方球队中至少有一支得分超过 9 分．冠军在南方球队中．

综上所述，冠军是一支南方球队．

15.4 习题

习题 15.1 (2015 年清华领军) 50 个黑球和 49 个白球排成一排，则 (　　)

A. 必有一个黑球右侧白球的数量等于黑球的数量

B. 必有一个白球右侧白球的数量等于黑球的数量

C. 必有一个黑球右侧黑球的数量比白球的数量多 1

D. 必有一个白球右侧黑球的数量比白球的数量多 1

习题 15.2 (2008 年中科大) 2008 个白球和 2009 个黑球任意排成一列，证明：无论如何排列，都存在一个黑球，它的两侧的白球和黑球的个数分别相等.

习题 15.3 已知集合 $A=\{1,2,3,\cdots,2n+1\}\,(n\in N^*)$，集合 $B\subseteq A$，且满足 $\forall x,y\in B$，$x+y\notin B$，则求集合 B 中的元素个数的最大值.

习题 15.4 有限条抛物线及其内部能否覆盖整个坐标平面？证明你的结论.

习题 15.5 对于一个 $n\,(n\geqslant 3)$ 元点集，n 个点不全在一条直线上. 求证：一定存在某两个点，连接它们的直线上不存在 n 元点集中的其他点[1].

习题 15.6 n 个空间的点，任意两点的距离都相等，求 n 的最大值.

习题 15.7 (2008 年南开) n 个非零空间向量，任意两个的夹角为钝角，求 n 的最大值[2].

习题 15.8 在一个 $n\times 6\,(n\geqslant 2)$ 的矩形方格表的 $6n$ 个单位小方格中，将每一个单位小方格都填上 0 或 1 两种数字之一. 如果有某种填法，使得表中不存在一个矩形方格表，它的四周所在的 4 个单位小方格填有相同的数字，就称该填法为“N–填法”，否则称为“Y–填法”. 如果无论怎样填数字，填法都是“Y–填法”，求正整数 n 的最小值.

习题 15.9 (2009 年清华理综) 有 100 个集装箱里面有 200 个货物，在取出来的过程中货物的顺序被打乱了. 现在将他们按一定的规则重新装入集装箱中. 将货物依次取出，依次放入集装箱中，集装箱的体积都是 1，且每个集装箱最多放两个货物，若装了一个货物后装不下第二个，那么就将这个集装箱密封，把第二个货物放到下个集装箱中. 比如原来有 2 个集装箱中的货物体积是 $(0.5,0.5)$，$(0.7,0.3)$，被打算顺序后为 $0.5,0.7,0.5,0.3$，那么就需要 3 个集装箱去装它们. 问在最坏的情况下需要多少个集装箱才能将所有的货物装完？

习题 15.10 (2010 年江西高考) 证明以下命题：

(1) 对任意正整数 a，都存在正整数 $b,c(b<c)$，使得 a^2,b^2,c^2 成等差数列；

(2) 存在无穷多个互不相似的三角形 $\triangle_n$，其边长 a_n,b_n,c_n 为正整数，且 a_n^2,b_n^2,c_n^2 成等差数列.

---

[1] 其逆否命题为“对于一个 n 元点集，若其中任意两点连线上还存在其他点，则这 n 个点共线”.

[2] 这个结论可以递推下去，也就是说至多有 $n+1$ 个 n 维向量，它们两两的夹角 (广义的) 均为钝角.

15.5 习题参考答案及提示

习题 15.1 A.

习题 15.2 略.

习题 15.3 $n+1$.

先证明 $n+1$ 个是可能的，取 $B=\{n+1,n+2,\cdots,2n+1\}$ 或 $\{1,3,\cdots,2n+1\}$ 均可.

接下来证明多于 $n+1$ 个是不可能的.

我们只需要证明集合 $A_n=\{1,2,3,\cdots,2n+1\}$ 的任意一个 m 元子集 $B\,(m\geqslant n+2)$ 中必然存在两个元素，它们的和仍然在该子集中，可以利用数学归纳法对 n 进行归纳完成.

当 $n=1$ 时，命题显然成立；

若命题对 n 成立，则

在 $n+1$ 时，全集为

$$A_{n+1}=\{1,2,3,\cdots,2n+1,2n+2,2n+3\}.$$

情形一，如果 $2n+3\notin B$，则 B 中必然包含 A_n 中至少 $n+2$ 个元素，根据归纳假设，命题成立；

情形二，如果 $2n+3\in B$，则 B 中还包含集合 $\{1,2,3,\cdots,2n+2\}$ 中的 $n+2$ 个数. 将 A_{n+1} 中除 $2n+3$ 外的其余 $2n+2$ 个数分为 $n+1$ 组：

$$(1,2n+2)\,,(2,2n+1)\,,\cdots,(n+1,n+2)\,,$$

每组中的两个数之和均为 $2n+3$. 根据抽屉原理，B 中必然存在两个数，它们的和为 $2n+3$，命题成立.

综合两种情形，命题对 $n+1$ 亦成立.

综上，这就证明了集合 B 中的元素个数的最大值为 $n+1$.

习题 15.4 不能.

首先，有限条抛物线的对称轴为有限条，在坐标平面内可取一条直线 l 与这有限条对称轴都不平行；

齐次，因为与抛物线对称轴不平行的直线最多只能被抛物线覆盖其上的某条线段，于是这些抛物线只能覆盖直线 l 上的有限条线段.

综上，有限条抛物线及其内部不能覆盖整个坐标平面. [1]

习题 15.5 设连接 n 元点集中的两点的直线与直线外的一点构成一个点线组，则点线组为有限个，其中必然存在一个点线组，其点到直线的距离最小. 现在证明这条直线为满足要求的直线，用反证法.

设 $A-BC$ 为点到直线的距离最小的点线组，若这条直线上存在其他点集中的点 D，则由于直线 BC 上至少有 B,C,D 三个点，因此必然有两个点在垂足的同一侧，不妨设为 C,D，且 C 点位于 H,D 点之间，则 $AD>DH\geqslant DC$. 考虑 $\triangle ACD$ 的面积，从而有

$$d\,(C,AD)<d\,(A,CD)\,,$$

[1] 可以证明有限条双曲线及其内部可以覆盖整个坐标平面.

与 $A-BC$ 为点到直线的距离最小的点线组矛盾．因此原命题得证．

习题 15.6 4．

习题 15.7 n 的最大值为 4．

首先，从正四面体出发到顶点的四个向量就满足要求．

接下来证明 $n\geqslant 5$ 时不符合题意．只需要证明 $n=5$ 时不符合题意即可．

不妨设其中一个向量为 $(1,0,0)$，其他四个向量分别为 (x_i,y_i,z_i)，$i=1,2,3,4$，则 $x_i<0$，$i=1,2,3,4$．

对于其他四个向量中任意两个向量的数量积，

$$(x_i,y_i,z_i)\cdot(x_j,y_j,z_j)=x_ix_j+y_iy_j+z_iz_j<0,$$

于是 $y_iy_j+z_iz_j<0$，也就是说这四个向量中的任意两个向量在 yOz 平面上的投影夹角均为钝角，而这显然是不可能的．

综上，n 的最大值为 4．

习题 15.8 正整数 n 的最小值为 5．

首先，$n=4$ 时存在“N–填法”，如图．取该表的前 2,3 行即得 $n=2,3$ 时的“N–填法”，因此 $n\geqslant 5$．

1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0

接下来，我们证明当 $n\geqslant 5$ 时，所有填法均为“Y–填法”．只需要证明 $n=5$ 的情形．

不妨设第一列中至少出现了 3 个 1，忽略 0 所在的行，考虑剩下的 5 列，必然满足：

(1) 每一列至多含 1 个 1，否则这一列与第一列可以构成四个角均为 1 的矩形；

(2) 每一列均不同，否则相同的两列将构成四个角均为相同数字的矩形；

然而至多包含 1 个 1 的所有可能只有 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,0,0)$ 共四种，因此这 5 列必然有相同的，与 *(2)* 矛盾．

1	1	0	0	0	
1	0	1	0	0	
1	0	0	1	0	

因此 $n=5$ 时，所有填法均为“Y–填法”．

综上所述，正整数 n 的最小值为 5．

习题 15.9 至少需要 199 个箱子才能确保装下这 200 件物品．

首先，这 200 件物品无论怎样随意摆放，一定存在有两个相邻的物品放入同一个箱子，否则记这 200 件

物品的体积为 $a_1, a_2, \cdots, a_{200}$ ，且箱子的容量为 M .

不妨设随意摆放的次序为 $a_1, a_2, \cdots, a_{200}$ ，那么

$$a_1 + a_2, a_3 + a_4, \cdots, a_{199} + a_{200} > M,$$

相加得

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{200} > 100M,$$

矛盾.

其次，设箱子的体积分别为 $1, 2, 3, \cdots, 200$ ，箱子容量为 201 ，打乱后的顺序为

$$1, 2, 200, 3, 199, 4, 198, 5, \cdots, 103, 102,$$

即从第 3 项起，两个等差数列交叉排列，那么原本可以用 100 个集装箱装完：

$$(1, 200), (2, 199), (100, 101),$$

但打乱后只有第一个集装箱装了 $(1, 2)$ ，其他的集装箱都只能装一个货物．此时需要 199 个集装箱才能将所有的货物装完.

习题 15.10 *(1)* 根据题意有 $2b^2 - c^2 = a^2$ ，事实上，只需要寻找方程 $x^2 - 2y^2 = -1$ 的一组特解 (x, y) ，然后令 $(a, b, c) = (a, ya, xa)$ 即可．由于 $\sqrt{2} \approx 1.414 = \{1, 2, 2, 2, 2, 5\}$ ，于是不难得到不定方程

$$x^2 - 2y^2 = -1$$

的基本解 $(7, 5)$ ．因此对任意正整数 a ，都存在正整数 $b = 7a$ ， $c = 5a$ ，使得 a^2, b^2, c^2 成等差数列.

(2) 令 $\left(\dfrac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2 = b^2$ ，这显然是以 $\dfrac{a+c}{2}, \dfrac{a-c}{2}, b$ 为三边的直角三角形．我们知道，对于一个直角三角形的三边，总是可以写作 $1 + \tan^2\theta, 1 - \tan^2\theta, 2\tan\theta$ 的．不妨让 $\tan\theta = \dfrac{m}{n}$ 为一个有理数，同比例扩大 m^2 倍后得到方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{a+c}{2} = m^2 - n^2, \\ \dfrac{a-c}{2} = 2mn, \\ b = m^2 + n^2. \end{cases}$$

解之，令 $n = 1$ ，就可以得到 $a = m^2 + 2m - 1$ ， $c = m^2 - 2m - 1$ ， $b = m^2 + 1$.